Baltic Way 2003

Riga, 2. November 2003

Arbeitszeit: 4,5 Stunden *Deutsche Version*

Fragen zu den Aufgaben können während der ersten 30 Minuten gestellt werden.

1. Sei $\mathbb{Q}_+$ die Menge der positiven rationalen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$, die für alle $x \in \mathbb{Q}_+$ die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) $f(\frac{1}{x}) = f(x)$,
(2) $(1 + \frac{1}{x})f(x) = f(x+1)$.

2. Zeige, dass jede reelle Lösung von $x^3 + px + q = 0$ auch die Ungleichung $4qx \leq p^2$ erfüllt!

3. Es seien x, y und z positive reelle Zahlen mit $xyz = 1$. Man beweise:
$$(1+x)(1+y)(1+z) \geq 2\left(1 + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{y}} + \sqrt[3]{\frac{x}{z}}\right).$$

4. Zeige, dass für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c gilt:
$$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}.$$

5. Eine Folge (a_n) wird definiert durch: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2$ und $a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2$ für $n \geq 2$. Beweise, dass dann für alle $n \geq 1$ gilt:
$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) < (2+\sqrt{2})a_1a_2\dots a_n.$$

6. Es seien $n \geq 2$ und $d \geq 1$ ganze Zahlen mit $d \mid n$. Weiterhin seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ reelle Zahlen mit $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Man zeige: Es gibt mindestens $\binom{n-1}{d-1}$ Möglichkeiten, d Indizes $i_1, i_2, \dots, i_d$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq n$ zu wählen, so dass $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_d} \geq 0$ gilt.

7. X sei eine Teilmenge von $\{1, 2, 3, \dots, 10000\}$ mit der folgenden Eigenschaft: Wenn $a, b \in X$ und $a \neq b$, dann $a \cdot b \notin X$. Bestimme die maximale Anzahl von Elementen in X.

8. Auf einem Tisch liegen 2003 Bonbons. Zwei Spieler machen abwechselnd Spielzüge. Bei einem Zug kann entweder *ein* Bonbon gegessen werden oder die Hälfte aller Bonbons, die noch auf dem Tisch liegen (wenn die Zahl ungerade ist, die "kleinere Hälfte"). Pro Zug muss mindestens ein Bonbon gegessen werden. Wer das letzte Bonbon essen muss, verliert. Welcher der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie?

9. Von einer positiven ganzen Zahl n weiß man, dass sie nicht größer als 144 ist. Man darf zehn Fragen vom Typ "Ist n kleiner als a?" stellen. Die Antworten kommen mit Verzögerung: Die Antwort auf die i-te Frage ($i = 1, 2, \dots, 9$) wird gegeben, nachdem die $(i+1)$-te Frage gestellt worden ist. Die Antwort auf die zehnte Frage folgt unmittelbar auf die Frage selbst. Gib eine Strategie an, um n herauszufinden.

10. Ein *Gitterpunkt* in der Ebene ist ein Punkt mit ganzzahligen Koordinaten. Der *Schwerpunkt* von vier Punkten (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$, ist der Punkt
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right).$$

Es sei n die größte natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft: Es gibt n verschiedene Gitterpunkte in der Ebene, so dass kein Schwerpunkt von irgend vier der Punkte ein Gitterpunkt ist. Zeige: $n = 12$.

11. Kann man 1000 Punkte in der Ebene finden, so dass mindestens 6000 der Abstände zwischen je zwei Punkten gleich sind?

12. $ABCD$ sei ein Quadrat. M sei ein innerer Punkt der Seite BC und N ein innerer Punkt der Seite CD, wobei $\angle MAN = 45°$. Beweise, dass der Umkreismittelpunkt von AMN auf AC liegt.

13. $ABCD$ sei ein Rechteck mit $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{AB}$. Der Mittelpunkt von BC sei E, und P sei ein beliebiger innerer Punkt von AD. Die Fußpunkte der Lote von A auf BP und von D auf CP werden mit F bzw. G bezeichnet. Beweise, dass die Punkte E, F, P, G auf einem Kreis liegen.

14. ABC sei ein beliebiges Dreieck, seine Außendreiecke AMB, BNC und CKA seien gleichseitig. Durch den Mittelpunkt von MN wird eine Senkrechte zu AC gezeichnet, entsprechend durch die Mittelpunkte von NK und KM Senkrechten zu AB bzw. BC. Beweise, dass sich diese drei Senkrechten in einem Punkt schneiden!

15. In einem Sehnenviereck sei P der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Ein Kreis durch P berührt die Seite CD in ihrem Mittelpunkt M; er schneidet die Strecken BD und AC in Q bzw. R. S sei ein Punkt auf der Strecke BD mit $\overline{BS} = \overline{DQ}$. Die Parallele zu AB durch S schneidet AC in T. Zeige: $\overline{AT} = \overline{RC}$.

16. Man finde alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, so dass $a - b$ eine Primzahl und ab eine Quadratzahl ist.

17. Alle positiven Teiler einer positiven ganzen Zahl n werden der Größe nach geordnet in einer Liste gespeichert. Marie soll ein Programm schreiben, das für einen beliebigen Teiler $d > 1$ von n entscheidet, ob d eine Primzahl ist. n habe k Teiler, die nicht größer als d sind. Marie behauptet, dass es ausreicht, die Teilbarkeit von d durch die ersten $\lceil k/2 \rceil$ Teiler von n zu überprüfen. Wenn dabei ein Teiler von d auftritt, der größer als 1 ist, dann ist d nicht prim, anderenfalls ist d eine Primzahl. Hat Marie Recht?
($\lceil x \rceil$ bezeichnet die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner als x ist.)

18. Jede ganze Zahl wird mit genau einer der Farben BLAU, GRÜN, ROT, GELB gefärbt. Kann man das so machen, dass stets gilt:
Wenn gleichfarbige a, b, c, d nicht alle gleich 0 sind, dann ist $3a - 2b \neq 2c - 3d$?

19. Es seien a und b positive ganze Zahlen. Beweise: Wenn $a^3 + b^3$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist, dann ist $a + b$ nicht das Produkt zweier verschiedener Primzahlen.

20. Es sei n eine positive ganze Zahl, so dass die Summe aller ihrer positiven Teiler (außer n selbst) plus die Anzahl dieser Teiler gleich n ist. Beweise, dass es eine ganze Zahl m mit $n = 2m^2$ gibt.