BALTIC WAY 2010 German

REYKJAVIK, 6. NOVEMBER 2010

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden
Fragen können in den ersten 30 Minuten gestellt werden.
Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind Lineal und Zirkel.
Bei jeder Aufgabe können 5 Punkte erzielt werden.

Aufgabe 1. Man bestimme alle Quadrupel reeller Zahlen (a, b, c, d), die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{cases} (b+c+d)^{2010} = 3a \\ (a+c+d)^{2010} = 3b \\ (a+b+d)^{2010} = 3c \\ (a+b+c)^{2010} = 3d \end{cases}$$

Aufgabe 2. Sei x eine reelle Zahl mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Man beweise:

$$\cos^2(x)\cot(x) + \sin^2(x)\tan(x) \geq 1$$

Aufgabe 3. Seien x_1, x_2, ..., x_n $(n \geq 2)$ reelle Zahlen, die größer als 1 sind. Es gelte weiterhin $|x_i - x_{i+1}| < 1$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Man beweise:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1$$

Aufgabe 4. Man bestimme alle Polynome $P(x)$ mit reellen Koeffizienten, bei denen für jedes ganzzahlige x gilt:

$$(x - 2010)P(x + 67) = xP(x)$$

Aufgabe 5. Es bezeichne $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bei denen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y)$$

Aufgabe 6. Ein $n \times n$-Spielbrett ist in folgender Weise mit n Farben gefärbt: Die Hauptdiagonale (von links oben nach rechts unten) trägt die erste Farbe, die beiden angrenzenden Diagonalen die zweite, die beiden nächsten Diagonalen (die oben bzw. unten anschließen) bekommen die dritte Farbe, usw. Die beiden Ecken (oben rechts und unten links) sind schließlich in der n-ten Farbe gefärbt. Es ist möglich, n Türme, die sich paarweise nicht bedrohen, so auf dem Brett zu postieren, dass keine zwei dieser Türme auf Feldern gleicher Farbe stehen. Man beweise, dass dann $n \equiv 0 \pmod 4$ oder $n \equiv 1 \pmod 4$ gilt.

Aufgabe 7. In einem Land gibt es etliche Städte, eine von ihnen ist die Hauptstadt. Je zwei Städte A und B sind durch einen direkten Flug von A nach B und einen direkten Flug von B nach A verbunden, wobei die beiden Flüge den gleichen Preis haben. Weiterhin sei angenommen, dass alle Rundreisen, bei denen in jeder Stadt genau einmal gelandet wird, dasselbe kosten. Man beweise, dass alle Rundreisen, die wiederum genau einmal in jeder Stadt landen, aber die Hauptstadt auslassen, ebenfalls alle den gleichen Preis aufweisen.

Aufgabe 8. In einem Klub mit 30 Mitgliedern hatte ursprünglich jedes Mitglied einen Hut. An einem schönen Tag sandte jedes Mitglied seinen Hut an ein anderes Mitglied (ein Mitglied kann so auch mehrere Hüte erhalten haben). Man beweise: Es gibt eine Gruppe von 10 Mitgliedern, von denen keiner einen Hut von einem anderen Mitglied dieser Gruppe erhalten hat.

Aufgabe 9. Am Anfang gab es einen Haufen mit 1000 Streichhölzern. Zwei Spieler ziehen abwechselnd, in dem sie jeweils 1 bis 5 Streichhölzer entfernen. Es ist erlaubt, während des ganzen Spieles höchstens zehnmal 6 Streichhölzer zu ziehen; zum Beispiel könnte der erste Spieler siebenmal und der zweite dreimal solche außerordentlichen Züge machen. Gewonnen hat derjenige, der den letzten Zug machen kann. Man bestimme, welcher Spieler eine Gewinnstrategie hat.

Aufgabe 10. Sei n eine ganze Zahl mit $n \geq 3$. Ein konvexes n-Eck wird durch $n-3$ sich nicht schneidende Diagonalen in Dreiecke zerlegt. Die Dreiecke werden schwarz und weiss so gefärbt, dass Dreiecke, die eine gemeinsame Seite haben, stets verschiedene Farben erhalten. Man bestimme die kleinstmögliche Anzahl von schwarzen Dreiecken.

Aufgabe 11. Sei $ABCD$ ein Quadrat und sei S der Schnittpunkt der Diagonalen. Zwei Kreise k und k' gehen durch A und C bzw. B und D. Weiterhin schneiden sich k und k' in genau zwei verschiedenen Punkten P und Q. Man zeige, dass dann S auf PQ liegt.

Aufgabe 12. Sei $ABCD$ ein Trapez, das kein Parallelogramm ist.

a) Man zeige, dass die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA (in dieser Reihenfolge) keine arithmetische Folge bilden.

b) Man zeige, dass es ein solches Trapez gibt, bei dem die Längen seiner Seiten AB, BC, CD, DA eine arithmetische Folge bilden, wenn man die Reihenfolge der Seiten ändert.

Aufgabe 13. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei CD eine Höhe und H der Höhenschnittpunkt. Weiterhin liege der Umkreismittelpunkt des Dreiecks auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle DHB$. Man bestimme alle möglichen Werte von $|\sphericalangle CAB|$.

Aufgabe 14. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Die Punkte D und E liegen so auf den Dreiecksseiten AC bzw. BC, dass A, B, D und E auf einem Kreis liegen. Weiterhin sei angenommen, dass der Kreis durch D, E und C die Seite AB in den beiden Punkten X und Y schneidet. Man beweise, dass der Mittelpunkt von XY der Fußpunkt der Höhe von C auf AB ist.

Aufgabe 15. In Dreieck ABC seien die Punkte M und N auf der Winkelhalbierenden AL derart gewählt, dass $|\sphericalangle ABM| = |\sphericalangle ACN| = 23°$. Der Punkt X sei ein innerer Punkt des Dreiecks mit $BX = CX$ and $|\sphericalangle BXC| = 2|\sphericalangle BML|$. Man bestimme die Größe des Winkels $\sphericalangle MXN$.

Aufgabe 16. Für jede positive ganze Zahl k sei $d(k)$ die Anzahl der Teiler von k (z.B. $d(12) = 6$), und $s(k)$ bezeichne die Quersumme von k (z.B. $s(12) = 3$). Eine positive ganze Zahl n heiße *amüsant*, wenn es eine positive ganze Zahl k mit $d(k) = s(k) = n$ gibt. Man bestimme die kleinste amüsante ungerade ganze Zahl größer als 1.

Aufgabe 17. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, bei denen die Dezimaldarstellung von n^2 lediglich aus ungeraden Ziffern besteht.

Aufgabe 18. Sei p eine Primzahl. Für jedes k mit $1 \leq k \leq p-1$ gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl k^{-1}, so dass $1 \leq k^{-1} \leq p-1$ und $k^{-1} \cdot k \equiv 1 \pmod{p}$. Man beweise, dass die Folge

$$1^{-1}, \quad 1^{-1} + 2^{-1}, \quad 1^{-1} + 2^{-1} + 3^{-1}, \quad \ldots, \quad 1^{-1} + 2^{-1} + \cdots + (p-1)^{-1}$$

(Addition modulo p) höchstens $(p+1)/2$ verschiedene Elemente aufweist.

Aufgabe 19. Für welche k gibt es k paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ mit

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_k^2 = 2010?$$

Aufgabe 20. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n für die es eine unendliche Teilmenge A der Menge $\mathbb{N}^+$ der positiven natürlichen Zahlen gibt, so dass für alle paarweise verschiedenen $a_1, \ldots, a_n \in A$ die Zahlen $a_1 + \cdots + a_n$ und $a_1 \cdots a_n$ teilerfremd sind.