Projektaufgabe 1

Aufgabe Possum-Population

Grundlage für diese Aufgabe ist das Populationsmodell einer speziellen Possum-Art, wie es ab Seite 5 im G2-Lernheft beschrieben wird.

a) Vergleichen Sie dieses Populationsmodell mit den Ihnen bekannten Wachstumsmodellen aus der Analysis.

b) Versuchen Sie, obiges Populationsmodell mit einer geeigneten Funktion zu beschreiben.

Projektaufgabe 2

Aufgabe Kaninchen

Der erste Teil der folgenden Aufgabe stammt aus dem „Liber abaci“ (1202), verfasst von LEONARDO VON PISA, besser bekannt unter FIBONACCI. Dort steht:
„Jemand setzte ein Kaninchenpärchen in einen gewissen Ort, der allseits mit Wänden umgrenzt war. Man wünscht zu wissen, wie viele Nachkommen dieses Paares in einem Jahr erzeugt werden. Dabei seien sie so beschaffen, dass sie in jedem Monat ein neues Paar erzeugen; und ab dem zweiten Monat nach ihrer Geburt sind auch die jungen fruchtbar.“
Frei übersetzt ist das etwa:

Ein erwachsenes Kaninchenpaar wirft pro Monat ein Paar Junge.
Das junge Paar ist nach einem Monat erwachsen, es wirft also nun ebenfalls pro Monat ein Paar Junge.

<u>Auftrag 1</u>

Ermitteln Sie, wie viele erwachsene und junge Kaninchenpaare es nach einem Jahr (nach n Monaten) gibt, wenn zu Beginn des Jahres ein erwachsenes Kaninchenpaar vorhanden ist und die Kaninchen nicht sterben.

<u>Auftrag 2</u> (Eingriff von außen)

Ab dem 5. Monat sollen in jedem Monat vier erwachsene Kaninchenpaare verkauft werden.

- Ändern Sie Ihr Modell von Auftrag 1 entsprechend ab.
- Überlebt das die Population?
  Experimentieren Sie mit der zu verkaufenden Anzahl von Kaninchenpaaren, aber auch mit dem Startmonat.

<u>Auftrag 3</u> (Langzeitverhalten)

Kenntnisse über das Langzeitverhalten, die direkt aus der Populationsmatrix gewonnen werden können, haben den Vorteil, die Auswirkungen von einzelnen Veränderungen sofort zu sehen.
Stellen Sie die Wertetabelle der erwachsenen und der jungen Kaninchenpaare in einem x-y-Koordinatensystem dar. Was stellen Sie fest?
Versuchen Sie, Ihre Erkenntnisse mit geeigneten mathematischen Mitteln zu beschreiben.

Lösungshinweise zur Projektaufgabe 1:

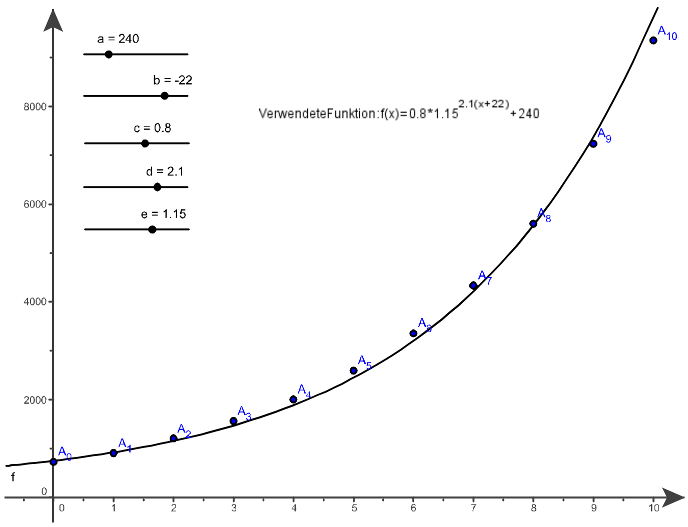
a) Vergleich der Populationsmodelle

Modelle der linearen Algebra	Wachstumsmodelle der Analysis
• Unterteilung der Population in Altersstufen *Dazu sind Kenntnisse zu den Übergängen zwischen den Stufen notwendig.* • Diskrete Berechnung in Zeittakten (, die oft den Altersstufen entsprechen) • Überführung in Modell der Analysis prinzipiell möglich *das stetige Modell basiert auf den Daten in den vorliegenden Zeittakten*	• Entwicklung der Gesamtzahl wird mit stetiger Funktion beschrieben • Gesamtzahl zu jeder Zeit berechenbar • Beschreiben von Eigenschaften mit den Mitteln der Analysis

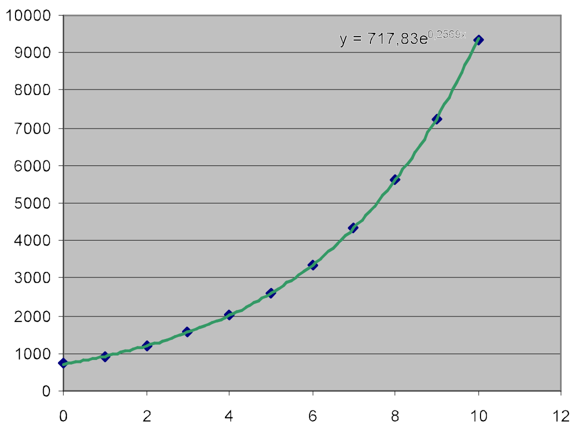
b) Beschreibung der Possum-Population mit geeigneter Funktion

(i) Probieren mit geeignet erscheinenden Funktionsklassen, z.B. Exponentialfunktionen, Parabeln.

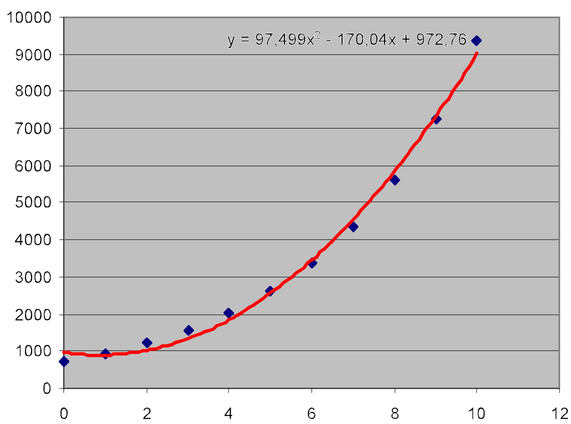
Beispiel mit $f(x) = c \cdot e^{d \cdot (x-b)} + a$, wobei a, b, c, d und e über Schieberegler einstellbar sind (siehe dazu die Geogebra-Arbeitsblätter *Possum_exp1.ggb*, *Possum_exp2.ggb* und *Possum_par.ggb*)



(ii) Berechnen von Trendlinien in Excel (siehe Excel-Datei *Possum.xls*)



Trendlinie exponentiell



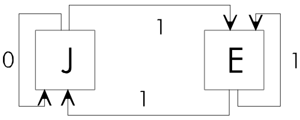
Trendlinie polynomisch

(Siehe auch Derive-Datei „Possum.dfw“)

Lösungshinweise zur Projektaufgabe 2:
(Dateien *Kaninchen.xls* und *Kaninchen.dfw*)

Auftrag 1

Entwicklung der jungen Tiere: $J_{n+1} = E_n$
Entwicklung der erwachsenen Tiere: $E_{n+1} = E_n + J_n$



Populationsmatrix: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, Startpopulation: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Population nach 1 Monat: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ... nach 1 Jahr (12 Monaten): $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 \\ 233 \end{pmatrix}$

Population nach n Monaten kann z.B. in Derive als Funktion definiert werden: $f(n) = M^n \cdot \vec{s}$.

Die Tabelle gibt die Populationswerte bis zum 12. Monat an:

Jungtiere	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
erwachsene Tiere	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Auftrag 2

Entwicklung der jungen Tiere: $J_{n+1} = E_n$
Entwicklung der erwachsenen Tiere: $E_{n+1} = E_n + J_n$ für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$
$E_{n+1} = E_n + J_n - 4$ für $n \geq 4$

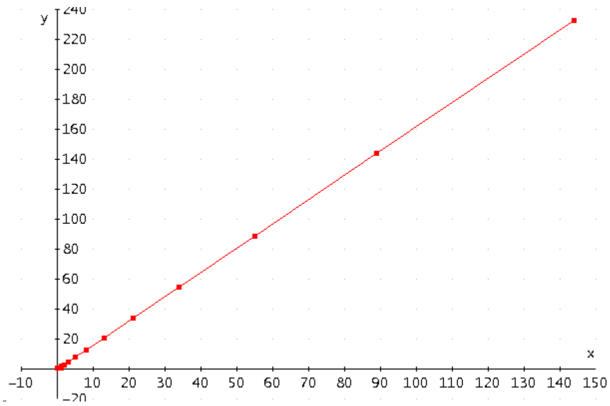
Verkauf ab 5. Monat von 4 Kaninchen – Population erholt sich wieder:

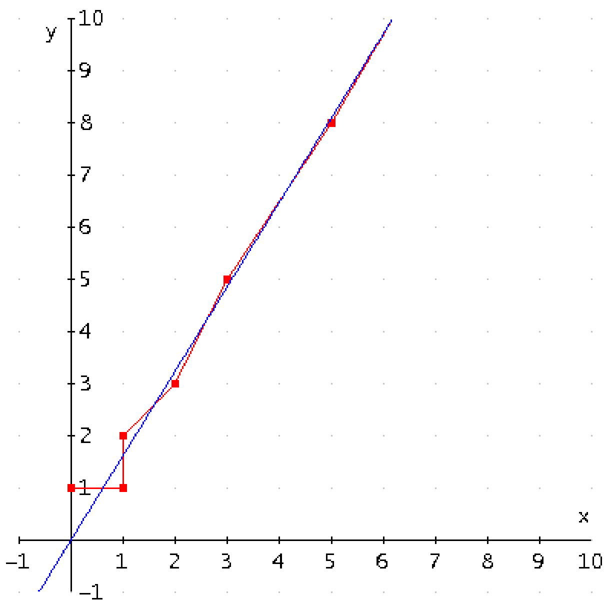
Jungtiere	0	1	1	2	3	5	4	5	5	6	7	9	12
erwachsene Tiere	1	1	2	3	5	4	5	5	6	7	9	12	17

Verkauf von 5 Kaninchen *(mehr als die Hälfte)* ab dem 5. Monat ⇒ Population überlebt dies nicht:

Jungtiere	0	1	1	2	3	5	3	3	1	~~-1~~	~~-5~~	~~-11~~	~~-21~~
erwachsene Tiere	1	1	2	3	5	3	3	1	~~-1~~	~~-5~~	~~-11~~	~~-21~~	~~-37~~

Auftrag 3





Es sieht so aus, als näherten sich die Punkte einer Ursprungsgeraden. Die Gleichung dieser vermuteten Asymptote erhält man z.B. näherungsweise durch den Punkt (144|233), nämlich (gerundet) $a(x) = 1{,}618 \cdot x$. Der rechts abgebildete Ausschnitt lässt eine gute Konvergenz erwarten.

Was aber bedeutet es, wenn bis auf wenige Anfangspunkte die Populationsvektoren (fast) auf der Asymptote liegen? Für diese Vektoren $(x|y)$ gilt dann $y = 1{,}618\,x$, jeder Vektor hat damit die Form $x \cdot (1|1{,}618)$. Daraus folgt, dass die Anzahl der Jungtiere und der erwachsenen Tiere einem festen Verhältnis immer näher kommt. Obwohl die Populationszahlen über alle Grenzen wachsen, kann die Population in ihrem Langzeitverhalten durch das feste Verhältnis der beiden Altersgruppen zueinander charakterisiert werden.

Leistungskurs

Langzeitverhalten: Konvergenz · Prognose

Vektoren $\vec{a}$, welche die Alterstruktur bereits erreicht haben, müssen auf ein Vielfaches des Vektors $(k \cdot \vec{a})$ abgebildet werden:

$$M \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a}.$$

Gibt es Lösungen für diese Gleichung?
Sei $\vec{a} = (a_1|a_2)$. Dann bedeutet obige Gleichung: I $a_2 = k \cdot a_1$ und II $a_1 + a_2 = k \cdot a_2$.
I in II eingesetzt führt auf $a_1 + k\,a_1 = k^2\,a_1$ bzw. $a_1 \cdot (k^2 - k - 1) = 0$.
Die Komponente a_1 kann nach dem Ansatz nicht Null sein, also muss die Klammer Null werden:
$k_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Setzt man z.B. $a_1 = 1$, so folgt $a_2 = k$. Wir erhalten so zwei verschiedene Zahlen k mit je einem zugehörigen Vektor:

Zu $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gehört der Vektor $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ und zu $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ gehört der Vektor $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.
Da $k_2 < 0$ ist, spielen diese Zahl und der zugehörige Vektor für die Altersstruktur zunächst keine Rolle.

Ist z.B. der Startvektor $\vec{a}_1$, so kann die Population nach n Monaten einfach berechnet werden:
$M^n \cdot \vec{a}_1 = M^{n-1} \cdot (M \cdot \vec{a}_1) = M^{n-1} \cdot (k_1 \cdot \vec{a}_1) = M^{n-2} \cdot (M \cdot (k_1 \cdot \vec{a}_1)) = M^{n-2} \cdot (k_1^{\,2} \cdot \vec{a}_1) = \ldots = k_1^{\,n} \cdot \vec{a}_1$.
Diese Rechnung ließe sich analog auch mit $\vec{a}_2$ und k_2 durchführen, auch wenn dies im Augenblick keinen Sinn im Kontext der Population zu geben scheint.
Aber wann hat man schon 'mal diesen Startvektor?
Jeder mögliche Startvektor kann als Element des $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ ausgedrückt werden, denn die beiden Vektoren sind offenbar linear unabhängig: $\vec{s} = \lambda\,\vec{a}_1 + \mu\,\vec{a}_2$.
$\Rightarrow M^n \cdot \vec{s} = M^n (\lambda\,\vec{a}_1 + \mu\,\vec{a}_2) = M^n (\lambda\,\vec{a}_1) + M^n (\mu\,\vec{a}_2) = \ldots = \lambda\,k_1^{\,n}\,\vec{a}_1 + \mu\,k_2^{\,n}\,\vec{a}_2$.

Konvergenz:

Da $k_2 \approx -0{,}6810$, ist $\lim\limits_{n \to \infty} k_2^n = 0$. Für große n gilt daher sogar $M^n \cdot \vec{s} = \lambda\,k_1^{\,n}\,\vec{a}_1$ (Fehlerberechnung über den Betrag von $\mu\,k_2^{\,n}\,\vec{a}_2$ möglich).
Es gibt also die oben vermutete Altersstruktur und die Asymptote hat die Gleichung $a(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot x$, gerundet entspricht der Term dem oben angegebenen.

Prognose:

Für den Startvektor $\vec{s} = (0|1)$ ist $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, denn

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung der Population nach n Monaten kann also auch mit Hilfe von $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ erfolgen (für den Startvektor $\vec{s} = (0|1)$ und n hinreichend groß, z.B. $n > 4$).

Man kann natürlich auch noch auf den „Goldenen Schnitt" eingehen.