V2 · Graphen

Daten und Beziehungsstrukturen · elementare Aspekte

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie gewinnen hier einen kleinen Einblick in einen Bereich der Mathematik, der heute in der Anwendung eine wichtige Rolle spielt. Einerseits werden damit „kürzeste Wege“ gesucht, z.B. für einen Fahrdienst auf der Straße oder für den Arm eines Roboters bei der Herstellung von Chips, und der Graph beschreibt die dabei möglichen Wege, andererseits können viele Probleme in diese Darstellungsform gebracht werden, die zunächst nichts direkt mit Wegen zu tun haben, wie z.B. die Koordinierung von zum Teil parallelen Arbeitsabläufen bei einem Bauprojekt.
Interessant ist dabei, dass es bei realen Problemstellungen so viele Möglichkeiten für „Wege“ geben kann, dass auch ein sehr leistungsfähiger Computer diese nicht in vertretbarer Zeit ausrechnen kann. Es sind deshalb oft Ideen gefragt für eine möglichst gute näherungsweise Berechnung. Für bestimmte Problemstellungen gibt es jedoch auch Algorithmen, die eine Lösung ermöglichen.
Es handelt sich bei diesem Thema also – wie im Untertitel steht – um Beziehungen zwischen vorliegenden Daten, die jeweils in einer der Fragestellung entsprechenden Art erkannt und ausgewertet werden müssen.

Die folgenden Aufgaben sind alle ohne Computer lösbar, sie zeigen aber beispielhaft einige mögliche Problemstellungen auf und auch Schwierigkeiten bei deren Lösung.

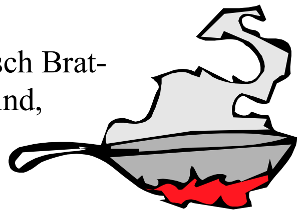
Ziele:

- Sie lernen **verschieden Darstellungen** für die Beziehungsstruktur (**Graph, Matrix bzw. Tabelle**) kennen.
- Die **Idee der Optimierung** spielt eine wichtige Rolle, denn es werden ja „kürzeste Wege“ gesucht oder „kürzeste Zeiten“, also ein Minimum.
- Und vielleicht entwickeln Sie selbst eine **Lösungsstrategie** für eine der Aufgabenstellungen und/oder greifen auf bekannte Lösungsverfahren zurück.

Die Darstellung von Beziehungen zwischen Daten in der Form eines Graphen oder einer Matrix wird Ihnen in weiteren Themenbereichen noch begegnen (*Strukturierung*), ebenso die Idee der *Optimierung*, die Sie in V1 ja schon kennen gelernt haben.

Zu diesem Thema gibt es übrigens viele interessante Internetseiten.

Aufgabe 1



Sie laden Freunde zum Essen ein, das Sie selbst zubereiten. Es gibt zum Fleisch Bratkartoffeln und gedünstete Erbsen und Wurzeln. Da Ihre Freunde Teetrinker sind, wird zum Essen frisch zubereiteter Tee serviert.
Damit Sie nichts vergessen und alles rechtzeitig fertig ist, haben Sie sich aufgeschrieben, was zu tun ist und wie lange es jeweils dauert:

Tisch decken: 20 Minuten
Fleisch zubereiten: 2 Stunden
Fleisch tranchieren: 10 Minuten
Kartoffeln vorbereiten: 10 Minuten
Kartoffeln zubereiten: 1 Stunde
Erbsen und Karotten vorbereiten: 10 Minuten
Dünsten von Erbsen und Karotten: 15 Minuten
Tee zubereiten: 10 Minuten
Teekanne an den Tisch stellen: ½ Minute
Speisen auftragen: 5 Minuten

In einer Tabelle könnte man noch vermerken, was vor einer Tätigkeit auf jeden Fall fertig gestellt sein muss:

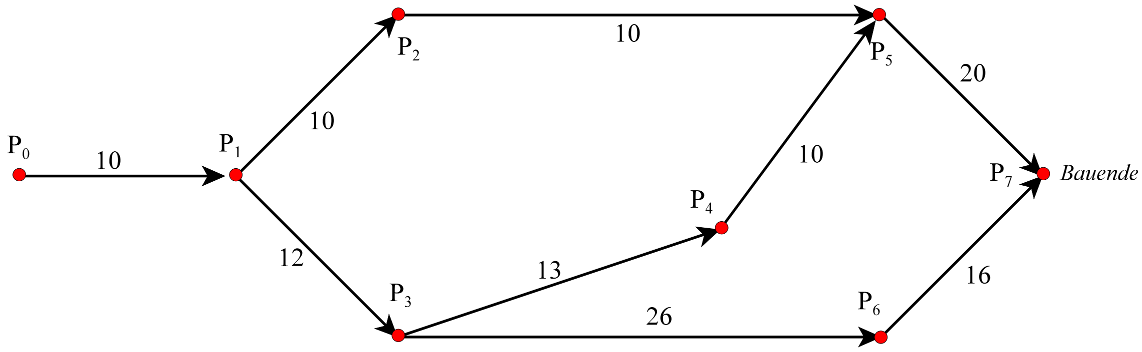
Nummer	Tätigkeit	Zeit (min)	Vorgänger
1	Tisch decken	20	keine
2	Fleisch zubereiten	120	keine
3	Fleisch tranchieren	10	2
4	Kartoffeln vorbereiten	10	keine
5	Kartoffeln zubereiten	60	4
6	Erbsen und Karotten vorbereiten	10	keine
7	Erbsen und Karotten dünsten	15	6
8	Tee zubereiten	10	keine
9	Teekanne auf den Tisch stellen	0,5	8
10	Essen servieren	5	1,3,5,7,9

Mit einer Grafik könnte man verdeutlichen, welche Vorgänge gleichzeitig ablaufen können, was mit einer Tabelle noch weitere Spalten erfordern und daher unübersichtlich würde.
Versuchen Sie es doch einmal.
Können Sie herausbekommen, wie lange die gesamte Vorbereitung nach Ihrem Plan mindestens dauern wird? Gibt es irgendwo Pufferzeiten („Luft" in der zeitlichen Abfolge)?

Aufgabe 2

Der auf der folgenden Seite abgebildete Netzplan beschreibt ein Bauprojekt mit den Teilprojekten P_0, P_1, P_2, ... , die genannten Zahlen sind Arbeitstage.

a) Schreiben Sie den Netzplan geeignet als Tabelle.

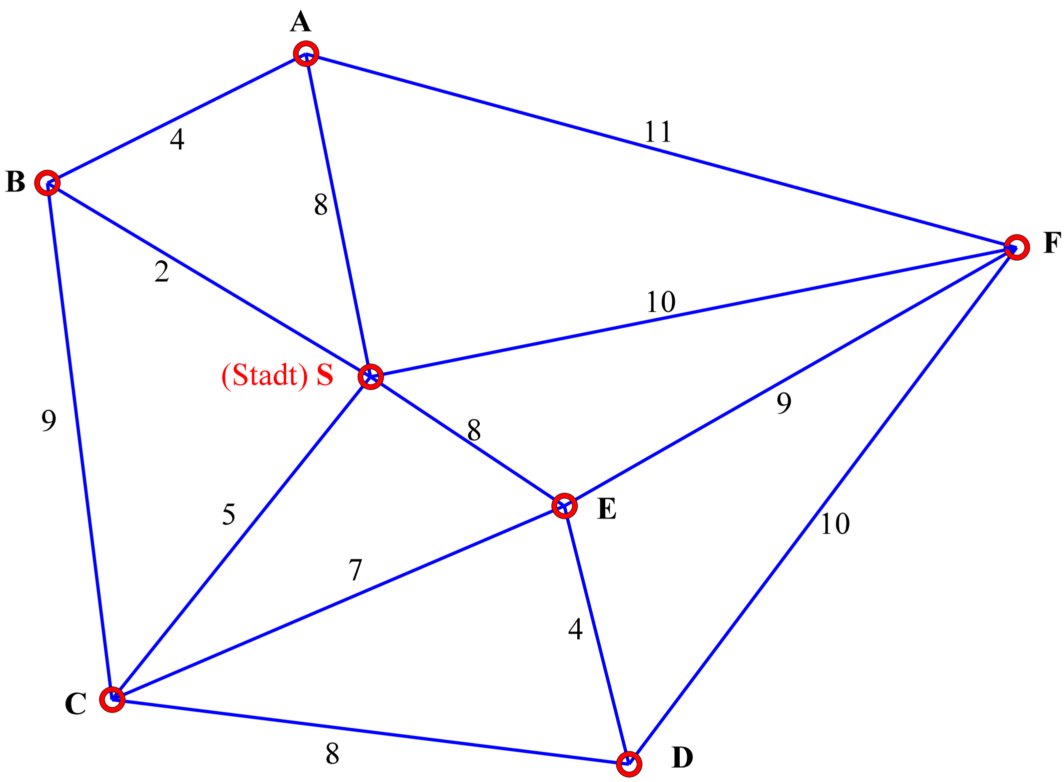


b) Ermitteln Sie den längsten Weg und die zugehörige kürzestmögliche Gesamtdauer des Projekts.

c) Berechnen Sie für jedes Teilprojekt P_i den frühesten Beginntag, den spätesten Beginntag (sodass die Gesamtdauer nicht verlängert wird) und die jeweilige Pufferzeit.

Aufgabe 3

Im abgebildeten Graphen stehen die Knoten (A bis F) für Ortschaften, S speziell für eine Stadt. Die Kanten stellen jeweils die Verbindungsstraße zwischen zwei Ortschaften dar, die angegebene Bewertung ist jeweils die Länge der Straße (in km).



Die folgenden Fragestellungen basieren alle auf diesem Graphen.

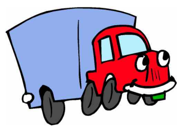
a) Frau Müller fährt jeden Tag von A nach D. Finden Sie den kürzesten Weg.

b) Eine Firma aus der Stadt S hat in jedem Ort eine Zweigstelle und möchte ein Computernetz aufbauen, sodass jede Zweigstelle mit der Zentrale in der Stadt S verbunden ist. Dabei müssen die Verbindungskabel entlang der vorgegebenen Straßen verlegt werden.

Bestimmen Sie die kürzeste Kabellänge, welche die gewünschten Verbindungen herstellt (die nicht direkt zu sein braucht: es ist z.B. D mit S verbunden, wenn D mit E und E mit S verbunden ist).

c) Ein Lieferwagen verlässt täglich die Zentrale der Firma (aus Aufgabenteil b)) in der Stadt S und liefert Produkte in jede einzelne Zweigstelle. Anschießend fährt er in die Stadt zurück.

Bestimmen Sie den kürzesten Weg.



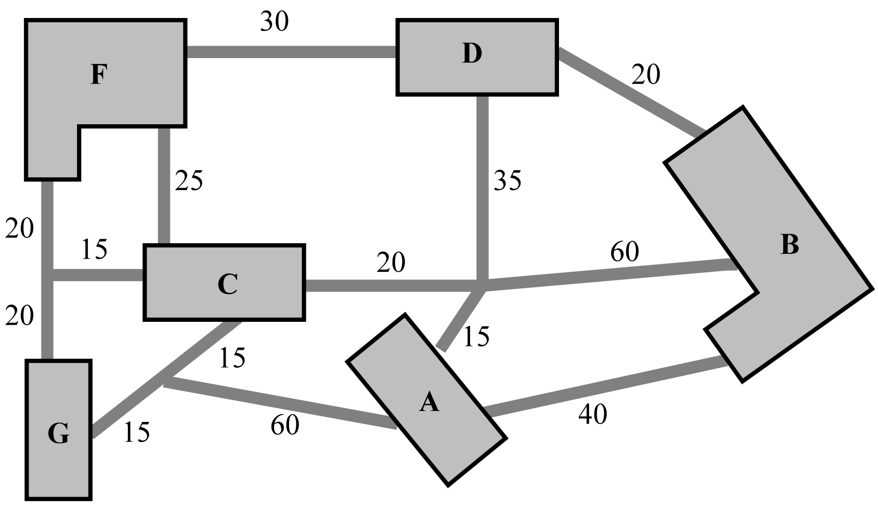
d) Die Straßenwacht überprüft regelmäßig die Oberflächen des Straßennetzes auf Beschädigungen. Das Fahrzeug zur Überprüfung ist in der Stadt S stationiert.

Finden Sie den kürzesten Weg für eine Überprüfungsfahrt, die von der Stadt ausgeht, über alle Straßen (mindestens einmal) führt und zur Stadt zurückkommt.

e) Versuchen Sie Ihre Idee zur Lösung von Teilaufgabe a) zu verallgemeinern, damit Sie auf beliebige andere Probleme des kürzesten Weges anwendbar ist.
Gelingt Ihnen dies nicht, so versuchen Sie den allgemeinen Algorithmus, den Sie von Ihrer Lehrerin bzw. Ihrem Lehrer erhalten haben, auf Teilaufgabe a) anzuwenden. Beschreiben Sie Unterschiede zu Ihrem Lösungsweg.

Aufgabe 4

Bauarbeiten (Teil 1)



Die Abbildung zeigt einen möglichen Verlauf von überdachten Gehwegen in einer neuen Schule. Die Länge eines jeden Abschnitts ist (in m) angegeben, die Abbildung ist aber nicht maßstabsgerecht. Die Anlage pro Meter Gehweg kostet 400 €, hinzu kommen 5.000 € pro Weg für den Anschluss der Abflussrohre mit der Drainage. Dabei benötigt jeder Abschnitt verbundener Wege einen eigenen Anschluss: die Wege, die sich zwischen den Gebäuden A, B, C und D kreuzen, benötigen also vier solcher Anschlüsse.
Die Schülerinnen und Schüler sollen von jedem Gebäude aus jedes andere erreichen können, ohne nass zu werden.

a) Finden Sie das kürzeste Wege-System.

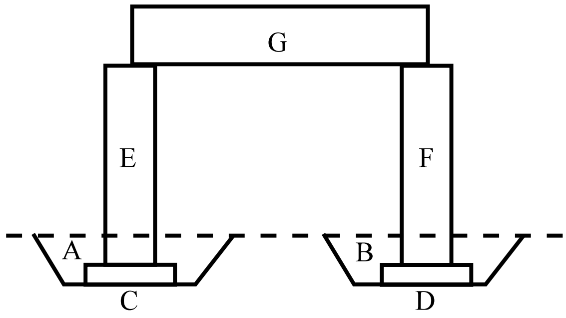
b) Finden Sie das preiswerteste Wege-System, und geben Sie die dafür anfallenden Kosten an.

Aufgabe 5

Bauarbeiten (Teil 2)

Sie sind als Projektsteuerin für den termingerechten Bau einer Brücke verantwortlich. Sie haben von der Bauleitung nebenstehende Skizze erhalten und Sie wissen, wie viel Zeit für die einzelnen Arbeiten anzusetzen ist:

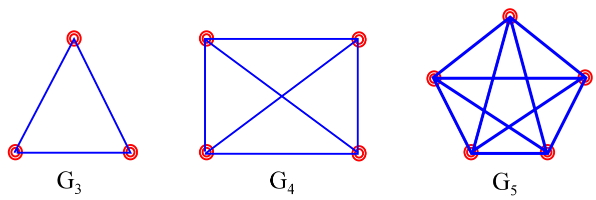
Vorgang	Bezeichnung	Dauer (Wo)
A	Baugrube A ausheben	4
B	Baugrube B ausheben	2
C	Fundament C herstellen	8
D	Fundament D herstellen	4
E	Pfeiler E herstellen	16
F	Pfeiler F herstellen	20
G	Überbau G herstellen	12



Welchen frühesten Termin für die Fertigstellung können Sie der Bauleitung vorschlagen, an welchen Stellen im Bau können Sie Anfangs- bzw. Endzeiten für Teilarbeiten etwas variieren?

Aufgabe 6

Die Aufgabe 3c) ist ein Beispiel für das „Problem des Handlungsreisenden“ („Travelling Salesman Problem“): gesucht ist ein minimaler Weg, der jeden Knoten mindestens einmal enthält.
Solche Probleme sind zumeist sehr schwer zu lösen, da auch mit Computerhilfe erst eine Lösungsstrategie entwickelt werden muss, weil die Anzahl möglicher Wege immens wächst und es so gar nicht sicher ist, dass der Computer diese Rechnung auch (in vertretbarer Zeit) bewältigen kann.
Diese Schwierigkeit soll die folgende Aufgabe illustrieren.



a) Bestimmen Sie in den Graphen G_3, G_4 und G_5 jeweils die Anzahl der möglichen Wege, die an den Ausgangspunkt zurückkehren und dabei jeden anderen Knoten genau einmal erreichen.

b) Entwickeln Sie eine Formel für die Anzahl der in a) beschriebenen Wege für einen Graphen G_n (also mit n Knoten).

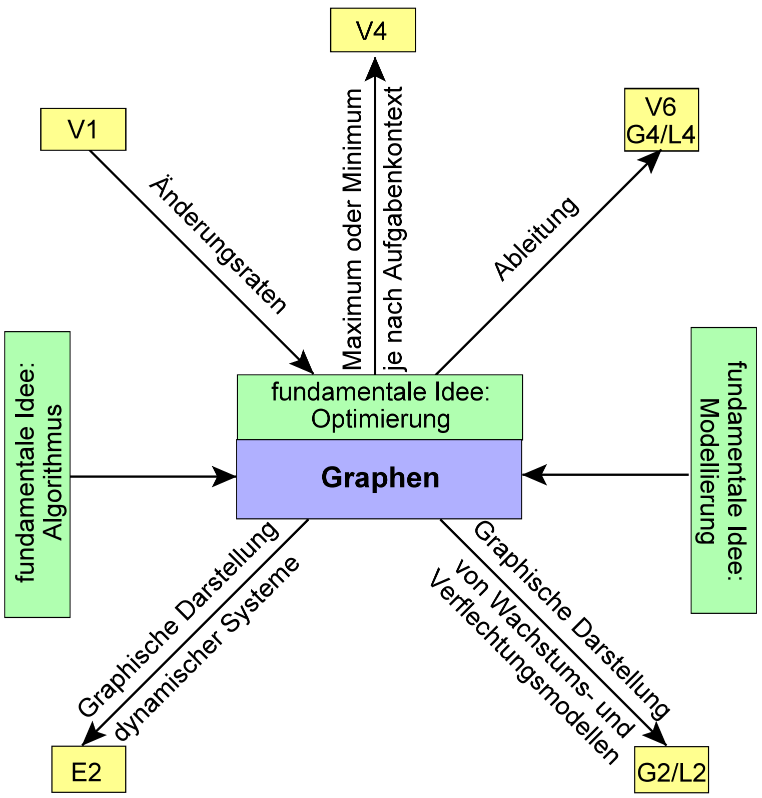
c) Wie viele solcher in a) beschriebenen Wege gäbe es im Graphen zu Aufgabe 3, wenn es direkte Verbindungsstraßen von einem Ort zu jedem anderen gäbe?

Abschließende Aufgabe

Blicken Sie auf den Themenbereich „Graphen“ zurück und verschaffen Sie sich einen Überblick:

- Beschreiben Sie die nach ihrer Meinung charakteristischen mathematischen Inhalte und, soweit dies möglich ist, bei welchem Sachkontext einer Aufgabenstellung diese sinnvoll angewendet werden können.
- Sehen Sie Verbindungen zu früheren Themen der Mathematik, zu anderen Fächern oder zu Sachverhalten außerhalb der Schule? Wenn ja, geben Sie diese an (auch unter Verwendung graphischer Mittel) und begründen Sie Ihre Angaben.

Verbindungen zu anderen Themenbereichen



Quellen:

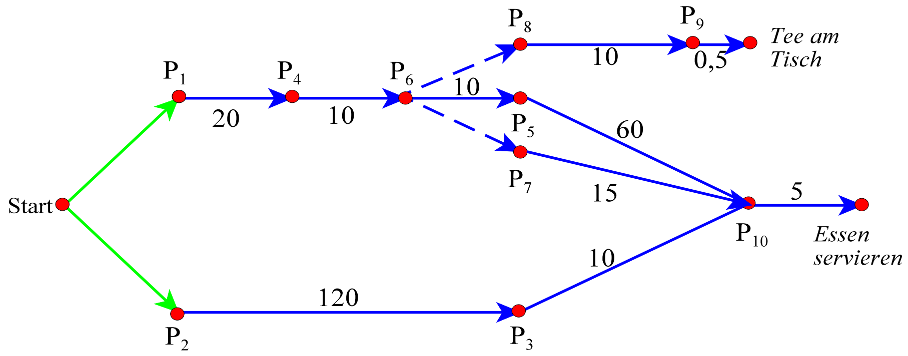
Aufgaben 1, 4: ROSS BRODIE / STEPHEN SWIFT · QMaths 12b · Moreton Bay Publishing Melbourne, 1996

Aufgaben 3, 6: NIGEL GREEN · Unterrichtsvorschläge zur diskreten Mathematik · In: „mathematik lehren“, Heft 84 (Oktober 1994), S. 60ff

Aufgabe 2: REICHEL, MÜLLER · Lehrbuch der Mathematik 5 · öbv&hpt, Wien 2002 · S. 191

Aufgabe 5: VOLKER KUHNE, DIRK NOOSTEN, ANTJE NOOSTEN · Netzplantechnik im Berufsschulunterricht · In: „Die berufsbildende Schule“ (BbSch) 54 (2002) 11–12, S. 349ff

Begriffe



✎ Tragen Sie gegebenenfalls weitere Begriffe in die Tabelle ein.

Begriff	Erklärung
Graph Netzplan	Die oben abgebildete Darstellung zu Aufgaben 1) nennt man allgemein *Graph*, diese spezielle Art auch *Netzplan*. Er veranschaulicht Beziehungen zwischen Daten.
Knoten, Ecken Kante	Die einzelnen Teilaufgaben des Projekts wie „Tisch decken“, die in der Tabelle mit Nummern versehen wurden (quasi die Daten), sind im Graphen durch Punkte gekennzeichnet, die man oft *Knoten* oder *Ecken* nennt, die Verbindungslinie zwischen zwei Knoten heißt *Kante* und drückt die Beziehung zwischen diesen beiden Knoten aus.
bewerteter Graph	Die Zeitdauer einer Teilaufgabe ist auf die Kante nach dem zugehörigen Knoten geschrieben. So benötigt z.B. die Erledigung der Teilaufgabe 5 60 Minuten. Ein Graph, dessen Kanten Bewertungen (hier die Zeit) zugeordnet sind, heißt auch *bewerteter Graph*. Die Länge der Kanten hat dabei nichts mit der Bewertung (hier zugehörige Zeitdauer) zu tun.
gerichteter Graph	Die Kanten sind in obigem Graphen Pfeile, da in der gestellten Aufgabe und bei Netzplänen allgemein Kanten nur in einer Richtung abgearbeitet werden können. Man sagt zu solchem Graph auch *gerichteter Graph*.

Anhang

Tabelle für Eintrag der Kanten

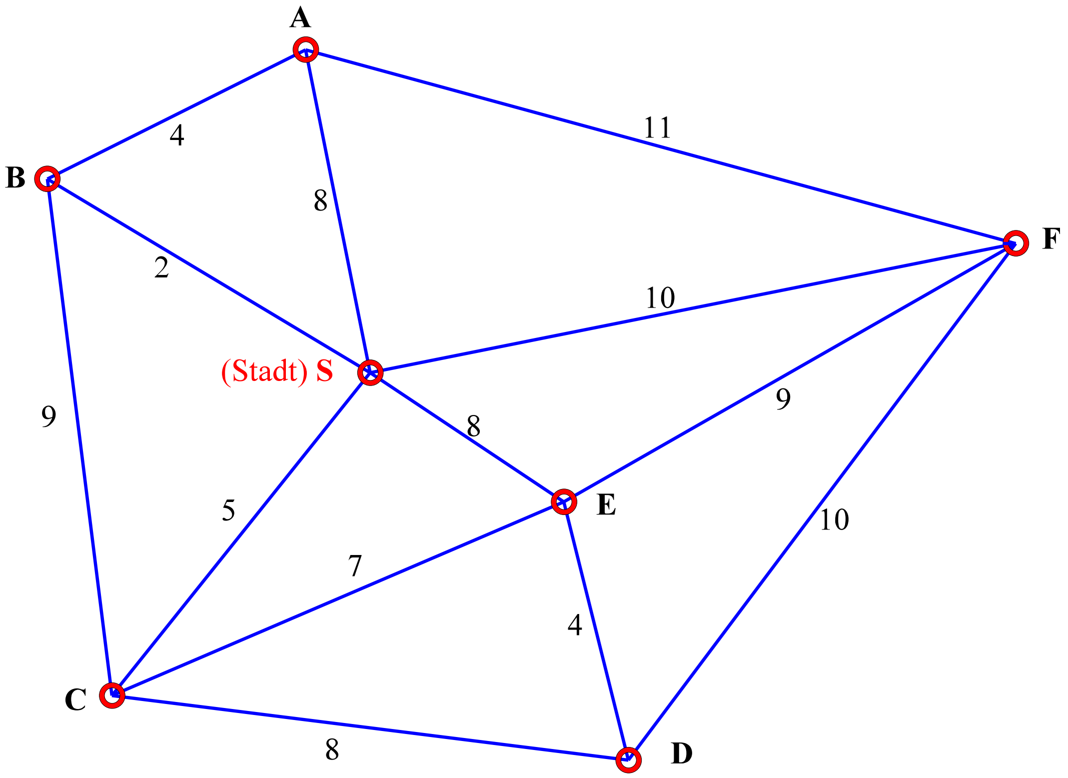
A	B	C	D	E	F	S
AB 4 AF 11 AS 8	BA 4 BS 2 BC 9					

Der Algorithmus von Dijkstra (zur Lösung von Kürzeste-Wege-Problemen)**:**

Der Weg beginne im Anfangsknoten A und ende im Endknoten E.

1. Vom Anfangsknoten A aus suchen wird den nächstgelegenen Knoten. Man erhält so zusammen mit der Kante einen Teilgraphen G_1, den wir der besseren Übersicht halber farbig kennzeichnen.
2. Außerhalb des Teilgraphen G_1 suchen wir jetzt einen Knoten, der über eine Kante mit G_1 (farbig gekennzeichnet) verbunden ist und minimalen Abstand zu dem Anfangsknoten A hat. Dieser Knoten bildet zusammen mit der Verbindungskante zu einem Knoten von G_1 und G_1 selbst den neuen Teilgraphen G_2.
3. Den Schritt 2 wendet man jetzt auf den Teilgraphen G_2 an.
4. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis der Endknoten E erreicht ist.

Graph zu Aufgabe 3



Graph zu Aufgabe 3