Problem des Monats ・April 2024

Lösungshinweise

Tipp 1: Suche dir eine Zahl und betrachte, auf welchen Karten sie zu finden ist. Es gibt einen direkten Zusammenhang!

Tipp 2: Suche dir eine Zahl und schaue genau auf welchen Karten sie steht. Schaue dir jeweils die erste Zahl auf diesen Karten an!

Aufgabe 1
Der Zauberer erkennt die geheime Zahl, indem er sich jeweils nur die erste Zahl der Karten merkt, auf der die geheime Zahl zu finden ist. Dann addiert er diese ersten Zahlen und erhält direkt die geheime Zahl.

Bei den ersten Zahlen auf den Karten handelt es sich um **aufsteigende Zweierpotenzen**:

Erste Zahl auf einer Karte	1	2	4	8	16	..
Zugeordnete Zweierpotenz	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	..

Allgemein gilt das Prinzip, dass sich alle natürlichen Zahlen als **Summe von Zweierpotenzen** darstellen lassen. Auf den fünf Karten des Zauberers werden die natürlichen Zahlen von 1 bis 31 versteckt. Alle natürlichen Zahlen setzen sich aus einer anderen Summenkombination von Zweierpotenzen zusammen, sodass man auch rückwärts aus der Kombination der jeweiligen Potenzen auf die gesuchte bzw. geheime Zahl schließen kann, hier einige Beispiele:

$2^0 + 2^1 + 2^3 = 11$
$2^0 + 2^4 = 17$
$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$

Aufgabe 2
a) **Auf der Karte mit der ersten Zahl A** befinden sich alle ungeraden Zahlen von 1 bis 31.

Auf der Karte mit der ersten Zahl B wechseln sich zwei Schritte ab:
- zwei Zahlen folgen direkt aufeinander (Beginn bei 2 - 3),
- nach der Zahl folgt der Nach-Nach-Nachfolger (3 - 6), d.h. es werden zwei Zahlen ausgelassen,

Anja Kühnemund, Petra Presun, ・ mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

Auf der Karte mit der ersten Zahl C wechseln sich zwei Schritte ab:
- vier Zahlen folgen direkt aufeinander (Beginn bei 4 - 5 - 6 - 7),
- nach der Zahl folgt die um fünf größere Zahl (7 + 5 = 12), d.h. es werden vier Zahlen ausgelassen,

Auf der Karte mit der ersten Zahl D wechseln sich zwei Schritte ab:
- acht Zahlen folgen direkt aufeinander (Beginn bei 8 ··· 15),
- nach der Zahl folgt die um fünf größere Zahl (15 + 9 = 24), d.h. es werden acht Zahlen ausgelassen,

Auf der Karte mit der ersten Zahl E wechseln sich zwei Schritte ab:
- 16 Zahlen folgen direkt aufeinander (Beginn bei 16 ··· 31).

b) Für alle gilt: die erste Zahl der Karte, also die jeweilige Zweierpotenz, gibt die Anzahl der Zahlen vor, die direkt aufeinander folgen, wie auch die Anzahl der Zahlen, die ausgelassen werden.

Aufgabe 3

Option A: Die vollständige Erweiterung auf 6 Karten:

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
46	57	58	59	60	61	62	63

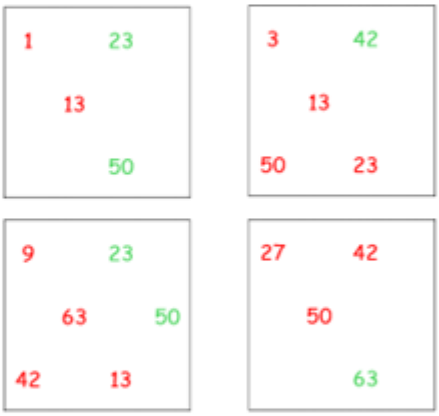
32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Option B: Karten für andere Zahlensysteme
Hier sollen die Schüler:innen erkennen, dass egal welche Basis gewählt wird, die Karten als "Stelle" beibehalten werden können, jedoch die Möglichkeiten der Anzeige pro Stelle entsprechend des gewählten Zahlensystems angepasst werden muss.

Nehmen die Schüler:innen beispielsweise das Tertiärsystem, müssen pro Karte (Stelle) drei Möglichkeiten (0, 1, 2) dargestellt werden.
Variante 1:
0 – Zahl steht nicht auf der Karte
1 – Zahl steht in rot auf der Karte

Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

2 – Zahl steht in grün auf der Karte
Dieses System lässt sich theoretisch beliebig für höhere Zahlensysteme erweitern, wenn man entsprechend mehr Farben nimmt. Es ist aber natürlich zu beachten, dass je höher die Basis, desto unübersichtlicher die
Karten.



Variante 2:
0 – Zahl steht nicht auf der Karte
1 – Zahl steht richtigherum auf der Karte
2 – Zahl steht über Kopf auf der Karte

Diese Variante lässt sich nur begrenzt für höhere Zahlensysteme erweitern. Bis zur Basis 5 wäre noch denkbar:
0 – Zahl steht nicht auf der Karte
1 – Zahl steht richtigherum auf der Karte
2 – Zahl steht über Kopf auf der Karte
3 – Zahl ist um 90°nach rechts gedreht
4 – Zahl ist um 90°nach links gedreht

Für höhere Basen wird es schwer sein, die Lage der Zahlen eindeutig unterscheidbar darzustellen.

Aufgabe 4
Der zu beweisende Satz wäre:
“Natürliche Zahlen können im binären Zahlensystem eindeutig dargestellt werden.”

- Schritt 1: Existenz der Darstellung als Binärzahl
- Schritt 2: Eindeutigkeit

<u>Schritt 1: Existenz</u>
Mit dem folgenden Vorgehen kann jede natürliche Zahl z, die im Dezimalsystem geschrieben wurde, in die Binärdarstellung übertragen werden, am Beispiel der Zahl z=77

Man subtrahiert von der Zahl z die höchste in ihr vorkommende Potenz von 2. An die Stelle dieser Potenz notiert man eine 1 in der Binärdarstellung.	$77 - 2^5 = 77 - 64 = 13$	1 _ _ _ _ _
Als nächstes wird überprüft, ob die nächstkleinere Potenz von 2 subtrahiert werden kann. Fall 1: Ist die Differenz kleiner Null, schreibt man in der Binärdarstellung eine 0 an die entsprechende Stelle. Fall 2: Ist das Ergebnis größer Null, wird die Operation durchgeführt, man schreibt eine 1 an die entsprechende Stelle.	$13 - 2^4 < 0$	1 0 _ _ _ _
Dieses Vorgehen wird fortgesetzt.	$13 - 2^3 = 13 - 8 = 5$	1 0 1 _ _ _
	$5 - 2^2 = 5 - 4 = 1$	1 0 1 1 _ _
	$1 - 2^1 = 1 - 2 < 0$	1 0 1 1 0 _
Das Verfahren endet, sobald die Differenz Null liefert. Gegebenenfalls wird für die restlichen verbleibenden Zweierpotenzen jeweils eine 0 notiert.	$1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$	1 0 1 1 0 1

Dieses Verfahren ist endlich, da jedes Mal eine positive Zahl subtrahiert wird und Ergebnisse < 0 nicht zulässig sind.

Es muss jetzt noch gezeigt werden, dass jede Zweierpotenz maximal einmal vorkommt (denn sonst kämen wir in der Binärdarstellung nicht mit den Ziffern 1 und 0 aus):

- Nach unserem Algorithmus subtrahieren wir immer in jedem Schritt die größtmögliche Zweierpotenz. Es kann demnach nicht möglich sein, dass für einen Rest die Subtraktion einer höheren Zweierpotenz möglich ist als im vorherigen Schritt, sonst hätten wir den Algorithmus verletzt.
- Es könnte also die gleiche Zweierpotenz zweimal vorkommen:

Beweisidee: Widerspruchsbeweis

Annahme: Bei der Überführung einer Zahl von Dezimaldarstellung in Binärdarstellung kommt eine Zweierpotenz zweimal vor, z.B. 2^n muss zweimal hintereinander subtrahiert werden. Das bedeutet, dass es einen vorherigen Teil-Schritt gab, in dem $2 \cdot 2^n$ subtrahiert wurde. Aber: $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, es wurde also im vorherigen Schritt nicht die höchste Zweierpotenz subtrahiert. Das ist ein Widerspruch.
Dieselbe Zweierpotenz kann nicht zweimal nacheinander subtrahiert werden.
Jede Zahl in Binärdarstellung kann mit diesem Verfahren als Binärzahl geschrieben werden.

Schritt 2: Eindeutigkeit
Wir wissen, dass jede Zahl binär geschrieben werden kann, es könnte aber nun sein, dass eine Zahl in Dezimaldarstellung zwei Darstellungen in Binärdarstellung hat.

Beweisidee: Widerspruchsbeweis

Es gibt eine kleinste Zahl n, die zwei verschiedene binäre Darstellungen besitzt:

$$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_k} = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_l}$$

Wobei die Zahlen a_i und b_i die von Null verschiedenen Ziffern der Binärdarstellung sind.
Die Summen sind so angeordnet, dass die Zweierpotenzen absteigend sortiert sind, also: $a_1 > a_2 > \cdots > a_k$ und $b_1 > b_2 > \cdots > b_l$
Es folgt $a_1 \neq b_1$, ansonsten gäbe es für die Zahl $n - 2^{a_k}$ auch zwei binäre Darstellungen, n war ja aber als die kleineste derartige Zahl definiert.
Das bedeutet $a_1 > b_1$ oder umgekehrt. Es reicht in Folge einen Fall zu betrachten, da der andere Fall komplett analog verläuft.
Es gilt:

$$n = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_l}$$

n ist damit auch kleiner als die Binärzahl mit 1 auf jeder der vorkommenden Stellen:

$$n \leq 2^{b_1} + 2^{b_1 - 1} + \cdots + 4 + 2 + 1$$

Mithilfe einer geometrischen Reihe kann das geschrieben werden als:

$$2^{b_1} + 2^{b_1 - 1} + \cdots + 4 + 2 + 1 = 2^{b_1 + 1} - 1$$

Es folgt also:

$$n \leq 2^{b_1+1} - 1$$
$$n < 2^{b_1+1}$$

Mit der Voraussetzung $a_1 > b_1$ ergibt sich:

$$n < 2^{b_1+1} \leq 2^{a_1} \leq n$$

Das bedeutet wir haben $n < n$ gefolgert, und das ist ein Widerspruch.
Dier Annahme war falsch, die Darstellung ist eindeutig.

Für den Beweis allgemeiner Basen empfehlen wir das sehr mathematische PDF der TU Berlin (https://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS05/Programmiermethoden/v3_2.pdf).

Quellen:

- Mathe für kleine Asse

- https://www.youtube.com/watch?v=OkcVk_PGYL4)
- https://www.mathelust.de/das-binaersystem/
- TU Berlin: https://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS05/Programmiermethoden/v3_2.pdf

Ausblick zum Weiterarbeiten: ASCII-Code/ So schreibt der Computer.

Mögliche Aufgabe: Übersetze deinen Namen in ASCII-Code.

USASCII code chart

b_7 b_6 b_5 →					0 0 0	0 0 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1	1 1 0	1 1 1
Bits b_4	b_3	b_2	b_1	Column → Row ↓	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0	0	0	1	1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0	0	1	0	2	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0	0	1	1	3	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0	1	0	0	4	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0	1	0	1	5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0	1	1	0	6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0	1	1	1	7	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1	0	0	0	8	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1	0	0	1	9	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1	0	1	0	10	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1	0	1	1	11	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1	1	0	0	12	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1	1	0	1	13	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1	1	1	0	14	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1	1	1	1	15	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Anja Kühnemund, Petra Presun, ・ mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe