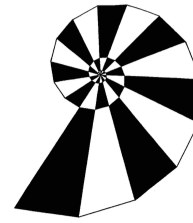


# Schülerzirkel Mathematik



---

Problem des Monats · Oktober 2017

Lösung + weiterführende Fragen

---

1)

Tage	Anzahl der fallenden Blätter
1	3
2	9
3	$9+6=15$
4	$15+6=21$
5	$21+6=27$
6	$27+6=33$
7	$33+6=39$
8	$39+6=45$
9	$45+6=51$
10	$51+6=57$

Die Anzahl der fallenden Blätter wird jeden Tag um 6 größer, d.h. man kann die rekursive Vorschrift dieser Zahlenfolge mit  $a_{n+1} = a_n + 6$  und  $a_1 = 3$  angeben.

Um die explizite Form zu erhalten, muss eigentlich nur beachtet werden, dass es einen Anfangswert gibt, zu dem immer ein Vielfaches von 6 dazu addiert wird:  $A(n) = 6n - 3$ , also fallen am 30. Tag 177 Blätter, da  $A(30) = 177$  ist.

b)

Tage	Gesamtzahl der gefallenen Blätter
2	$3+9=12$
4	$12+15+21=48$
10	$48+27+33+39+45+51+57=300$

Hierzu eine Formel zu finden, ist schon etwas kniffliger.

Variante 1) Die Schüler erkennen, dass die Anzahl der gefallenen Blätter jeweils das Dreifache vom Quadrat des jeweiligen Tages ist:  $S(n) = 3 \cdot n^2$ , z.B.  $2^2 \cdot 3 = 12$ . Das ist natürlich nicht offensichtlich, aber durch Ausprobieren und Herantasten durchaus möglich.

Variante 2) Die Schüler nutzen das Wissen über die Gaußsche Summenformel. Dabei addieren sie natürlich nicht aufeinander folgende natürliche Zahlen und fügen den Wert für den ersten Tag auch erst zum Schluss hinzu, aber die Strategie lässt sich hier trotzdem anwenden:

$$S(n) = \frac{(A_2 + A_n)}{2} \cdot (n - 1) + 3$$

Damit ermittelt man die Gesamtzahl der gefallenen Blätter nach 30 Tagen:

$$S(30) = 3 \cdot 30^2 = 2700 \text{ bzw. } S(30) = \frac{186}{2} \cdot 29 + 3 = 2700$$

### Weiterführende Fragen / Anregungen:

- arithmetische Zahlenfolgen vertiefen sowie auf die beiden Bildungsvorschriften (rekursiv und explizit) eingehen
- geometrische Zahlenfolgen (z.B. ein Baum verliert jeden Tag die Hälfte seiner Blätter...) einführen
- Variation der Aufgabe durch Schüler
- die Geschichte des Carl Friedrich Gauß ausführlicher betrachten, auch an anderen Beispielen
- Summenschreibweise
- Darstellungsformen: Die gefallenen Blätter als Balkendiagramme (und Fläche deuten)
- Grenzwert bei Zahlenfolgen
- ...