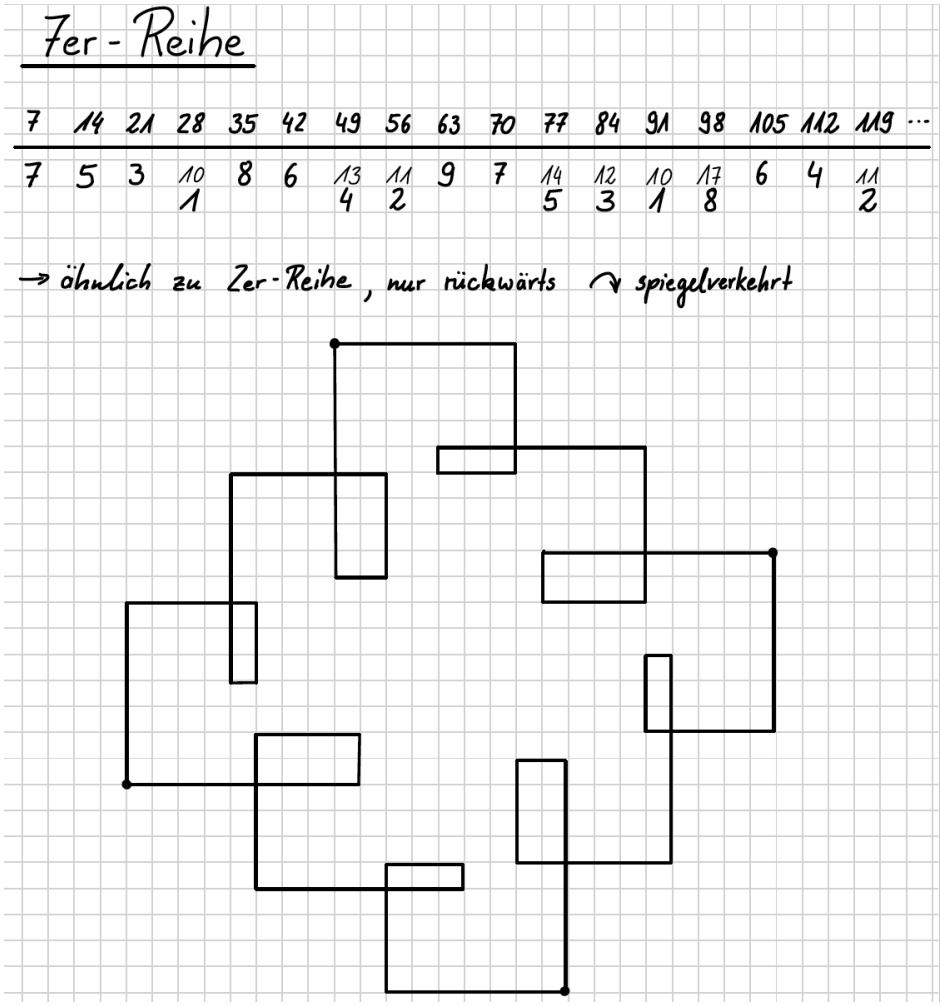
Lösungen und Hinweise:

Aufgabe 1

Das Orthodalas der 7er Reihe bildet nach 4 Durchgängen eine geschlossene, drehsymmetrische und punktsymmetrische Figur.



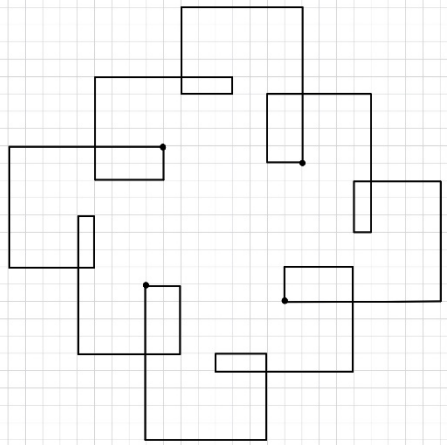
Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

Aufgabe 2

2er-Reihe

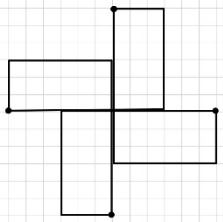
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6	8	10 1	3	5	7	9

38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72 ...
11 2	4	6	8	10 1	12 3	5	7	9	11 2	13 4	6	8	10 1	12 3	14 5	7	9 ...



3er-Reihe

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	...
3	6	9	3	6	9	3	6	9	3	6	9	12 3	6	9	12 3	6	...

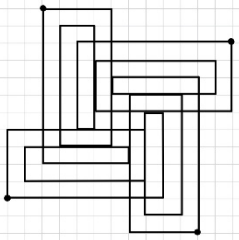


4er-Reihe

4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
4	8	3	7	2	6	10 1	5	9	4	8	12 3	7	11 2	6	10 1	14 5

72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	...
9	13 4	8	12 3	16 7	11 2	15 6	1	5	9	4	8	3	7	11 2	6	...

→ wie 5er-Reihe, nur rückwärts ↷ spiegelverkehrt

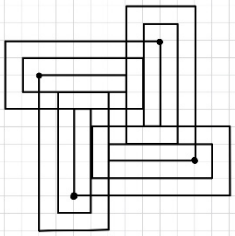


Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

5er-Reihe

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
5	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10 1	6	11 2	7	12 3	8	13 4

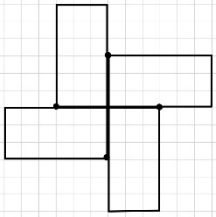
90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	...
9	14 5	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10 1	6	11 2	7	12 3	8	...



6er-Reihe

6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	...
6	3	9	6	3	9	6	12 3	9	6	12 3	9	15 6	12 3	9	15 6	

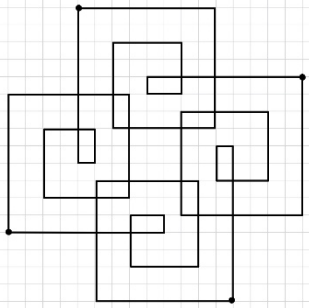
→ wie 3er-Reihe, nur rückwärts ↷ spiegelverkehrt



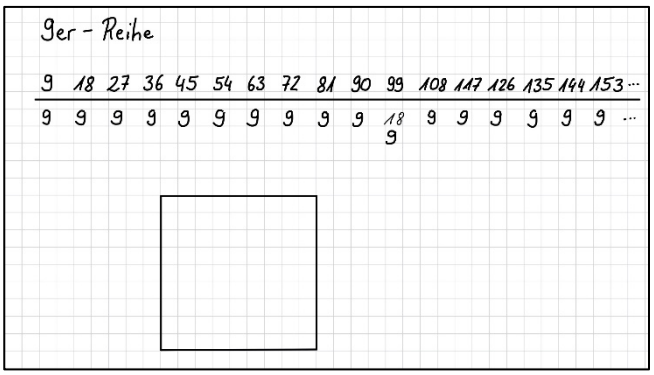
8er-Reihe

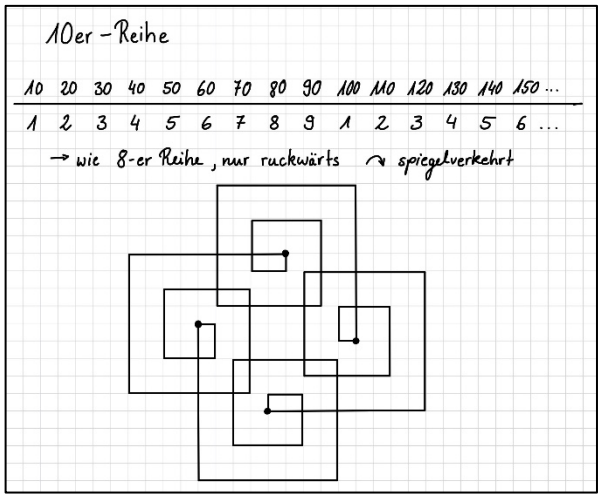
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136
8	7	6	5	4	12 3	11 2	10 1	9	8	16 7	15 6	5	4	3	11 2	10 1

144	152	160	168	176	184	192	200	208	216	224	232	...
9	8	7	15 6	14 5	13 4	12 3	2	10 1	9	8	7	...



Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe





- Es gibt grundsätzlich Quersummenreihen mit den Periodenlängen 9, 3 oder 1.
- Alle Figuren sind geschlossen und zwar nach 4 Durchgängen der jeweiligen Periodenlänge. Die Figuren bestehen also aus 4, 12 bzw. 36 Strecken, die sich zum Teil schneiden und überlappen.
- Die jeweils neunte Quersumme der Reihe n stammt aus den Quersummen der 9er Reihe und diese sind alle 9.

Begründung mittels der Teilbarkeitsregel rückwärts: Eine Zahl, die durch 9 teilbar ist, hat die Quersumme 9:

Beweis der Teilbarkeitsregel 9.

Vorüberlegung: Zehnerpotenzen haben beim Dividieren mit 9 immer den Rest 1.

$10^0 : 9 = 0\ Rest\ 1$	$10^0 = 9 \cdot 0 + 1$
$10^1 : 9 = 1\ Rest\ 1$	$10^1 = 9 \cdot 1 + 1$
$10^2 : 9 = 11\ Rest\ 1$	$10^2 = 9 \cdot 11 + 1$
$10^3 : 9 = 111\ Rest\ 1$	$10^3 = 9 \cdot 111 + 1$
…	…

Kurz: $10^k \equiv 1\ (mod\ 9)$

Eine n-stellige Zahl z mit den Ziffern a_i kann im Dezimalsystem wie folgt ausgedrückt werden (a_0 sind die Einer 10^0):

$$z = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot 10^i = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot (9 \cdot c_i + 1)$$

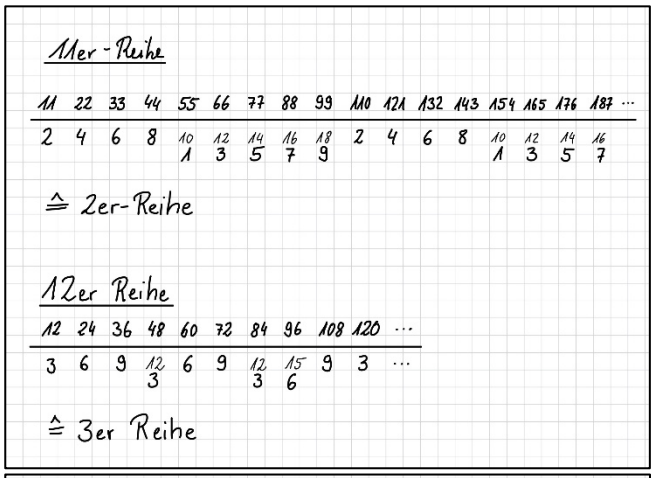
$mit\ c_i = 0, 1, 11, 111, \ldots$ aus obiger Überlegung. Dann weiter umformen.

$$z = 9 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot c_i + \sum_{i=0}^{k-1} a_i$$

Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

- Der zweite Summand ist eine Beschreibung für die Quersumme von z: $Q(z) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i$
- Der erste Summand enthält unabhängig von den Ziffern a_i und den Zahlen c_i immer den Faktor 9.
- z ist also durch 9 teilbar, wenn auch die Quersumme Q(z) durch 9 teilbar ist. Die iterierte Quersumme von z gibt zudem direkt den Rest bei der Division mit 9 an.
  Es gilt $z \equiv Q(z) \ (mod\ 9)$.

Aufgabe 3



11er-Reihe

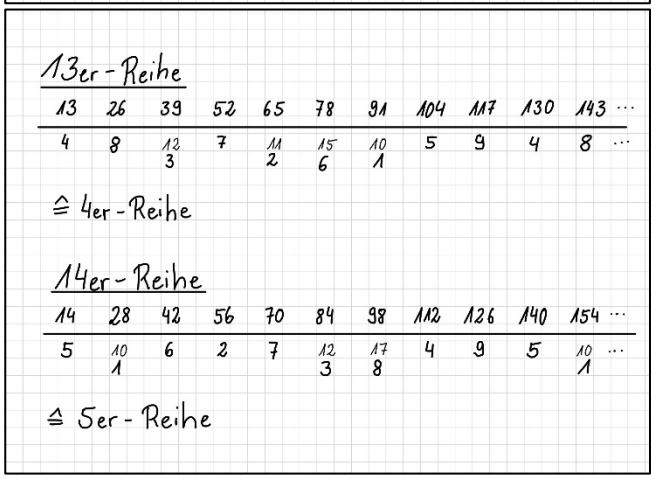
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	2	4	6	8	10	12	14	16	
				1	3	5	7	9					1	3	5	7	

≙ 2er-Reihe

12er Reihe

12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	...
3	6	9	12	6	9	12	15	9	3	...
			3			3	6			

≙ 3er Reihe



13er-Reihe

13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	...
4	8	12	7	11	15	10	5	9	4	8	...
		3		2	6	1					

≙ 4er-Reihe

14er-Reihe

14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	...
5	10	6	2	7	12	17	4	9	5	10	...
	1				3	8				1	

≙ 5er-Reihe

...

Aufgabe 4

Die Längen sind $4 \cdot 9 = 36$,
$4 \cdot (3 + 6 + 9) = 4 \cdot 18 = 72$ oder
$4 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 4 \cdot 45 = 180$.

Alle Längen haben zudem die Quersumme
$Q(36) = Q(72) = Q(180) = 9$

Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

Bonusaufgabe:

Leo Moser (1921–1970) war Mathematiker und ein ausgezeichneter Schachspieler, Magier und Erfinder von Denksportaufgaben. 1950 veröffentlichte er in der Zeitschrift »Scripta Mathematica« ein hübsches Quersummenrätsel:[1]

Bestimme die Quersummen aller Zahlen von 1 bis 1.000.000.

Lösung:

- man nimmt zusätzlich zu den Zahlen von 1 bis 1 000 000 noch die 0 hinzunimmt, die ja die Summe nicht verändert
- man schreibt die Liste der Zahlen zweimal nebeneinander, einmal von 0 bis 999 999 und einmal von 999 999 bis 0
- 1 000 000 wird erst zum Schluss betrachtet

000000	999999
000001	999998
000002	999997
000003	999996
000004	999995
…	…

- Quersumme jedes Zahlenpaares ist immer 54
- Die beiden Reihen haben also die Gesamtquersumme von 1 000 000 · 54
- eine Reihe folglich von 27 000 000
- die Quersumme von 1 000 000 muss addiert werden
- man erhält **27 000 001**

[1] Quelle: https://www.spektrum.de/raetsel/was-ist-die-summe-der-quersummen-aller-zahlen-von-1-bis-1-000-000/1917565