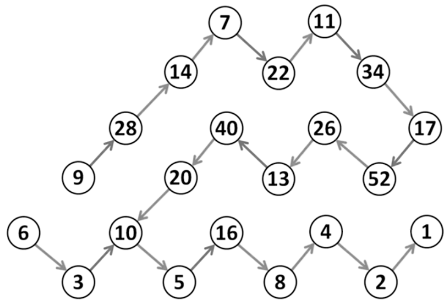
Problem des Monats ・Oktober 2025

Lösungshinweise

Aufgabe 1: Spielfeld

Man kann die Zahlen auf viele verschiedene Weise anordnen, und die Schüler:innen werden anfangs probierend/zufällig vorgehen. Es ist sinnvoll, sie zu ermutigen, auch geordnetere Darstellungen zu wählen (z.B. je gleiche Pfeile für :2 und ·3+1 oder baumartig), weil das Erkenntnis-Ansätze für die Muster und kreative Darstellungen bringt. Rechts eine kompakte Darstellung:

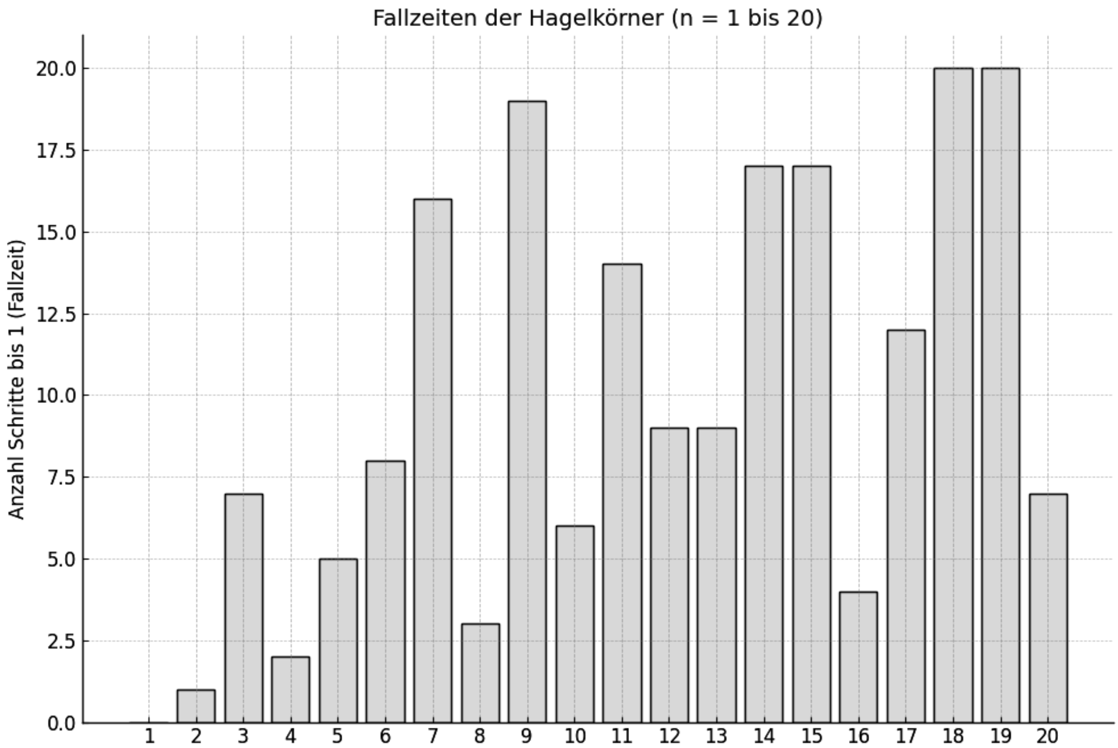


Aufgabe 2: Forschung

Hier sollten erst mal Zahlen-Ketten aufgeschrieben werden. Hier können sich die Schüler*innen die Arbeit teilen und dabei schon feststellen, dass manche Zahlen lange brauchen, um zur 1 zu kommen und das bei anderen recht schnell geht.

Bsp.: 3→10→5→16→8→4→2→1, also 7 Schritte; 4→2→1, also 2 Schritte;
5→16→8 ... , also 5 Schritte.

Eine übliche Darstellung ist ein Säulendiagramm. Ein Balkendiagramm passt natürlich auch, und ein Graph eher nicht, weil die *x*-Werte ja natürlich also diskret sind.



Die Schülerinnen werden sehen: 1, 2, 4, 8, 16 fallen sehr schnell, denn das sind alles Zweierpotenzen. 9, 18, 19, 25 fallen dagegen mit 18–23 Schritten deutlich langsamer,

Anja Kühnemund, Petra Presun, ・ mathezirkel.hamburg@gmail.com
https://bildungsserver.hamburg.de/schulfaecher/mint/mathematik/schuelerzirkel-mathematik

wobei nicht klar ist, warum gerade diese Zahlen betroffen sind. Erste Hypothesen wären also: Es wird immer wieder Ausreißer geben – also einzelne Zahlen, die besonders lange brauchen – und für manche Zahlen könnte es Muster geben, warum sie so schnell fallen.
Bei der Recherche sollten die Schüler:innen herausfinden, dass die Collatz-Vermutung ein faszinierendes mathematisches Rätsel ist. Sie ist nach dem deutschen Mathematiker Lothar Collatz (1910–1990) benannt, der sie 1937 zum ersten Mal formulierte: Egal mit welcher positiven ganzen Zahl man anfängt – man kommt immer irgendwann bei 1 an. Obwohl das Problem sehr alt ist und unglaublich einfach aussieht, konnte es bis heute niemand vollständig lösen. Die beiden simplen Regeln führen zu erstaunlich komplizierten Zahlenwegen, und ein allgemeiner Beweis fehlt bis heute. Viele Mathematiker:innen – auch einige der berühmtesten – haben sich daran versucht. Der bislang weitreichendste Ansatz stammt von Terence Tao (*1975), einem ehemaligen mathematischen Wunderkind und jüngsten Gewinner der Internationalen Mathematik-Olympiade.
Die Collatz-Vermutung gehört heute zu den bekanntesten offenen Problemen der Mathematik. Weil sie so leicht zu verstehen ist, wird sie manchmal als „Rätsel für alle Menschen" bezeichnet. Es gibt sogar Preisgelder, die für einen Beweis ausgesetzt wurden – das aktuell höchste stammt von einem japanischen Unternehmen und beträgt 120 Mio. Yen (etwa 1 Mio. Euro).

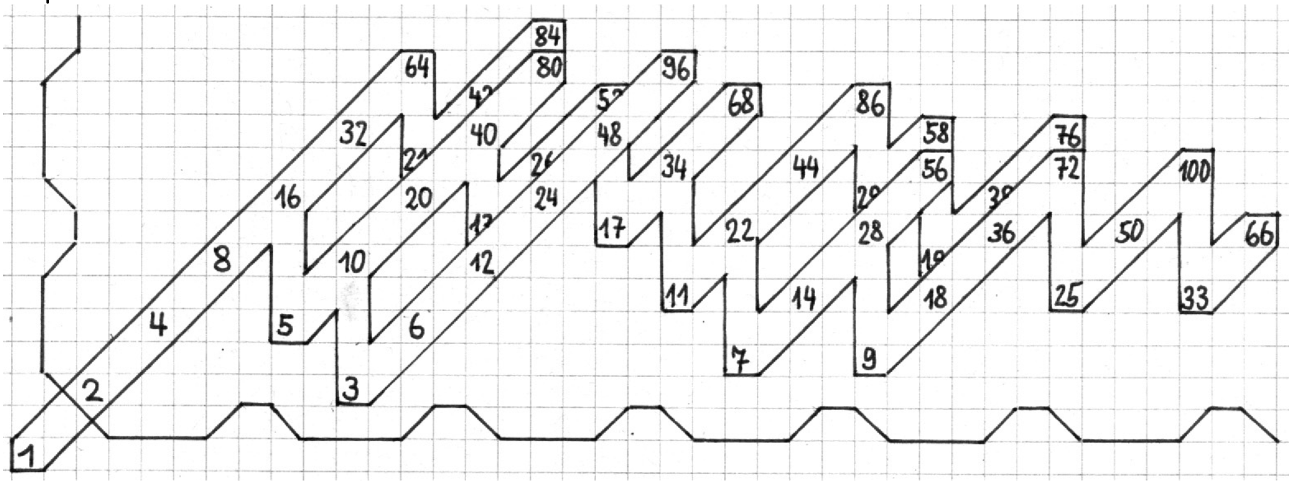
Aufgabe 3: Andere Welten
Wenn man die zweite Regel abändert in $3 \cdot n - 1$, landen viele Zahlen nicht bei 1, sondern in Zyklen. Ein Beispiel ist die Schleife 5 → 14 → 7 → 20 → 10 → 5.
Es gibt viele solcher, zum Teil langen, Schleifen. Hier zeigt sich, dass die Collatz-Vermutung nicht gilt. Das Verhalten ist nicht konvergent, sondern periodisch – vergleichbar mit chaotischen Systemen.
Ändern wir die Regel in „wenn durch 3 teilbar, teile durch 3, sonst rechne $2 \cdot n + 1$", dann verhalten sich die Zahlen deutlich explosiver als bei der ursprünglichen Regel, weil sie viel häufiger vergrößert werden. Hier ist zu vermuten, dass die Collatz-Vermutung nicht gilt, auch wenn dies bislang nicht bewiesen ist. Wahrscheinlich gibt es Zahlen, die nie auf 1 kommen, und andere, die Zyklen entwickeln.
Noch „explosiver" wird das System mit Regeln wie „wenn durch 5 teilbar, teile durch 5, sonst $4 \cdot n + 1$" oder „wenn durch 7 teilbar, teile durch 7, sonst $5 \cdot n + 1$". In diesen Fällen schnellen viele Zahlen exponentiell in extreme Höhen – im Hagelbild gesprochen: Sie schießen nach oben aus der Wolke heraus. Auch hier gibt es keinen exakten mathematischen Beweis, aber Computersimulationen deuten sehr stark darauf hin, dass die Collatz-Vermutung nicht gilt.
Diese unterschiedlichen Szenarien erinnern an die kosmologischen Modelle von Alexander Friedmann (1888–1925):

- das Universum dehnt sich unendlich aus (Wärmetod),
- es fällt wieder in sich zusammen (Big Crunch),
- es nähert sich einem Gleichgewicht oder entwickelt sich in Zyklen (Rebound).

In Verbindung mit der Viele-Welten-Theorie von Hugh Everett III (1930–1982) wird deutlich, dass die Vorstellung verschiedener „mathematischer Universen" nicht bloß Fantasie ist, sondern in der Wissenschaft ernsthaft diskutiert wird.

Extra: Hagelkorn-Computer-Kunst
Hier ist eine Seite, wo man in einem Kreis verzweigte "Collatz-Bäume" visualisieren kann: https://t1p.de/77jaz oder https://www.jasondavies.com/collatz-graph/

Hier eine, wo es eher "Collatz-Korallen" werden, hier eher kleinere und mit Zahlen: https://t1p.de/c639p oder https://christosci.github.io/collatz-tree/
Und hier das ganze ohne Zahlen, aber in groß und schön:
https://t1p.de/jz5u6 oder https://tools.opencurve.info/collatzconjecture/collatz-harriss.html?#graph
Und vielleicht bringt die erste Aufgabe in Kombination mit diesen Computer-Generierungen die zeichenfreudigen Schüler:innen auf die Idee, das auch per Hand zu probieren. Hier die Inspiration dazu:



Wenn man die gegebenen Programme in Python und Scratch ausprobiert, bietet es sich an, sie an die Paralleluniversen anzupassen. Das ist nicht einfach, weil man sich geeignete Abbruchbedingungen überlegen muss.

Python:
https://l.fobizz.com/collatz

bzw.
https://app.fobizz.com/file_sharing/public_files/b4ee1baf-f025-4360-9cf2-e4ccce802fd7?token=c5ccf77ed9d1f0f19bcf18d2c1ec9467

Scratch:
https://l.fobizz.com/collatz-scratch
bzw.
https://app.fobizz.com/file_sharing/public_files/556a5af4-6192-4554-a741-afee5262001a?token=8982ca9d4b068cc5dababcdbba63e6cd

Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
https://bildungsserver.hamburg.de/schulfaecher/mint/mathematik/schuelerzirkel-mathematik