## Aufgaben:

### Algebra

1. Bestimme alle Polynome $p(x)$ mit reellen Koeffizienten, die
$$p((x+1)^3) = (p(x)+1)^3 \quad \text{und} \quad p(0) = 0$$
erfüllen.

2. Beweise für reelle Zahlen $a$, $b$ und $c$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 3$:
$$\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{12}.$$
Wann gilt Gleichheit?

3. Gibt es einen Winkel $\alpha \in ]0, \pi/2[$, so dass die Zahlen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ und $\cot\alpha$ in irgend einer Reihenfolge aufeinander folgende Glieder einer arithmetischen Folge sind?

4. Ein Polynom $P$ hat ganzzahlige Koeffizienten, und es gilt $P(x) = 5$ für fünf verschiedene ganze Zahlen $x$. Zeige: Es gibt keine ganze Zahl $x$ mit $-6 \leq P(x) \leq 4$ oder $6 \leq P(x) \leq 16$.

5. Romeo und Julia haben jeweils einen regulären Tetraeder, an dessen Eckpunkten jeweils positive reelle Zahlen angebracht sind. Jeder Kante ordnen sie jetzt das Produkt der beiden Zahlen an ihren Endpunkten zu und jeder Seite die Summe der drei Zahlen an deren Kanten. Sie stellen fest, dass die vier Zahlen auf den Seiten von Romeos Tetraeder mit den vier Zahlen auf den Seiten von Julias Tetraeder übereinstimmen. Folgt daraus, dass auch die Zahlen an den Ecken beider Tetraeder übereinstimmen?

### Zahlentheorie

6. Bestimme alle endlichen Mengen positiver ganzen Zahlen mit mindestens zwei Elementen, für die gilt: Für je zwei Zahlen $a$ und $b$ mit $a > b$ aus der Menge gehört auch die Zahl $\frac{b^2}{a-b}$ zu der Menge.

7. Wie viele Paare $(m, n)$ positiver ganzer Zahlen mit $m < n$ erfüllen die Gleichung
$$\frac{3}{2008} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \text{ ?}$$

8. Eine Menge $A$ von positiven ganzen Zahlen hat folgende Eigenschaften: Die kleinste Zahl aus $A$ ist 1001, und das Produkt aller Elemente von $A$ ist eine Quadratzahl. Bestimme den kleinstmöglichen Wert des größten Elementes aus $A$.

9. Die positiven ganzen Zahlen $a$ und $b$ mögen die Gleichung
$$a^b - b^a = 1008$$
erfüllen. Beweise, dass dann $a$ und $b$ kongruent modulo 1008 sind.

10. Sei $S(n)$ die Quersumme der positiven ganzen Zahl $n$. Bestimme den größtmöglichen Wert für $\dfrac{S(n)}{S(16n)}$.

**Kombinatorik**

11. Sei $A$ eine 84-elementige Teilmenge der Menge $\{1, 2, \ldots, 169\}$, so dass keine zwei Elemente als Summe 169 ergeben. Man zeige, dass dann $A$ eine Quadratzahl enthält.

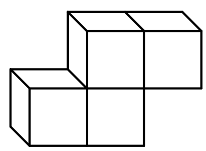
12. In einer Schulklasse sind $3n$ Kinder. Je zwei von ihnen machen genau einem anderen Kind ein gemeinsames Geschenk. Beweise, dass für ungerade $n$ Folgendes gilt: Wenn von je drei Kindern $A$, $B$ und $C$ aus der Klasse $A$ und $B$ das Kind $C$ beschenken, so beschenken auch $A$ und $C$ das Kind $B$.

13. In der Vorbereitung eines internationalen Mathematik-Wettbewerbs wählten die teilnehmenden Länder aus neun Kombinatorik-Aufgaben aus. Üblicherweise einigt man sich nur mühsam, und so war es nicht überraschend, dass das Folgende passierte:

    - Jedes Land wählte genau drei Aufgaben aus.
    - Keine zwei Länder entschieden sich für den gleichen Satz von Aufgaben.
    - Für je drei Länder gab es mindestens eine Aufgabe, die keines der drei gewählt hatte.

    Man bestimme die größtmögliche Anzahl teilnehmender Länder.

14. Ist es möglich, einen $4 \times 4 \times 4$-Würfel aus Blöcken der folgenden Bauart zusammenzusetzen? (Die Blöcke bestehen aus 4 Einheitswürfeln.)



15. Auf ein $n \times n$-Feld werden $1 \times 2$-Dominosteine so gelegt, dass sie jeweils zwei benachbarte Einheitsquadrate überdecken. Dabei berühren sich die Dominosteine nicht, nicht einmal an ihren Eckpunkten. Bestimme die kleinstmögliche Zahl $n$, wenn die Dominosteine insgesamt 2008 Felder belegen.

**Geometrie**

16. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Der Kreis mit dem Durchmesser $AC$ schneide die Gerade $BD$ in den Punkten $P$ und $Q$. Die Senkrechte zur Geraden $AC$ im Punkt $C$ schneidet die Geraden $AB$ und $AD$ in den Punkten $X$ bzw. $Y$. Zeige, dass dann die Punkte $P$, $Q$, $X$ und $Y$ auf einem Kreis liegen.

17. Es seien $a$, $b$, $c$ und $d$ die Seiten eines Vierecks, das einem gegebenen Kreis einbeschrieben ist. Beweise, dass das Produkt $(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)$ sein Maximum annimmt, wenn das Viereck ein Quadrat ist.

18. Sei $AB$ der Durchmesser eines Kreises $S$, und sei $L$ die Tangente an $S$ in $A$. Außerdem sei $c$ eine feste positive reelle Zahl. Betrachte alle Paare von Punkten $X$ und $Y$, die auf $L$ auf unterschiedlichen Seiten von $A$ liegen und $|AX| \cdot |AY| = c$ erfüllen. Die Geraden $BX$ und $BY$ schneiden $S$ in den Punkten $P$ bzw. $Q$. Zeige, dass alle Geraden $PQ$ durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

19. In einem Kreis mit dem Durchmesser 1 werden einige Sehnen eingezeichnet. Die Summe ihrer Längen übersteigt 19. Beweise, dass es einen Durchmesser gibt, der mindestens 7 Sehnen schneidet.

20. In einem Dreieck $ABC$ seien $M$ der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle BAC$ mit der Seite $BC$ und $N$ der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle ACB$ mit der Seite $AB$. Weiterhin sei

    $$\frac{\sphericalangle BNM}{\sphericalangle MNC} = \frac{\sphericalangle BMN}{\sphericalangle NMA}.$$

    Beweise, dass das Dreieck $ABC$ gleichschenklig ist.