Lösungshinweise

Das **Invarianzprinzip** bezeichnet die Methode, bei einer Folge von Veränderungen eine Größe oder Eigenschaft zu finden, die sich dabei nie ändert.
Indem man Anfangs- und Zielzustand mit Blick auf diese Invariante vergleicht, kann man sofort erkennen, ob ein Ziel erreichbar ist oder ausgeschlossen werden kann.

Didaktischer Hinweis: Je nach Gruppe kann man auch direkt mit Aufgabe 2 statt Aufgabe 1 starten. Der Begriff Invariante aus Aufgabe 1 sollte dann an geeigneter Stelle eingeführt werden.

Aufgabe 1:
Fragestellung: Kann man überall +1 erreichen?

c) Invarianten:

- Parität der Gesamtsumme: Dreht man drei Vorzeichen, ändert sich die Summe immer + 2, -2, +6 oder -6 → Die Summe bleibt stets gerade oder ungerade.
- Parität der negativen Ecken: Jede erlaubte Drehung betrifft entweder 0 oder 2 Ecken. → Die Anzahl der negativen Ecken bleibt in der Parität invariant.

Lösungsideen:

a) mit einer −1 in der Mitte:
Startsumme = 7 (ungerade), Zielsumme (alle +1) = 9 (ungerade) → Parität passt.
Ecken: Start = 0 negativ (gerade), Ziel = 0 negativ (gerade) → passt.
→ Ziel ist erreichbar

mögliche konkrete Zugfolge:

Zug 1 – linke Hauptdiagonale (1,1),(2,2),(3,3) drehen

-1	1	1
1	1	1
1	1	-1

Zug 2 – rechte Hauptdiagonale (1,3),(2,2),(3,1) drehen

-1	1	-1
1	-1	1
-1	1	-1

Zug 3 – mittlere Zeile (Zeile 2) drehen

-1	1	-1
-1	1	-1
-1	1	-1

Zug 4 – linke Spalte (Spalte 1) drehen

1	1	-1
1	1	-1
1	1	-1

Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
https://bildungsserver.hamburg.de/schulfaecher/mint/mathematik/schuelerzirkel-mathematik

Zug 5 – rechte Spalte (Spalte 3) drehen

1	1	1
1	1	1
1	1	1

b) mit einer −1 in einer Ecke:
Start: Summe = 7 (ungerade), Zielsumme = 9 (ungerade) → Parität passt.
Ecken: Start = 1 negativ (ungerade), Ziel = 0 negativ (gerade) → Widerspruch.
→ Ziel ist unmöglich.

Didaktische Hinweise:

- Mit der ersten Invariante (Gesamtsumme) können die Schüler:innen sofort erkennen: „Wenn die Parität nicht passt, ist das Ziel ausgeschlossen."
- Mit der zweiten Invariante (Ecken) erleben sie, dass die erste Invariante manchmal nicht ausreicht. Obwohl die Parität der Gesamtsumme passt, verhindert eine andere Invariante das Ziel. Das ist eine wertvolle Einsicht: Eine Invariante liefert eine notwendige Bedingung, aber nicht immer eine hinreichende.

Aufgabe 2:
Regel: Zwei Körbe −1, dritter Korb +2.

Invarianten bei der Verteilung (5,7,3):

- Gesamtzahl der Kleidungsstücke bleibt gleich.
  → Startsumme und Endsumme sind identisch.
- Parität der Anzahl ungerader Körbe bleibt gleich.
  → Durch jeden Zug wechseln genau zwei Körbe ihre Parität, der dritte bleibt. Damit bleibt die Zahl der „ungeraden Körbe" gerade oder ungerade.
- Modulo-3-Invariante:
  - Das Muster der Reste beim Teilen der Anzahl an Kleidungsstücken in jedem Korb durch 3 bleibt gleich.
  - Bei jedem Zug (−1,−1,+2) ändern sich diese Reste so, dass die Abstände zwischen den Körben modulo 3 gleich bleiben.
  - Das bedeutet: Wenn zwei Reste gleich waren und einer verschieden → bleibt so.
    Wenn alle drei Reste gleich waren → bleibt so.
    Wenn alle drei Reste verschieden waren → bleibt so.

a) Analyse der Startverteilung:

- (5,7,3)→ Ziel: (15,0,0):
  - Parität „ungerader" Körbe ist am Anfang und Ende gleich → Ziel möglich.
  - Startreste: 5:3=1 Rest 2 → wir sagen: 5≡2 (mod3)
    7:3=2 Rest 1 → also 7≡1 (mod3)
    9:3=3 Rest 0 → also 9≡0 (mod3)
    → alle Reste sind unterschiedlich.
    Ziel: (15,0,0): 15 ≡ 0, 0 ≡ 0, 0 ≡ 0 → Reste sind alle gleich.
    → Widerspruch! → Ziel unmöglich.

b) Sollte die Aufgabe zu offen sein, kann man weitere Verteilungen und insbesondere eine, bei der das Ziel erreicht werden kann, vorgeben.

- (4,6,2) → Ziel (12,0,0):
  - Parität „ungerader" Körbe ist am Anfang und Ende gleich → Ziel möglich.
  - Reste: 4 ≡ 1, 6 ≡ 0, 2 ≡ 2 → alle unterschiedlich.

Ziel (12,0,0): $12 \equiv 0$, $0 \equiv 0$, $0 \equiv 0$ → alle gleich.
→ Widerspruch → Ziel unmöglich.

- (1,1,0) → Ziel (0,0,2):
  - Parität „ungerader“ Körbe ist am Anfang und Ende gleich → Ziel möglich.
  - Reste: $1 \equiv 1$, $1 \equiv 1$, $0 \equiv 0$ → zwei gleich, einer davon verschieden
    Ziel: (0,0,2): $2 \equiv 2$, $0 \equiv 0$, $0 \equiv 0$ → zwei gleich, einer davon verschieden
    → Ziel möglich.

- (4,7,1) → Ziel (12,0,0):
  - Parität „ungerader“ Körbe ist am Anfang und Ende gleich → Ziel möglich.
  - Reste: $4 \equiv 1$, $7 \equiv 1$, $1 \equiv 1$ → alle gleich.
    Ziel: $12 \equiv 0$, $0 \equiv 0$, $0 \equiv 0$ → alle gleich.
    → Ziel möglich.

  Beispielzugfolge:
  (4,7,1)→(3,6,3)→(2,8,2)→(1,10,1)→(0,12,0).

c) und **d)** Individuelle Antworten auf Basis des Invarianzprinzips.

Didaktische Hinweise:
- Die Modulo-3-Erklärung kann mit Alltagsworten eingeführt werden: „Schau nicht auf die Zahl selbst, sondern nur auf den Rest beim Teilen durch 3.“
- Über die Betrachtung der Parität von Summen gerader und ungerader Zahlen, kann man zeigen, dass die Anzahl der ungeraden Körbe im Start immer dieselbe Parität (gerade oder ungerade) wie im Zielzustand (S,0,0) hat, wobei S die Gesamtanzahl der Kleidungsstücke ist.
- Hier ist Raum für eigene Aufgabenstellungen, wodurch die Schüler:innen zeigen, dass sie das Prinzip verstanden haben.

Aufgabe 3:
Mögliche Schüler:innen-Antworten:
- Das Invarianzprinzip heißt: „Etwas bleibt bei allen Zügen gleich.“
- Es hilft, Aufgaben zu lösen, indem man Anfang und Ziel vergleicht: Wenn die Invariante nicht passt, ist das Ziel unmöglich.

Formuliert als allgemeines Prinzip:
- Wenn bei jedem erlaubten Schritt eine bestimmte Eigenschaft gleich bleibt,
  dann kann sich diese Eigenschaft zwischen Start- und Endzustand nicht ändern. Wenn sie sich doch ändern müsste, ist der Endzustand unmöglich.
- Drei-Schritte-Erklärung:
  1. Finde heraus, was sich nie ändert (z. B. Summe, Parität, Differenz, Farbe, Position).
  2. Überprüfe den Anfangszustand.
  3. Vergleiche mit dem Ziel:
     - Wenn die Invariante verletzt würde → Ziel unerreichbar.
     - Wenn die Invariante erfüllt bleibt → Ziel möglicherweise erreichbar.

Didaktische Hinweise:
- Ziel dieser Reflexion ist die Begriffsbildung durch eigene Worte.
- Man sollte Schüler:innen hier nicht nur Ergebnisse abfragen, sondern Definitionen sammeln, vergleichen und gemeinsam präzisieren.

Quellen (mit weiteren Aufgaben zum Invarianzprinz):

- https://www.mathematische-begabung.de/userfiles/downloads/kap3/3_3_4_Invarianzprinzip.pdf
- https://epub.uni-bayreuth.de/id/eprint/3848/1/Problemloesen_Beweisen.pdf
- https://www2.informatik.hu-berlin.de/~koessler/Proseminar/Proseminar2018/Hanke-Guo_invarianz_extremal.pdf
- ChatGPT-Prompt: Erstelle mir eine komplexe Aufgabe mit dem Schwerpunkt Invarianzprinzip. Beginne mit einem einfach zugänglichen Beispiel, an dem der Begriff Invarianz und seine Bedeutung erklärt wird. Ich fand am verständlichsten eine Anordnung von positiven und negativen Einsen und der Regel, horizontal oder diagonal das Vorzeichen zu ändern. Danach möchte ich eine weitere Entdeckungsaufgabe zum Invarianzprinzip mit Ferienbezug und der Aufforderung, Spielzüge zu machen und zu schauen was hier unverändert bleibt, um dann entsprechend zu lösen. Es soll sich auch eine Aufgabe selber ausgedacht werden. Die komplexe Aufgabe sollte so gestaltet sein, dass sie auch ohne Lehrkraft bearbeitbar ist, d.h. Erläuterungen von Begriffen müssen mit eingebaut sein.