Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Mathematik-Werkstatt

Handreichung für den
Mathematikunterricht
in der Sekundarstufe I

Sehr geehrte Kolleginnen, sehr geehrte Kollegen.

das Amt für Schule überreicht Ihnen hiermit im Rahmen der Reihe „Unterrichtshilfen für den Mathematikunterricht“ eine Handreichung, mit deren Hilfe Schüler und Schülerinnen befähigt werden sollen, möglichst selbstständig und nach eigener Auswahl elementare Inhalte des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I zu wiederholen und zu üben. Mit großem persönlichen Engagement haben zwei junge Kolleginnen ihre individuellen Erfahrungen mit Lerngruppen reflektiert und nach Wegen und Möglichkeiten gesucht, die geeignet sind, Schülerinnen und Schülern zu helfen, aktuell nicht verfügbare Kenntnisse und Fertigkeiten des vorangegangenen Mathematikunterrichts auf einem selbst gewählten Wege sich wieder anzueignen. Das Ergebnis solcher Reflexionen liegt nun mit dieser Handreichung vor. Sie ist als Loseblattsammlung konzipiert, die als „Lernkartei“ Schülerinnen und Schüler zur Behebung erkannter Defizite zur Verfügung steht. Die Benennung und der Einsatz von so genannten Experten unterstützen Lehrerinnen und Lehrer weiterhin, vorübergehend eine überwiegend beobachtende und je nach Erfordernis sporadisch unterstützende Rolle im Mathematikunterricht zu übernehmen. Ich wünsche Ihnen sowie Ihren Schülerinnen und Schülern viel Erfolg bei der Arbeit mit diesem Material.

Den beiden Kolleginnen, Frau Karen Lambrecht und Frau Anne Stratmann danke ich für die geleistete, sehr umfangreiche und zeitintensive Arbeit.

Werner Renz

Februar 1999

Jetzt (Okt. 2003): Behörde für Bildung und Sport, Hamburg, B 22-2
Satz: Karen Lambrecht(jetzt: Karen Wissen), Anne Stratmann
Druck: D&K, Hamburg

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Mathematik-Werkstatt

Handreichung für den Mathematikunterricht
in der Sekundarstufe I

Fachreferent Werner Renz Jetzt: Behörde für Bildung und Sport, B 22-2

Verfasserinnen: Karen Lambrecht Anne Stratmann

unter Mitarbeit von Willi Heinsohn,
jetzt: Landesinstitut Hamburg/Ausbildung

Februar 1999

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Zur Entstehung der Handreichung

Die Konzeption dieser Mathematikwerkstatt entsprang der Schulpraxis. Im Referendariat standen wir als Lehrerinnen in einer 10. Klasse einer Schwerhörigenschule und einer 9. Hauptschulklasse vor der Aufgabe, die Schüler und Schülerinnen bei ihrer Vorbereitung auf Einstellungstests zu unterstützen.

Erste Erfahrungen der Schüler und Schülerinnen in Testsituationen hatten gezeigt, dass elementare Kenntnisse und Fertigkeiten nicht immer verfügbar waren und deshalb grundlegende Inhalte des Mathematikunterrichts wiederholen und üben mussten. Die Planung und Durchführung einer ausführlichen Übungssequenz musste u a. zwei zentrale Probleme berücksichtigen: die immense Vielfalt der zu behandelnden Themen und die individuellen Lerninteressen und Lernniveaus der Schüler und Schülerinnen. Diese Probleme schlossen eine lehrgangsmäßige Erarbeitung aus. Wir entschieden uns stattdessen für eine Orientierung am Werkstattprinzip.

In der vorliegenden Handreichung sind die Unterrichtsmaterialien dieser Mathematikwerkstatt vollständig zusammengestellt. Sie sind das Ergebnis reflektierter Unterrichtserfahrungen. Sie wurden nach Einsatz in unterschiedlichen Lerngruppen mehrfach überarbeitet und können in der nun vorliegenden Form in ähnlichen Unterrichtssituationen unmittelbar eingesetzt werden.

Anlehnung an das Werkstattprinzip

Der von uns konzipierte Unterricht orientiert sich am Prinzip der Werkstattarbeit. wobei der Schwerpunkt der Arbeit auf den didaktischen Prinzipien der Binnendifferenzierung und Selbstständigkeit liegt. Entsprechend der oben benannten typischen Probleme dieser umfassenden Wiederholung wird im Hinblick auf die Lerninhalte und das Arbeitstempo differenziert. Selbstständigkeit wird bei der Reihenfolge der Themengebiete, bei der Auswahl des Schwierigkeitsgrades der Aufgaben, bei der Bearbeitung und bei der Lernkontrolle gefordert. Die Lernenden arbeiten demnach zur gleichen Zeit im gleichen Raum, sie beschäftigen sich allerdings mit unterschiedlichen Themen in eventuell unterschiedlichen Sozialformen. Diese Unterrichtsform verlangt eine im Vergleich zum Frontalunterricht modifizierte Lehrerrolle, in der der Lehrer / die Lehrerin in der Art eines „Werkstattmeisters“ sowohl beobachtende als auch beratende Funktionen übernehmen kann. Ebenso müssen die Schüler und Schulerinnen ihr „Expertenwissen“ anderen Lernenden bei Bedarf zur Verfügung stellen. Die Orientierung am Werkstattunterricht ist angesichts der für diese Lernsituation typischen Problematiken, Interessen und Ziele empfehlenswert, auch wenn nicht alle idealtypischen Merkmale dieser Unterrichtsform berücksichtigt werden. So wird z. B. nicht darauf abgezielt, konkrete für die Schüler subjektiv bedeutsame Projekte zu erstellen.

Aufbau des Arbeitsmaterials

- Die Mathematikwerkstatt enthält Aufgabensammlungen, die nach Themenbereichen sortiert sind. Die Aufgaben eines Themenbereiches sind in zwei Arbeitsblättern zusammengefasst. Die Aufgaben sind mit ☺ (leicht) oder mit ☺ ☺ (schwer) gekennzeichnet.
- Zu jedem Themenbereich gibt es neben den Arbeitsblättern auch die dazugehörigen Lösungsblätter, die eine Selbstkontrolle durch die Schüler und Schülerinnen ermöglichen.

- Zu jedem Themenbereich gibt es **Grundlagenpapiere**, in denen im Stil einer Formelsammlung die notwendigen mathematischen Kenntnisse, die bei der Bearbeitung der Aufgaben benötigt werden, zusammengefasst sind.

Zur Benutzung der Mathematikwerkstatt

Die folgenden Empfehlungen sind ebenfalls reflektierte Erfahrungen unserer Unterrichtsarbeit:

- Es empfiehlt sich, die Arbeitsmaterialien in Form von Karteikarten aufzubereiten (optimal sind laminierte Kopien, da diese sehr stabil sind - es besteht die Möglichkeit, die Aufgabenblätter oder das Aufgabenblatt mit dazugehöriger Lösung in eine Folie einzuschweißen). Es hat sich dabei bewährt, unterschiedlich farbiges Papier für die Grundlagen, Aufgaben und Lösungen beim Kopieren zu benutzen

Bsp. Grundlagen:	weiß
Aufgaben leicht:	hellgrün
Aufgaben schwer:	dunkelgrün
Lösungen leicht:	hellgelb
Lösungen schwer:	dunkelgelb

So ist mit einem Blick zu erkennen, ob ein Schüler in den Grundlagen nachschaut, die leichteren Aufgaben bearbeitet oder schon seine Ergebnisse mit den Lösungen vergleicht.

Die Themengebiete bauen nicht aufeinander auf, so dass die Reihenfolge bei der Bearbeitung der Themen von jedem Schüler und jeder Schülerin individuell festgelegt werden kann. Um diese Wahlfreiheit der Schüler und Schülerinnen sicherzustellen, ist zu beachten, dass jedes Themengebiet mehrfach vorhanden sein muss (sowohl die Grundlagen als auch die Aufgaben und die Lösungen). Bei *25* Schülern hat es sich bewährt, von jedem Themenbereich 5 vollständige Exemplare vorbereitet zu haben.

- Es empfiehlt sich, für die Arbeit mit der Mathematikwerkstatt einen Zeitraum von 3-4 Wochen einzuplanen.
- Entsprechend dem Werkstattprinzip sollten für jedes Themengebiet 1-2 „Schülerexperten“ ausgewählt werden, die sich vor Beginn der Einheit intensiv rnit ihrem Themengebiet auseinandersetzen. Diese Experten haben später die Aufgabe, anderen Schülern und Schülerinnen zu helfen, Lernschwierigkeiten zu begegnen.
- Die Schüler und Schülerinnen entscheiden individuell über die Reihenfolge der Themen. Gleiches gilt für die Wahl des Schwierigkeitsgrades der Aufgaben. Sollten bei der Bearbeitung der Aufgaben Probleme auftreten, so sollten die Schüler und Schülerinnen zunächst versuchen, diese mit Hilfe der Grundlagenpapiere zu lösen. Sollte das nicht möglich sein, so ist der jeweilige Experte für dieses Thema zu Rate zu ziehen. Der Lehrer / die Lehrerin hat in der Regel eine eher beobachtende Rolle.
- Es ist sinnvoll, einen Übersichtsplan zu erstellen, an dem für Schüler und Schülerinnen sowie Lehrer und Lehrerinnen zu erkennen ist, wer an welchem Thema arbeitet und welche Themen jeweils schon bearbeitet worden sind.
- Es ist empfehlenswert, regelmäßige Reflexionsgespräche mit den Schülern und Schülerinnen durchzuführen. An dieser Stelle können auftretende Probleme mit den Experten besprochen werden.

1. Schriftliche Addition

1. Beispiel (ohne Zehnerübergang):

6137 + 552 = ☐ Addiere zuerst die Einer, dann die Zehner, usw.

6	1	3	7
+	5	5	2
6	6	8	9
0 + 6 = 6 Schreibe: 6	5 + 1 = 6 Schreibe: 6	5 + 3 = 8 Schreibe: 8	2 + 7 = 9 Schreibe: 9

6137 + 552 = 6689

2. Beispiel (mit Zehnerübergang):

5385 + 299 + 543 = ☐

5	3	8	5
+	2	9	9
+ 1	5_2	4_1	3
6	2	2	7
1 + 5 = 6 Schreibe: 6	**2** + 5 + 2 + 3 = 12 Schreibe: 2 Übertrage: **1**	**1** + 4 + 9 + 8 = 22 Schreibe: 2 Übertrage: **2**	3 + 9 + 5 = 17 Schreibe: 7 Übertrage: **1**

5385 + 299 + 543 = 6227

2. Schriftliche Subtraktion

1. Beispiel (ohne Zehnerübergang):

6747 – 235 = ☐

6	7	4	7
–	2	3	5
6	**5**	**1**	**2**
Überlege: 0 + _ = 6 Ergänze: 0 + **6** = 6 Schreibe: **6**	Überlege: 2 + _ = 7 Ergänze: 2 + **5** = 7 Schreibe: **5**	Überlege: 3 + _ = 4 Ergänze: 3 + **1** = 4 Schreibe: **1**	Überlege: 5 + _ = 7 Ergänze: 5 + **2** = 7 Schreibe: **2**

6747 – 235 = 6512

2. Beispiel (mit Zehnerübergang):

4527 – 895 = $\boxed{}$

	4	5	2	7
–	$_1$	8_1	9	5
	3	**6**	**3**	**2**
	Überlege: (1 + 0) + _ = 4 Ergänze: (1) + **3** = 4 Schreibe: **3**	Überlege: (1 + 8) + _ = 15 Ergänze: (9) + **6** = 15 Schreibe: **6** Übertrage: 1	Überlege: 9 + _ = 12 Ergänze: 9 + **3** = 12 Schreibe: **3** Übertrage: 1	Überlege: 5 + _ = 7 Ergänze: 5 + **2** = 7 Schreibe: **2**

4527 – 895 = <u>3632</u>

3. Beispiel (mit zwei Subtrahenten und mehr):

872 – 348 – 429 = $\boxed{}$

Diese Aufgabe kann in zwei Rechenschritten gelöst werden:
Da 345 und 429 von 878 subtrahiert werden sollen, werden diese Zahlen zunächst addiert und dann das Ergebnis von 878 subtrahiert:

1. Schritt:

$$\begin{array}{r} 3\,4\,8 \\ \underline{+\,4\,2_1 9} \\ 7\,7\,7 \end{array}$$

2. Schritt:

$$\begin{array}{r} 8\,7\,2 \\ \underline{-\,7_1 7\,7} \\ \underline{\underline{9\,5}} \end{array}$$

Also:
872 – (348 + 429) = <u>95</u>

Diese Rechnung kann auch in einem Schritt durchgeführt werden:

	8	7	2
–	3	4	8
–	4_1	2_2	9
		9	**5**
	Überlege: (1 + 4 + 3) + _ = 8 Ergänze: (8) + 0 = 8	Überlege: (2 + 2 + 4) + _ = 17 Ergänze: (8) + **9** = 17 Schreibe: **9** Übertrage: 1	Überlege: (9 + 8) + _ = 22 Ergänze: (17) + **5** = 22 Schreibe: **5** Übertrage: 2

872 – 348 – 429 = <u>95</u>

3. Schriftliche Multiplikation

1. Beispiel (mit einer einstelligen Zahl):

235 • 3 = $\boxed{}$

235 • 3	Rechne: 3 • 5 = 15; Schreibe: 5; Merke: **1.**
705	Rechne: 3 • 3 = 9; 9 **+ 1** = 10; Schreibe: 0; Merke: **1.**
	Rechne: 3 • 2 = 6; 6 **+ 1** = 7; Schreibe: 7.

235 • 3 = 705

2. Beispiel (mit einer Zehnerzahl):

235 • 30 = $\boxed{}$

235 • 3**0**
705**0**

235 • 30 = 7050

3. Beispiel (mit einer mehrstelligen Zahl):

413 • 5038 = $\boxed{}$

413 • 5038	
2065000	Rechne: 5 • 413 = 2065; Schreibe: 2065 mit 5 unter 5; Ergänze die Nullen.
000	Rechne: 0 • 413 = 0; Schreibe: 0 unter 0; Ergänze die Nullen.
12390	Rechne: 3 • 413 = 1239; Schreibe: 1239 mit 9 unter 3; Ergänze die Null.
3304	Rechne: 8 • 413 = 3304; Schreibe: 3304 mit 4 unter 8.
1	
2080694	Addiere.

413 • 5038 = 2080694

4. Schriftliche Division

1. Beispiel:

54 : 3 = $\boxed{}$

5 4 : 3 = 18	
3 ← • 3	Überlege: 5 : 3 = 1**,** Rest 2; Schreibe: 1 als Ergebnis.
2 4	Hole die 4 herunter.
2 4 ← • 3	Überlege: 24 : 3 = 8, Rest 0; Schreibe: 8 als Ergebnis.
0	

54 : 3 = 18

2. Beispiel:

1428 : 14 = $\boxed{}$

1 4 2 8 : 1 4 = 1 **0** 2	
1 4 ← • 14	Überlege: 14 : 14 = 1, Rest 0; Schreibe: 1 als Ergebnis.
0 2	Hole die 2 herunter.
0 ← • 14	Überlege: 2 : 14 = 0, Rest 2; Schreibe: **0** als Ergebnis.
2 8	Hole die 8 herunter.
2 8 ← • 14	Überlege: 28 : 14 = 2, Rest 0; Schreibe: 2 als Ergebnis.
0	

1428 : 14 = 102

3. Beispiel:

1005 : 15 = $\boxed{}$

1 0 0 5 : 1 5 = 67	Überlege: 1 : 15 hat keine ganze Zahl als Ergebnis. Also:
9 0 ← • 15	Überlege: 10 : 15 hat keine ganze Zahl als Ergebnis. Also:
1 0 5	Überlege: 100 : 15 = 6, Rest 10; Schreibe: 6 als Ergebnis
1 0 5 ← • 15	Hole die 5 herunter.
0	Überlege: 105 : 15 = 7, Rest 0; Schreibe: 7 als Ergebnis.

1005 : 15 = 67

4. Beispiel (Division mit Rest):

9 : 4 = $\boxed{}$

9 : 4 = 2**,**2 5	
8 ← • 4	Überlege: 9 : 4 = 2, Rest 1; Schreibe: 2 als Ergebnis, **setze Komma.**
1 **0**	**Hole eine zusätzliche 0 herunter.**
8 ← • 4	Überlege: 10 : 4 = 2, Rest 2; Schreibe: 2 als Ergebnis.
2 **0**	Hole eine zusätzliche **0** herunter.
2 0 ← •4	Überlege: 20 : 4 = 5, Rest 0; Schreibe: 5 als Ergebnis.
0	

9 : 4 = 2,25

Grundrechenarten Aufgaben

Addition

a) 123876 + 103751 + 26692

b) 60318 + 166730 + 113752

c) 34674 + 43619 + 24824

d) 238264 + 275628 + 137924

Subtraktion

a) 820448 – 538829

b) 811135 – 461318

c) 983510 – 68702

d) 454313 – 198762

Multiplikation

a) 134 • 56 b) 2789 • 30 c) 1574 • 47 d) 7531 • 9864

Division

a) 5525 : 17 b) 9408 : 21 c) 8845 : 29 d) 13720 : 245

Gemischte Aufgaben

a) 1	**b)** 4	**c)** 5	**d)** 9	**e)** 6			**f)**	**g)**	**h)**
i)						**k)**			
l)					**m)**				
n)					**o)**				
p)					**q)**				
	r)				**s)**				

waagerecht:

a) 12469 + 1397 + 730 =14596

f) 54020 – 53638 =

i) 2543796 : 76 =

k) 34000 – 28709 =

l) 3607 + 798 + 4095 =

m) 60200 + 19895 + 5387 =

n) 46708 – 38807 =

o) 3599 • 5 =

p) 52052 – 48468 =

q) 81810 + 1810 + 10890 =

r) 60000 – 59173 =

s) 2384 + 3600 + 3016 =

senkrecht:

a) 70790 – 56917 =

b) 236895 + 99963 + 99100 =

c) 8711 • 62 =

d) 1000000 – 29853 =

e) 35319 : 579 =

f) 125699 + 352 + 198899 =

g) 299080 + 598942 + 888 =

h) 10001 + 9999 + 1250 =

k) 458321 – 402581 =

m) 100298 – 92099 =

Addition

a) 254319 b) 340800 c) 103117 d) 651816

Subtraktion

a) 281619 b) 349817 c) 914808 d) 255551

Multiplikation

a) 7504 b) 83670 c) 73978 d) 74285784

Division

a) 325 b) 448 c) 305 d) 56

Addition und Subtraktion gemischt

a) 1	**b)** 4	**c)** 5	**d)** 9	**e)** 6			**f)** 3	**g)** 8	**h)** 2
i) 3	3	4	7	1		**k)** 5	2	9	1
l) 8	5	0	0		**m)** 8	5	4	8	2
n) 7	9	0	1		**o)** 1	7	9	9	5
p) 3	5	8	4		**q)** 9	4	5	1	0
	r) 8	2	7		**s)** 9	0	0	0	

Addition

a) 56805
+ 6742
+ 55721
+ 89

b) 643741
+ 700735
+ 8421
+ 53874

c) 832994
+ 211532
+ 132646
+ 60066

d) 6846772
+ 144932
+ 456932
+ 2853100

Subtraktion

a) 9542
– 2866
– 956

b) 88745
– 8945
– 7731

c) 765735
– 73554
– 82968

d) 6543975
– 845062
– 2232313

Multiplikation

a) 6790 • 3005

b) 8877 • 7050

c) 357067 • 85

d) 3076 • 7007

Division

a) 2383770 : 5430

b) 778800 : 13200

c) 71568 : 568

d) 25360 : 80

Gemischte Aufgaben

a) 2	7	**b)** 2	2	5	■	**c)**		**d)**	**e)**	
	■	**f)**					■			■
g)	**h)**			■	**i)**		**k)**			**l)**
m)					■	**n)**				
o)				■	**p)**				■	
■		■	**q)**			■		■	**r)**	

waagerecht:

a) 363 • 75 =27225

c) 496 • 58 =

f) 916 • 84 =

g) 399 • 16 =

i) 13076 • 66 =

m) 879 • 66=

n) 3439 • 12 =

o) 163 • 31 =

p) 3 • 2287=

q) 26 • 19=

r) 23 • 4 =

senkrecht

a) 354825 : 15 =

b) 722930 : 26 =

c) 271128 : 11 =

d) 6320869 : 89 =

e) 680096 : 106 =

h) 520600 : 137 =

k) 313632 : 99 =

l) 384272 : 56 =

p) 50496 : 789 =

Addition

a) 119357 b) 1406771 c) 1237238 d) 10301736

Subtraktion

a) 5720 b) 72069 c) 609213 d) 3466600

Multiplikation

a) 20403950 b) 62582850 c) 30350695 d) 21553532

Division

a) 439 b) 59 c) 126 d) 317

Gemischte Aufgaben:

a) 2	7	**b)** 2	2	5		**c)** 2	8	**d)** 7	**e)** 6	8
3		**f)** 7	6	9	4	4		1	4	
g) 6	**h)** 3	8	4		**i)** 8	6	**k)** 3	0	1	**l)** 6
m) 5	8	0	1	4		**n)** 4	1	2	6	8
o) 5	0	5	3		**p)** 6	8	6	1		6
	0		**q)** 4	9	4		8		**r)** 9	2

1. Rechengesetze

Kommutativgesetz

$$a + b = b + a$$
$$a \bullet b = b \bullet a$$

Bei der Addition und Multiplikation können die Zahlen vertauscht werden, ohne da sich das Ergebnis verändert.

Assoziativgesetz

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$
$$a \bullet b \bullet c = (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$

Bei der Addition und der Multiplikation können Klammern bei Bedarf beliebig gesetzt werden.

Distributivgesetz

$$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$$
$$a \bullet (b - c) = a \bullet b - a \bullet c$$

Jede Zahl in der Klammer wird mit der Zahl vor der Klammer einzeln multipliziert.

Mit Hilfe der Rechengesetze kann man geschickt rechnen:

1. Beispiel: $40 + 28 + 12 = 40 + (28 + 12) = 40 + 40 = 80$

2. Beispiel: $3 \bullet 7 + 9 \bullet 7 = (3 + 9) \bullet 7 = 12 \bullet 7 = 84$

2. Rangfolge der Rechenoperationen

Rechenreihenfolge	*Beispiele:*
1. Klammern ausrechnen	$(3 + 1) \bullet 2 = 4 \bullet 2 = 8$
2. Punktrechnung ($\bullet$ und :)	$3 + 4 \bullet 2 = 3 + 8 = 11$
3. Strichrechnung (+ und –)	$3 + 4 - 2 = 7 - 2 = 5$

1. *Beispiel:*

$$5 \underset{2.}{\bullet} (3 \underset{1.}{+} 4) \underset{3.}{-} 18 = \boxed{}$$

$$\begin{aligned} 5 \bullet (3 + 4) - 18 &= \\ 5 \bullet \quad 7 \quad - 18 &= \\ 35 \quad - 18 &= 17 \end{aligned}$$

$$5 \bullet (3 + 4) - 18 = \underline{\underline{17}}$$

2. Beispiel:

$$18 \underset{2.}{\bullet} (80 \underset{1.}{-} 40) \underset{3.}{+} 10 \underset{2.}{:} (4 \underset{1.}{-} 2) \underset{3.}{+} 3 = \boxed{}$$

$$\begin{aligned} 18 \bullet (80 - 40) + 10 : (4 - 2) + 3 &= \\ 18 \bullet \quad 40 \quad + 10 : \quad 2 \quad + 3 &= \\ 720 \quad + \quad 5 \quad + 3 &= 728 \end{aligned}$$

$$18 \bullet (80 - 40) + 10 : (4 - 2) + 3 = \underline{\underline{728}}$$

3. Binomische Formeln

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2 \bullet a \bullet b + b^2$

$(26)^2 = (20 + 6)^2 = 20^2 + 2 \bullet 20 \bullet 6 + 6^2 = 400 + 240 + 36 = 676$

2. $(a - b)^2 = a^2 - 2 \bullet a \bullet b + b^2$

$(26)^2 = (30 - 4)^2 = 30^2 - 2 \bullet 30 \bullet 4 + 4^2 = 900 - 240 + 16 = 676$

3. $(a + b) \bullet (a - b) = a^2 - b^2$

$(23) \bullet (17) = (20 + 3) \bullet (20 - 3) = 20^2 - 3^2 = 400 - 9 = 391$

4. Quadratzahlen und Quadratwurzeln

Man erhält das Quadrat einer Zahl, indem man die Zahl mit sich selbst multipliziert.

$16^2 = 16 \bullet 16 = 256$ sprich: „16 Quadrat"
allg.: $a^2 = a \bullet a$

Man erhält die Quadratwurzel einer Zahl, indem man die positive Zahl sucht, die mit sich selbst multipliziert (d. h. quadriert) wieder die Zahl ergibt.

$\sqrt{25} = 5$, denn $5 \bullet 5 = 25$ sprich: „Quadratwurzel aus 25"
allg.: $\sqrt{a^2} = a$, denn $a \bullet a = a^2$

Quadrieren und Quadratwurzelziehen heben sich gegenseitig auf:

quadrieren 3^2

3 $\rightarrow$ **9**

3 $\leftarrow$ **9**

Quadratwurzel ziehen $\sqrt{9}$

a	1	2	3	4
a^2	1	4	9	16
$\sqrt{a^2}$	1	2	3	4

Rechengesetze

Rechne geschickt mit Hilfe der Rechengesetze!

a) $20 + 13 + 17$ b) $7 \bullet 5 \bullet 6$ c) $22 + 39 + 11 + 48$

d) $15 \bullet 3 + 5 \bullet 3$ e) $17 \bullet 6 - 12 \bullet 6$

Rangfolge der Rechenoperationen

a) $15 \bullet (4 - 2 + 3 \bullet 6 - 5) + 23 - 144 : 12$

b) $(43 + 78 - 40 \bullet 3) + 51 : 17 + 13 \bullet (33 - 21 + 9 - 7 \bullet 2)$

c) $66 : 11 + 55 - 45 + (100 : 10 + 6 \bullet 13) - 97$

Binomische Formeln

a) 22^2 b) 27^2 c) $35 \bullet 25$

Quadratzahlen und Quadratwurzeln

a	**a²**	$\sqrt{a}$
1		
4		
	81	
16		
		5
36		

Rechengesetze

a) 50 b) 210 c) 120

d) 60 e) 30

Rangfolge der Rechenoperationen

a) 236 b) 95 c) 7

Binomische Formeln

a) 484 b)729 c) 875

Quadratzahlen und Quadratwurzeln

a	**a²**	$\sqrt{a}$
1	1	1
4	16	2
9	**81**	3
16	256	4
25	625	**5**
36	1296	6

Rechengesetze

Rechne geschickt mit Hilfe der Rechengesetze!

a) $48 + 67 + 129 + 32 + 11 + 93$

b) $236 + 383 + 44 + 51 + 307 + 19$

c) $16 \bullet 40 + 3 \bullet 40 + 11 \bullet 40$

d) $18 \bullet 7 - 9 \bullet 7 + 12 \bullet 7 - 11 \bullet 7$

Rangfolge der Rechenoperationen

a) $22 - 15 + 5 \bullet 10 : 25 - 3 + 5 \bullet 2 + 87$

b) $22 - (15 + 5) \bullet 10 : 25 - 3 + 5 \bullet (2 + 87)$

c) Hier sind Fehler in der Reihenfolge der Rechenoperationen gemacht worden. Berechne zunächst das richtige Ergebnis. Ändere dann die Aufgabe so, dass das falsche Ergebnis richtig ist.

Falsche Rechnung	Richtiges Ergebnis	Geänderte Aufgabe
$120 - 40 : 4 = 20$	110	$(120 - 40) : 4$
$56 : 7 + 21 = 2$		
$66 + (53 + 15) \bullet 3 = 164$		

Binomische Formeln

a) 42^2

b) 37^2

c) $75 \bullet 65$

Quadratzahlen und Quadratwurzeln

a	**a^2**	$\sqrt{a}$
		6
	10000	
49		
	1	
400		
	256	

Rechengesetze

a) 380

b) 1040

c) 1200

d) 70

Rangfolge der Rechenoperationen

a) 103 b) 456

c)

Falsche Rechnung	Richtiges Ergebnis	Geänderte Aufgabe
120 – 40 : 4 = 20	110	(120 – 40) : 4
56 : 7 + 21 = 2	29	56 : (7 + 21)
66 + (53 + 15) • 3 = 164	270	66 + 53 + 15 • 3

Binomische Formeln

a) 1764 b) 1369 c) 4875

Quadratzahlen und Quadratwurzeln

a	**a²**	$\sqrt{a}$
36	1296	**6**
100	**10000**	10
49	2401	7
1	**1**	1
400	160000	20
16	**256**	4

Dezimalbruchrechnung — Grundlagen 1

Ein **Dezimalbruch** ist z. B. folgendermaßen aufgebaut:

2 1 8 , 5 6 7

2 Hunderter | 1 Zehner | 8 Einer | Komma | 5 Zehntel | 6 Hundertstel | 7 Tausendstel

Eine **Periode** ist eine Zahlenfolge der Nachkommastellen, die sich immer wiederholt, z. B. 1,**3333**... (2,**3636**...). Kurz schreibt man dafür $1,\overline{3}$ ($2,\overline{36}$) und liest „eins Komma Periode drei" („zwei Komma Periode drei sechs").

1. Brüche und Dezimalbrüche

Dezimalbrüche sind andere Schreibweisen für Bruchzahlen.

1. *Fall: Dezimalbruch in Bruch umwandeln*

1. Bsp.: $0,4 = \frac{4}{10}$

Schreibe die Zahlen hinter dem Komma als Zähler.

Für den Nenner zähle die Stellen hinter dem Komma.

2. Bsp.: $2,59 = 2\frac{59}{100}$

Ist es nur eine Stelle, schreibe als Nenner **10**.

Sind es zwei Stellen, schreibe als Nenner **100** usw.

3. Bsp.: $14,\overline{3} = 14\frac{3}{9}$

Vorsicht bei Dezimalbrüchen mit Periode:

Für den Nenner zähle die Stellen hinter dem Komma.

Ist es nur eine Stelle, schreibe als Nenner **9.**

Sind es zwei Stellen, schreibe als Nenner **99** usw.

2. *Fall: Bruch in Dezimalbruch umwandeln*

1. Bsp.: $\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5$

$1\frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 7 : 5 = 1,4$

Um einen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln, wird der Zähler durch den Nenner dividiert.

2. Bsp.: $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,333... = 0,\overline{3}$

$\frac{4}{11} = 4 : 11 = 0.3636... = 0,\overline{36}$

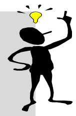
Bleibt beim Dividieren nie der Rest Null, so ergibt sich eine Periode.

2. Rechnen mit Dezimalbrüchen

Wenn in diesem Kapitel Schwierigkeiten auftreten, dann sollte zunächst das Kapitel „Grundrechenarten“ bearbeitet werden.

2.1. Addition von Dezimalbrüchen

Dezimalbrüche werden wie natürliche Zahlen addiert.
Beachte: links vom Komma: Einer unter Einer, Zehner unter Zehner
rechts vom Komma: Zehntel unter Zehntel, ...



Beispiel:

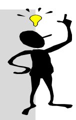
56,862 + 3,6 + 32,62 = ☐

5	6	,	8	6	2	
+	3	,	6	**0**	**0**	**Nullen ergänzen**
+ 3_1	2_2	,	6	2	**0**	
9	3	,	0	8	2	
1+3+0+5=9 Schreibe: 9	2+2+3+6=13 Schreibe: 3 Übertrage: 1		6+6+8=20 Schreibe: 0 Übertrage: 2	2+**0**+6=8 Schreibe: 8	**0**+**0**+2=2 Schreibe: 2	

56,862 + 3,6 + 32,62 = <u>93,082</u>

2.2. Subtraktion von Dezimalbrüchen

Dezimalbrüche werden wie natürliche Zahlen subtrahiert.
Beachte: links vom Komma: Einer unter Einer, Zehner unter Zehner
rechts vom Komma: Zehntel unter Zehntel, ...



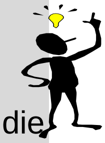
Beispiel:

22,513 – 13,09 – 5,929 = ☐

2	2	,	5	1	3	
– 1	3	,	0	9	**0**	**Null ergänzen**
– $_1$	5_1	,	9_2	2_1	9	
	3	,	4	9	4	
Überlege: (1+1)+_=2 Ergänze: (2)+0=2	Überlege: (1+5+3)+_=12 Ergänze: (9)+3=12 Schreibe: 3 Übertrage: 1		Überlege: (2+9+0)+_=15 Ergänze: (11)+4=15 Schreibe: 4 Übertrage: 1	Überlege: (1+2+9)+_=21 Ergänze: (12)+9=21 Schreibe: 9 Übertrage: 2	Überlege: (9+**0**)+_=13 Ergänze: (9)+4=13 Schreibe: 4 Übertrage: 1	

22,513 – 13,09 – 5,929 = <u>3,494</u>

2.3. Multiplikation von Dezimalbrüchen



Dezimalbrüche werden wie natürliche Zahlen multipliziert.

Für die **Kommasetzung** beachte:
Zähle die Nachkommastellen der Faktoren und addiere sie. Diese Summe ergibt die Anzahl der Nachkommastellen im Ergebnis.

Beispiel:

12,07 • 106,2 = $\boxed{}$

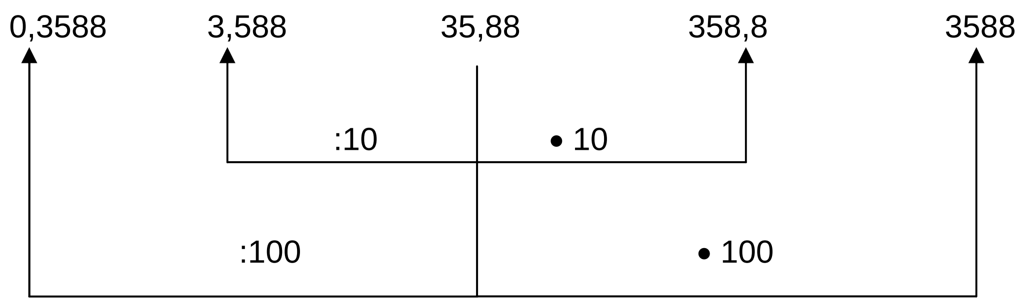
```
12,07 • 106,2
   1207000     Rechne: 1 • 1207 = 1207; Schreibe: 1207 mit  7 unter 1; Ergänze die Nullen.
      0000     Rechne: 0 • 1207 = 0; Schreibe: 0 unter die 0; Ergänze die Nullen.
     72420     Rechne: 6 • 1207 = 7242; Schreibe: 7242 mit  2 unter 6; Ergänze die Null.
      2414     Rechne: 2 • 1207 = 2414; Schreibe: 2414 mit  4 unter 2 .
     1
―――――――――――――
  1281,834
```

Kommasetzung: 2 Nachkommastellen (von 12,07) plus 1 Nachkommastelle (von 16,2) ergibt 3 Nachkommastellen im Ergebnis (1281,834).

12,07 • 106,2 = <u>1281,834</u>

Ein Dezimalbruch wird durch 10 100, 1000 ...) dividiert, indem man das Komma um eine Stelle (zwei Stellen, drei Stellen,...) nach **links** versetzt.

Ein Dezimalbruch wird mit 10 (100, 1000...) multipliziert, indem man das Komma um eine Stelle (zwei Stellen, drei Stellen,...) nach **rechts** versetzt.

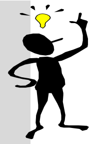


2.4. Division von Dezimalbrüchen

1. *Fall: Division durch eine natürliche Zahl*

Dezimalbrüche werden wie natürliche Zahlen dividiert.

Für die **Kommasetzung** beachte:
Nachdem die Einerstelle dividiert wurde, setze im Ergebnis das Komma.



1. *Bsp.:* 280,8 : 12 = $\boxed{}$

2 8 0,8 : 1 2 = 2 3**,** 4
2 4 • 12
4 0
3 6 • 12
4 8
4 8 • 12
0

Überlege: 28 : 12 = 2, Rest 4; Schreibe: 2 als Ergebnis.
Hole die 0 herunter.
Überlege: 40:12 = 3, Rest 4; Schreibe: 3 als Ergebnis. **Setze Komma**.
Hole die 8 herunter.
Überlege: 48 : 12 = 4, Rest 0; Schreibe: 4 als Ergebnis.

280,8 : 12 = 23,4

2. *Bsp.:* 19,2 : 15 = $\boxed{}$

1 9,2 : 1 5 = 1**,** 2 8
1 5 • 15
4 2
3 0 • 15
1 2 0
1 2 0 • 15
0

Überlege: 19:15 = 1, Rest 4; Schreibe: 1 als Ergebnis. **Setze Komma.**
Hole die 2 herunter.
Überlege: 42 : 15 = 2, Rest 12; Schreibe: 2 als Ergebnis.
Hole eine zusätzliche 0 herunter.
Überlege: 120 : 15 = 8 Rest 0; Schreibe: 8 als Ergebnis.

19,2 : 15 = 1,28

<u>*2. Fall: Division durch einen Dezimalbruch*</u>

Wenn der Teiler ein Dezimalbruch ist, muß die Aufgabe umgeschrieben werden. Erweitere die Aufgabe mit 10, 100, 1000, ..., bis der Teiler zu einer natürlichen Zahl wird.

1. Bsp.: 144 : 1,2 = $\boxed{}$

1 4 4 : 1,2 = 1440 : 12 = $\boxed{}$

• 10 • 10

Erweitere die Aufgabe mit 10 (Komma eine Stelle nach rechts)

Jetzt wird wie bei den natürlichen Zahlen dividiert.

```
1 4 4 0 : 1 2 = 1 2 0
1 2   ← • 12
  2 4
  2 4 ← • 12
    0 0
      0 ← • 12
      0
```

Überlege: 14 : 12 = 1, Rest 2; Schreibe: 1 als Ergebnis.
Hole die 4 herunter.
Überlege: 24 : 12 = 2, Rest 0; Schreibe: 2 als Ergebnis.
Hole die 0 herunter.
Überlege: 0 : 12 = 0, Rest 0; Schreibe: 0 als Ergebnis.

144 : 1,2 = <u><u>120</u></u>

3. Bsp.: 0,994 : 0,35 = $\boxed{}$

0 , 9 9 4 : 0,3 5 = 9 9,4 : 3 5 = $\boxed{}$

• 100 • 100

Erweitere die Aufgabe mit 100 (Komma zwei Stellen nach rechts)

```
9 9 ,4 : 3 5 = 2, 8 4
7 0   ← • 35
2 9 4
2 8 0 ← • 35
  1 4 0
  1 4 0 ← • 35
      0
```

Überlege: 99:35=2, Rest 29; Schreibe: 2 als Ergebnis. **Setze Komma.**
Hole die 4 herunter.
Überlege: 294 : 35 = 8, Rest 14; Schreibe: 8 als Ergebnis.
Hole eine zusätzliche 0 herunter.
Überlege: 140 : 35 = 4, Rest 0; Schreibe: 4 als Ergebnis.

0,994 : 0,35 = <u><u>2,84</u></u>

Addition

a) 231,45	b) 6598,098	c) 84964,849	d) 986
+ 505,2	+ 8950,9	+ 74933,009	+ 453,89
+ 23,04	+ 87,432	+ 8795,8	+ 987,649

Subtraktion

a) 8575,59	b) 64398,065	c) 638,638	d) 984,53
– 102,34	– 23198,676	– 65,90	– 537,12
– 151,04	– 999,8	– 154,007	– 90,099

Multiplikation

a) 289,3 • 6,91 b) 95,6 • 0,31 c) 0,78 • 9,65 d) 18,43 • 34,89

Division

a) 253,92 : 0,8 b) 113,04 : 0,9 c) 110,9 : 0,5 d) 88,69 : 3,5

Umwandlung: Dezimalbruch in Bruch und Bruch in Dezimalbruch

a) 0,25 b) 0,375 c) 1,15 d) $2,\overline{3}$

e) $\frac{1}{20}$ f) $\frac{9}{20}$ g) $1\frac{1}{5}$ h) $\frac{1}{6}$

Addition

a) 759,69	b) 15636,430	c) 168693,658	d) 2427,539

Subtraktion

a) 8322,21	b) 40199,589	c) 418,731	d) 357,311

Multiplikation

a) 1999,063	b) 29,636	c) 7,527	d) 643,0227

Division

a) 317,4	b) 125,6	c) 221,8	d) 25,34

Umwandlung: Dezimalbruch in Bruch und Bruch in Dezimalbruch

a) $\frac{1}{4}$	b) $\frac{3}{8}$	c) $1\frac{3}{20}$	d) $2\frac{1}{3}$
e) 0,05	f) 0,45	g) 1,2	h) $0,1\overline{6}$

Dezimalbruchrechnung Aufgaben

Addition

Schreibe untereinander und addiere:

a) 2,72 + 210 + 959 + 16,5 + 19,46 + 1,69 + 6,31

b) 1527,4 + 247,05 + 118 + 89,97 + 0,53 + 543,007

c) 0,77 + 1,883 + 31,6 + 134,4 + 60,5 + 143,98

Subtraktion

Schreibe untereinander und addiere:

a) 429,38 – 179 – 2,73 – 2,46 – 189,6 – 15,39

b) 2755,52 – 120 – 3,23 – 83,5 – 2357 – 7,59 – 146

c) 961,86 – 302 – 574 – 28,6 – 25,88 – 2,28

Multiplikation

a) 229,45 • 37,54   b) 179,69 • 28,2   c) 176,01 • 2,95   d) 144,5 • 21,32

Division

a) 335,04 : 0,4   b) 21,063 : 0,70   c) 3,3728 : 0,04   d) 18,36 : 6,8

Umwandlung: Dezimalbruch in Bruch und Bruch in Dezimalbruch

a) 0,92   b) 0,800   c) 2,0625   d) $0,\overline{45}$

e) $\frac{4}{5}$ f) $\frac{123}{500}$ g) $81\frac{2}{9}$ h) $6\frac{2}{3}$

Schreibe ab und ergänze die fehlenden Zahlen in einer anderen Farbe!!!

```
a)      0,0 4 □        b)      3 4, 7 6 □      c)   2 6, 5 2      d)  □ □ 8 0, 0 2
    + □□,3 0 7            + 1 □ □, 0 □ 2        –    □, 4 □        –    4 5 0, □ 9
    +   7,□ □ 3           + 3 4 8, □ 4 8        –    6, □ 9        –    6 3 □, 0 8
       19,3 7 0             □ 1 0, 8 5 2          □ 9, 6 6              6 □ 7, 0 □
```

```
e)  1 □,6 • 3,□      f)  □,□□ • □,2       g)  0, 2 5 8 : □ = 0, 0 □ 6
        5 2 8               2 2 5                2 4
        1 2 □ 2               1 □ 0                1 8
        □ 5,1 2             □,□ 0 0                1 8
                                                     0
```

h) □□□,□ : 9 = 25,8

Dezimalbruchrechnung Lösungen

Addition

a) 1215,68 b) 2525,957 c) 373,133

Subtraktion

a) 40,2 b) 38,2 c) 29,1

Multiplikation

a) 8613,553 b) 5067,258 c) 519,2295 d) 3080,74

Division

a) 837,6 b) 30,09 c) 84,32 d) 2,7

Umwandlung: Dezimalbruch in Bruch und Bruch in Dezimalbruch

a) $\frac{23}{25}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $2\frac{1}{16}$ d) $\frac{5}{11}$

e) 0,8 f) 0,246 g) $81,\overline{2}$ h) $6,\overline{6}$

Ergänzungsaufgaben

a)
0,0 4 **0**
\+ **12**,3 0 7
\+ 7,**0** **2** 3
19,3 7 0

b)
3 4, 7 6 **2**
\+ 1 **2** **8**, 0 **4** 2
\+ 3 4 8, **0** 4 8
5 1 0, 8 5 2

c)
2 6, 5 2
– **0**, 4 **7**
– 6, **3** 9
1 9, 6 6

d)
17 8 0, 0 2
– 4 5 0, **8** 9
– 6 3 **2**, 0 8
6 **9** 7, 0 **5**

e)
1 **7**,6 • 3,**7**
5 2 8
1 2 **3** 2
6 5,1 2

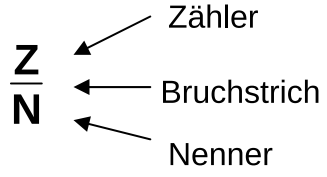
f)
0,**7** **5** • **3**,2
2 2 5
1 **5** 0
2,**4** 0 0

g)
0, 2 5 8 : **3** = 0, 0 **8** 6
2 4
1 8
1 8
0

h) **232,2**: 9 = 25,8

1. Grundlagen der Bruchrechnung

Bruch



Ein Bruch kann als Quotient von zwei natürlichen Zahlen aufgefasst werden. Der Bruchstrich und das Divisionszeichen haben die gleiche Bedeutung: $\frac{1}{2} = 1 : 2$

Gleichnamiger Bruch

Brüche, die den gleichen Nenner haben, heißen gleichnamig.

Beispiel: $\frac{3}{10}$; $\frac{7}{10}$

Gemischte Schreibweise

Die gemischte Schreibweise besteht aus einer natürlichen Zahl und einem Bruch.

Beispiel: $2\,\frac{1}{2}$ (das bedeutet $2 + \frac{1}{2}$ und nicht $2 \bullet \frac{1}{2}$)

Kehrwert

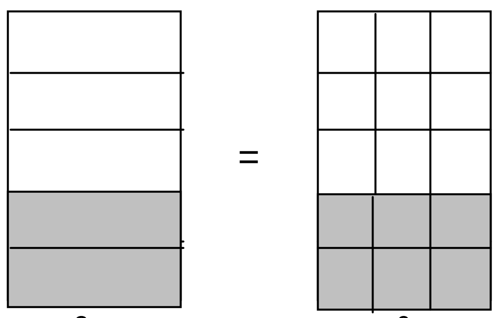
Den Kehrwert eines Bruches erhält man, indem man Zähler und Nenner vertauscht.

Beispiel: Der Kehrwert von $\frac{3}{4}$ ist $\frac{4}{3}$.

Erweitern von Brüchen

Beim Erweitern eines Bruches werden Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert.

Beispiel: $\frac{2}{5} = \frac{2 \bullet 3}{5 \bullet 3} = \underline{\underline{\frac{6}{15}}}$ erweitern mit 3



$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$

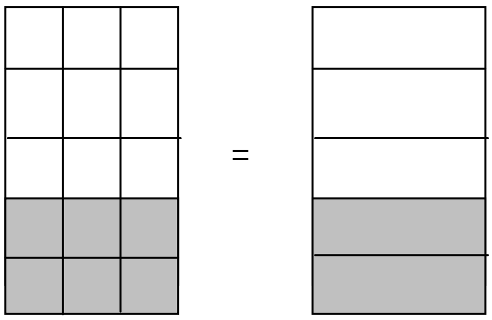
Beide Brüche bezeichnen dieselbe Bruchzahl!

Kürzen von Brüchen

Beim Kürzen eines Bruches werden Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert.

Beispiel: $\frac{6}{15} = \frac{6:3}{15:3} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$ kürzen durch 3

Schreibweise: $\frac{6}{15} = \frac{{}^{2}\cancel{6}}{\cancel{15}_{5}} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$



$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

Beide Brüche bezeichnen dieselbe Bruchzahl!

Ergebnisse sollten grundsätzlich so weit wie möglich gekürzt werden!

Vergleich von Brüchen

Brüche werden verglichen, indem man die Nenner gleich macht und anschließend die Zähler vergleicht.

Beispiel: Ausgangsbrüche: $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$

gleichnamig machen: $\frac{3}{4} = \frac{3 \bullet 3}{4 \bullet 3} = \frac{9}{12}$ und $\frac{5}{6} = \frac{5 \bullet 2}{6 \bullet 2} = \frac{10}{12}$

vergleichen: $\frac{9}{12} < \frac{10}{12}$

2. Umwandlung von Brüchen

1. *Fall: Bruch in gemischte Schreibweise umwandeln*

1. Bsp.: $\frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$

2. Bsp.: $\frac{62}{19} = \frac{57}{19} + \frac{5}{19} = 3 + \frac{5}{19} = 3\frac{5}{19}$

Wenn der Zähler größer ist als der Nenner, kann der Bruch in eine gemischte Schreibweise umgewandelt werden.

2. *Fall: Gemischte Schreibweise in Bruch umwandeln*

1. Bsp.: $2\frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

2. Bsp.: $5\,\frac{2}{9} = 5 + \frac{2}{9} = \frac{45}{9} + \frac{2}{9} = \frac{47}{9}$

Bei der Umwandlung wird die natürliche Zahl in einen Bruch umgewandelt und zu dem Bruch aus der gemischten Schreibweise addiert.

3. *Fall: Dezimalbruch in Bruch umwandeln*

1. Bsp.: $0{,}4 = \frac{4}{10}$

2. Bsp.: $2{,}59 = 2\,\frac{59}{100}$

3. Bsp.: $14{,}\overline{3} = 14\,\frac{3}{9}$

Schreibe die Zahlen hinter dem Komma als Zähler.
Für den Nenner zähle die Stellen hinter dem Komma.
Ist es nur eine Stelle, schreibe als Nenner **10**.
Sind es zwei Stellen, schreibe als Nenner **100** usw.
Vorsicht bei Dezimalbrüchen mit Periode:
Für den Nenner zähle die Stellen hinter dem Komma.
Ist es nur eine Stelle, schreibe als Nenner **9.**
Sind es zwei Stellen, schreibe als Nenner **99** usw.

4. *Fall: Bruch in Dezimalbruch umwandeln*

1. Bsp.: $\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5$

$1\frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 7 : 5 = 1{,}4$

Um einen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln, wird der Zähler durch den Nenner dividiert.

2. Bsp.: $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}333... = 0{,}\overline{3}$

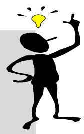
$\frac{4}{11} = 4 : 11 = 0.3636... = 0{,}\overline{36}$

Bleibt beim Dividieren nie der Rest Null, so ergibt sich eine Periode. Eine **Periode** ist eine Zahlenfolge der Nachkommastellen, die sich immer wiederholt.

3. Rechnen mit Brüchen

3.1. Addition von Brüchen

Brüche werden addiert, indem sie zuerst auf den gleichen Nenner (Hauptnenner) gebracht werden. Anschließend werden die Zähler addiert.
Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner.



1. Fall: Bruch plus Bruch

Bsp.: $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \boxed{}$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1 \bullet 4}{5 \bullet 4} + \frac{1 \bullet 5}{4 \bullet 5} = \frac{4}{20} + \frac{5}{20} = \underline{\underline{\frac{9}{20}}}$$

2. Fall: Bruch plus natürliche Zahl

Bsp.: $\frac{5}{6} + 3 = \boxed{}$

$$\frac{5}{6} + 3 = 3 + \frac{5}{6} = \underline{\underline{3\frac{5}{6}}}$$

3. Fall: Bruch plus gemischte Schreibweise

Bsp.: $\frac{2}{5} + 3\frac{1}{2} = \boxed{}$

$$\frac{2}{5} + 3\frac{1}{2} = \frac{2}{5} + \frac{7}{2} = \frac{2 \bullet 2}{5 \bullet 2} + \frac{7 \bullet 5}{2 \bullet 5}$$
$$= \frac{4}{10} + \frac{35}{10} = \frac{39}{10} = \underline{\underline{3\frac{9}{10}}}$$

Wandle zunächst die gemischte Schreibweise in einen Bruch um, addiere dann wie gewohnt.

4. Fall: Gemischte Schreibweise plus gemischte Schreibweise

Bsp.: $3\frac{4}{5} + 2\frac{1}{3} = \boxed{}$

$$3\frac{4}{5} + 2\frac{1}{3} = \frac{19}{5} + \frac{7}{3} = \frac{19 \bullet 3}{5 \bullet 3} + \frac{7 \bullet 5}{3 \bullet 5}$$
$$= \frac{57}{15} + \frac{35}{15} = \frac{92}{15} = \underline{\underline{6\frac{2}{15}}}$$

Wandle zunächst die gemischten Schreibweisen in Brüche um. Addiere dann wie gewohnt.

5. Fall: Gemischte Schreibweise plus natürliche Zahl

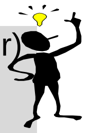
Bsp.: $8\frac{3}{5} + 5 = \boxed{}$

$$8\frac{3}{5} + 5 = 8 + \frac{3}{5} + 5 = 8 + 5 + \frac{3}{5} = \underline{\underline{13\frac{3}{5}}}$$

Addiere die natürlichen Zahlen. Der Bruch bleibt unverändert.

3.2. Subtraktion von Brüchen

Brüche werden subtrahiert, indem sie zuerst auf den gleichen Nenner (Hauptnenner) gebracht werden. Anschließend werden die Zähler subtrahiert.
Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner.



1. *Fall: Bruch minus Bruch*

Bsp.: $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \boxed{}$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{1 \bullet 7}{5 \bullet 7} - \frac{1 \bullet 5}{7 \bullet 5} = \frac{7}{35} - \frac{5}{35} = \underline{\underline{\frac{2}{35}}}$$

2. *Fall: Bruch minus natürliche Zahl*

Bsp.: $\frac{22}{6} - 3 = \boxed{}$

$$\frac{22}{6} - 3 = \frac{22}{6} - \frac{18}{6} = \frac{4}{6} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Wandle zunächst die natürliche Zahl in einen Bruch um. Subtrahiere dann wie gewohnt.

3. *Fall: Bruch minus gemischte Schreibweise*

Bsp.: $\frac{23}{5} - 3\frac{1}{2} = \boxed{}$

$$\frac{23}{5} - 3\frac{1}{2} = \frac{23}{5} - \frac{7}{2} = \frac{23 \bullet 2}{5 \bullet 2} - \frac{7 \bullet 5}{2 \bullet 5}$$
$$= \frac{46}{10} - \frac{35}{10} = \frac{11}{10} = \underline{\underline{1\frac{1}{10}}}$$

Wandle zunächst die gemischte Schreibweise in einen Bruch um, subtrahiere dann wie gewohnt.

4. *Fall: Gemischte Schreibweise minus gemischte Schreibweise*

Bsp.: $3\frac{1}{5} - 2\frac{1}{3} = \boxed{}$

$$3\frac{1}{5} - 2\frac{1}{3} = \frac{16}{5} - \frac{7}{3} = \frac{16 \bullet 3}{5 \bullet 3} - \frac{7 \bullet 5}{3 \bullet 5}$$
$$= \frac{48}{15} - \frac{35}{15} = \underline{\underline{\frac{13}{15}}}$$

Wandle zunächst die gemischten Schreibweisen in Brüche um. Subtrahiere dann wie gewohnt.

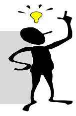
5. *Fall: Gemischte Schreibweise minus natürliche Zahl*

Bsp.: $8\frac{3}{5} - 5 = \boxed{}$

$$8\frac{3}{5} - 5 = 8 + \frac{3}{5} - 5 = 8 - 5 + \frac{3}{5} = \underline{\underline{3\frac{3}{5}}}$$

Subtrahiere die natürlichen Zahlen. Der Bruch bleibt unverändert.

3.3. Multiplikation von Brüchen



Brüche werden multipliziert, indem Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert werden. Dabei kann „über Kreuz“ gekürzt werden.

1. *Fall: Bruch mal Bruch*

Bsp.: $\frac{3}{5} \bullet \frac{15}{27} = \boxed{}$

$$\frac{3}{5} \bullet \frac{15}{27} = \frac{{}^{1}\cancel{3} \bullet {}^{3}\cancel{15}}{\cancel{5}_{1} \bullet \cancel{27}_{9}} = \frac{1 \bullet {}^{1}\cancel{3}}{1 \bullet \cancel{9}_{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

2. *Fall: Bruch mal gemischte Scheibweise*

Bsp.: $\frac{4}{5} \bullet 3\frac{4}{7} = \boxed{}$

$$\frac{4}{5} \bullet 3\frac{4}{7} = \frac{4}{5} \bullet \frac{25}{7} = \frac{4 \bullet {}^{5}\cancel{25}}{\cancel{5}_{1} \bullet 7}$$

$$= \frac{3 \bullet 5}{1 \bullet 7} = \frac{15}{7} = \underline{\underline{2\frac{1}{7}}}$$

Wandle zunächst die gemischte Schreibweise in einen Bruch um. Multipliziere dann wie gewohnt.

3. *Fall: Bruch mal natürliche Zahl*

Bsp.: $\frac{7}{8} \bullet 4 = \boxed{}$

$$\frac{7}{8} \bullet 4 = \frac{7 \bullet {}^{1}\cancel{4}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{7}{2} = \underline{\underline{3\frac{1}{2}}}$$

Multipliziere die natürliche Zahl mit dem Zähler.

3.4. Division von Brüchen

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert.

1. *Fall: Bruch geteilt durch Bruch*

Bsp.: $\frac{3}{20} : \frac{6}{25} = \boxed{}$

$$\frac{3}{20} : \frac{6}{25} = \frac{3}{20} \bullet \frac{25}{6} = \frac{{}^{1}\cancel{3} \bullet {}^{5}\cancel{25}}{\cancel{20}_{4} \bullet \cancel{6}_{2}} = \frac{1 \bullet 5}{4 \bullet 2} = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$$

2. *Fall: Gemischte Schreibweise geteilt durch Bruch*

Bsp.: $3\frac{1}{8} : \frac{1}{2} = \boxed{}$

$$3\frac{1}{8} : \frac{1}{2} = \frac{25}{8} \bullet \frac{2}{1} = \frac{25 \bullet {}^{1}\cancel{2}}{\cancel{8}_{4} \bullet 1} = \frac{25}{4} = \underline{\underline{6\frac{1}{4}}}$$

Wandle zunächst die gemischte Schreibweise in einen Bruch um. Dividiere dann wie gewohnt.

3. *Fall: Natürliche Zahl geteilt durch Bruch*

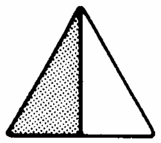
Bsp.: $6 : \frac{3}{20} = \boxed{}$

$$6 : \frac{3}{20} = \frac{6}{1} \bullet \frac{20}{3} = \frac{{}^{2}\cancel{6} \bullet 20}{1 \bullet \cancel{3}_{1}} = \underline{\underline{40}}$$

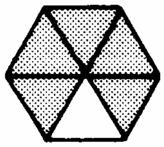
Wandle zunächst die natürliche Zahl in einen Bruch um. Dividiere dann wie gewohnt.

Bestimmung von Bruchteilen

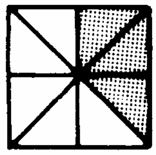
a)



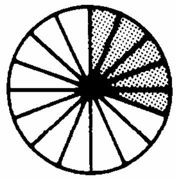
b)



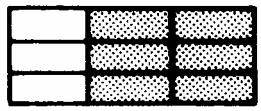
c)



d)



e)



Kürzen von Brüchen

a) $\frac{20}{100}$ b) $\frac{24}{56}$ c) $\frac{54}{63}$ d) $\frac{38}{57}$ e) $\frac{33}{110}$ f) $\frac{51 \bullet 84}{28 \bullet 136}$

Vergleichen von Brüchen

a) $\frac{1}{4}; \frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{6}; \frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{5}; \frac{4}{9}$ d) $\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{1}$

Umformung von Brüchen in gemischte Schreibweisen und umgekehrt

a) $1\frac{1}{2}$ b) $\frac{19}{8}$ c) $\frac{10}{7}$ d) $\frac{13}{4}$ e) $10\frac{3}{7}$ f) $5\frac{8}{9}$

Umformung von Brüchen in Dezimalzahlen

a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{9}{25}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{6}{8}$ e) $1\frac{1}{5}$ f) $4\frac{1}{6}$

Rechnen mit Brüchen

a) $\frac{6}{9} + \frac{7}{12}$ b) $\frac{7}{6} - \frac{2}{9}$ c) $\frac{1}{15} + \frac{1}{3}$ d) $\frac{15}{8} : \frac{5}{16}$ e) $\frac{15}{14} : \frac{3}{7}$ f) $\frac{5}{6} \bullet \frac{12}{25}$

g) $\frac{1}{4} \bullet \frac{22}{9}$ h) $\frac{8}{7} - \frac{1}{2}$

Bestimmung von Bruchteilen

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{5}{16}$ e) $\frac{4}{9}$

Kürzen von Brüchen

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{6}{7}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{10}$ f) $\frac{9}{8}$

Vergleichen von Brüchen

a) $\frac{1}{4} < \frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{6} < \frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{5} > \frac{4}{9}$ d) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{1}$

Umformung von Brüchen in gemischte Schreibweisen und umgekehrt

a) $\frac{3}{2}$ b) $2\frac{3}{8}$ c) $1\frac{3}{7}$ d) $3\frac{1}{4}$ e) $\frac{73}{7}$ f) $\frac{53}{9}$

Umformung von Brüchen in Dezimalzahlen

a) 0,05 b) 0,36 c) 0,7 d) 0,75 e) 1,2 f) $4{,}1\overline{6}$

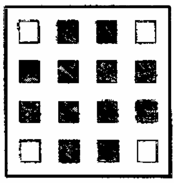
Rechnen mit Brüchen

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{17}{8}$ c) $\frac{2}{5}$ d) 6 e) $\frac{5}{2}$ f) $\frac{2}{5}$

g) $\frac{11}{18}$ h) $\frac{9}{14}$

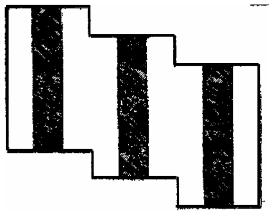
Bestimmung von Bruchteilen

a)

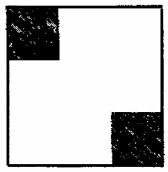


b)

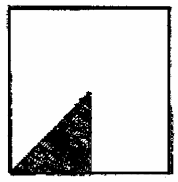
c)



d)



e)



Kürzen von Brüchen

a) $\frac{78 \bullet 42}{28 \bullet 91}$ b) $\frac{130 \bullet 90}{30 \bullet 13}$ c) $\frac{57 \bullet 72}{54 \bullet 76}$ d) $\frac{13 \bullet 80}{120 \bullet 104}$ e) $\frac{90 \bullet 72}{144 \bullet 126}$

Vergleichen von Brüchen

a) $\frac{7}{8}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{11}{12}$ b) $\frac{42}{50}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{30}{35}$ c) $\frac{245}{500}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{8}{125}$ d) $\frac{1}{18}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{3}{4}$

Umformung von Brüchen in gemischte Schreibweisen und umgekehrt

a) $31\frac{5}{6}$ b) $2\frac{17}{25}$ c) $7\frac{13}{20}$ d) $\frac{82}{40}$ e) $\frac{60}{13}$ f) $\frac{52}{6}$

Umformung von Brüchen in Dezimalzahlen

a) $1020\frac{88}{120}$ b) $86\frac{17}{400}$ c) $21\frac{73}{125}$ d) $\frac{19}{20}$ e) $\frac{1}{18}$ f) $\frac{4}{15}$

Rechnen mit Brüchen

a) $3\frac{4}{5} + 2\frac{3}{7}$ b) $3\frac{4}{9} - 1\frac{3}{11}$ c) $7\frac{2}{5} : 8\frac{7}{8}$ d) $3\frac{2}{5} + \frac{2}{15}$

e) $4\frac{15}{8} : \frac{5}{16}$ f) $6\frac{5}{6} \bullet \frac{24}{35}$

Bestimmung von Bruchteilen

a) $\frac{12}{16}$ b) $\frac{2}{4}$ c) $\frac{3}{9}$ d) $\frac{2}{9}$ e) $\frac{1}{8}$

Kürzen von Brüchen

a) $\frac{9}{7}$ b) 30 c) 1 d) $\frac{1}{12}$ e) $\frac{5}{14}$

Vergleichen von Brüchen

a) $\frac{7}{8} < \frac{8}{9} < \frac{11}{12}$ b) $\frac{42}{50} < \frac{6}{7} = \frac{30}{35}$ c) $\frac{245}{500} > \frac{1}{8} > \frac{8}{125}$ d) $\frac{1}{18} < \frac{2}{9} < \frac{3}{4}$

Umformung von Brüchen in gemischte Schreibweisen und umgekehrt

a) $\frac{191}{6}$ b) $\frac{67}{25}$ c) $\frac{153}{20}$ d) $2\frac{1}{20}$ e) $4\frac{8}{13}$ f) $8\frac{2}{3}$

Umformung von Brüchen in Dezimalzahlen

a) $1020{,}7\overline{3}$ b) 86,0425 c) 21,584 d) 0,95

e) $0{,}0\overline{5}$ f) $0{,}2\overline{6}$

Rechnen mit Brüchen

a) $\frac{218}{35}$ b) $\frac{215}{99}$ c) $\frac{296}{355}$ d) $\frac{53}{15}$

e) $\frac{94}{5}$ f) $\frac{164}{35}$

Bruchrechnung Lösungen

Bestimmung von Bruchteilen

a) $\frac{12}{16}$ b) $\frac{2}{4}$ c) $\frac{3}{9}$ d) $\frac{2}{9}$ e) $\frac{1}{8}$

Kürzen von Brüchen

a) $\frac{9}{7}$ b) 30   c) 1   d) $\frac{1}{12}$ e) $\frac{5}{14}$

Vergleichen von Brüchen

a) $\frac{7}{8} < \frac{8}{9} < \frac{11}{12}$ b) $\frac{42}{50} < \frac{6}{7} = \frac{30}{35}$ c) $\frac{245}{500} > \frac{1}{8} > \frac{8}{125}$ d) $\frac{1}{18} < \frac{2}{9} < \frac{3}{4}$

Umformung von Brüchen in gemischte Schreibweisen und umgekehrt

a) $\frac{191}{6}$ b) $\frac{67}{25}$ c) $\frac{153}{20}$ d) $2\frac{1}{20}$ e) $4\frac{8}{13}$ f) $8\frac{2}{3}$

Umformung von Brüchen in Dezimalzahlen

a) $1020{,}7\overline{3}$ b) 86,0425   c) 21,584   d) 0,95

e) $0{,}0\overline{5}$ f) $0{,}2\overline{6}$

Rechnen mit Brüchen

a) $\frac{218}{35}$ b) $\frac{215}{99}$ c) $\frac{296}{355}$ d) $\frac{53}{15}$

e) $\frac{94}{5}$ f) $\frac{164}{35}$

1. Positive und negative Zahlen

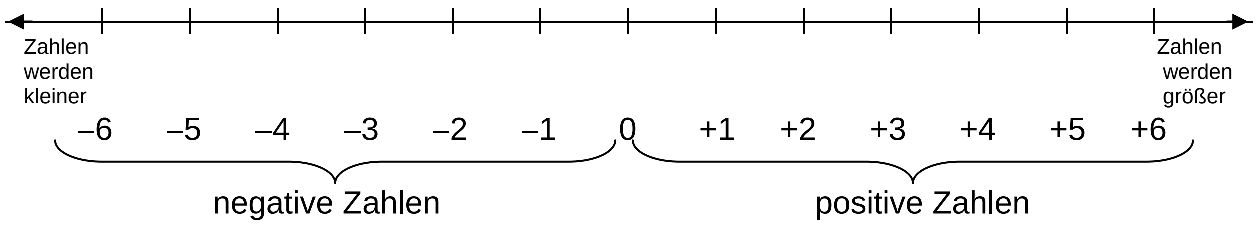
Zahlen, vor denen ein **+** steht, heißen **positive** Zahlen.

Zahlen, vor denen ein – steht, heißen **negative** Zahlen.

Alle ungeteilten positiven und negativen Zahlen und die Zahl Null ergeben zusammen die Menge der ganzen Zahlen. Sie wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet.

Negative Zahlen kennt man z. B. vom Wetterbericht im Winter: – 5° C.
Auch beim Umgang mit Geld gibt es negative Zahlen. Diese werden als Schulden bezeichnet (Karls Kontostand: – 2000 DM bedeutet, Karl hat 2000 DM Schulden).

Positive und negative Zahlen lassen sich auf einer Zahlengeraden darstellen:



+ 4 steht links von + 6, also gilt: + 4 < + 6
+ 3 steht links von + 4, also gilt: + 3 < + 4
– 2 steht links von + 1, also gilt: – 2 < + 1
– 6 steht links von – 2, also gilt: – 6 < – 2

2. Rechnen mit ganzen Zahlen

Rechenzeichen und Vorzeichen müssen unterschieden werden.

Rechenzeichen

(– 3) + (– 2)

Vorzeichen

Um Vor- und Rechenzeichen zu unterscheiden, wird um das Vorzeichen und die dazugehörige Zahl eine Klammer gemacht.

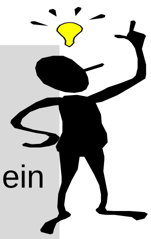
Bei positiven Zahlen kann das Vorzeichen und die Klammer weggelassen werden:

Beispiel: (+ 3) = 3

2.1. Addition und Subtraktion

Bei der Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen können acht Fälle auftreten:

(+ 3) + (+ 5) = (+ 8)	(+ 3) – (+ 5) = (– 2)
(+ 3) + (– 5) = (– 2)	(+ 3) – (– 5) = (+ 8)
(– 3) + (+ 5) = (+ 2)	(– 3) – (+ 5) = (– 8)
(– 3) + (– 5) = (– 8)	(– 3) – (– 5) = (+ 2)



Sind das Rechenzeichen und das nachfolgende Vorzeichen gleich, so wird ein positives Rechenzeichen benutzt und das Vorzeichen fällt weg.

+ (+a) = + a **– (– a) = + a**

Sind das Rechenzeichen und das nachfolgende Vorzeichen verschieden, so wird ein negatives Rechenzeichen benutzt und das Vorzeichen fällt weg.

– (+ a) = – a **+ (– a) = – a**

(+ 3) + (+ 5) = 3 + 5 = 8	(+ 3) – (+ 5) = 3 – 5 = (– 2)
(+ 3) + (– 5) = 3 – 5 = (– 2)	(+ 3) – (– 5) = 3 + 5 = 8
(– 3) + (+ 5) = (– 3) + 5 = 2	(– 3) – (+ 5) = (– 3) – 5 = (– 8)
(– 3) + (– 5) = (– 3) – 5 = (– 8)	(– 3) – (– 5) = (– 3) + 5 = 2

Steht ein negatives Rechenzeichen vor einer Klammer, so werden alle Rechenzeichen in der Klammer beim Auflösen der Klammer umgedreht.

Beispiel: 15 – (18 + 19) = 15 – 18 – 19 = (– 22)
33 – (7 + 18 – 12) = 33 – 7 – 18 + 12 = 20

2.2. Multiplikation und Division

Bei der Multiplikation und Division von ganzen Zahlen können acht Fälle auftreten:

(+ 10) • (+ 5) = (+ 50)	(+ 10) : (+ 5) = (+ 2)
(+ 10) • (– 5) = (– 50)	(+ 10) : (– 5) = (– 2)
(– 10) • (+ 5) = (– 50)	(– 10) : (+ 5) = (– 2)
(– 10) • (– 5) = (+ 50)	(– 10) : (– 5) = (+ 2)

Sind die Vorzeichen gleich, so ist das Ergebnis positiv.
Sind die Vorzeichen verschieden, so ist das Ergebnis negativ.

•	+	–
+	+	–
–	–	+

:	+	–
+	+	–
–	–	+

Addition und Subtraktion

a) (+ 58) + (– 38) + (+ 16) + (– 73)

b) (+ 113) + (– 93) + (– 181)

c) (+ 113) – (+ 97) – (– 83) – (+ 212)

d) (+ 11) – (+ 18) – (– 28)

e) (+ 33) + (– 77) – (– 11)

f) (+ 12) – (– 13) – (+ 14) + (– 15)

g) 38 – (55 + 73)

h) 7 – (12 + 13 – 30)

Multiplikation und Division

a) (+ 7) • (– 15)

b) (+ 13) • (+ 3)

c) (– 18) • (– 4)

d) (– 30) • (+ 7)

e) (– 256) : (– 16)

f) (+ 396) : (+ 6)

g) (– 164) : (+ 4)

h) (– 1002) : (+ 2)

Addition und Subtraktion

a) (– 37)	b) (– 161)
c) (– 113)	d) (+ 21)
e) (– 33)	f) (– 4)
g) (– 90)	h) 12

Multiplikation und Division

a) (– 105)	b) (+ 39)
c) (+ 72)	d) (– 210)
e) (+ 16)	f) (+ 66)
g) (– 41)	h) (– 501)

Addition und Subtraktion

a) 158 + (– 17) + 16 + (– 62)

b) 103 + (– 77) + (– 306)

c) 1113 – (+ 972) – (– 183) – (+ 15)

d) 333 – (+ 78) – (– 269)

e) 543 + (– 123) – (– 76)

f) 413 – (– 801) – (+ 27) + (– 101)

g) 69 – (327 + 81)

h) 45 – (72 + (– 93) + 168 + (– 15))

Multiplikation und Division

a) 12 • (– 7)

b) 23 • 4

c) (– 25) • (– 7)

d) (– 34) • 11

e) (– 625) : (– 25)

f) 972 : 6

g) (– 264) : 4

h) (– 675) : 15

Addition und Subtraktion

a) 95 b) (– 280)

c) 309 d) 524

e) 496 f) 1086

g) (– 339) h) (– 87)

Multiplikation und Subtraktion

a) (– 84) b) 92

c) 175 d) (– 374)

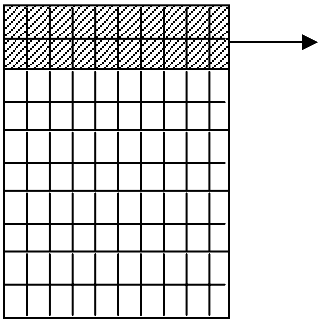
e) 25 f) 162

g) (– 66) h) (– 45)

1. Einführung in die Prozentrechnung

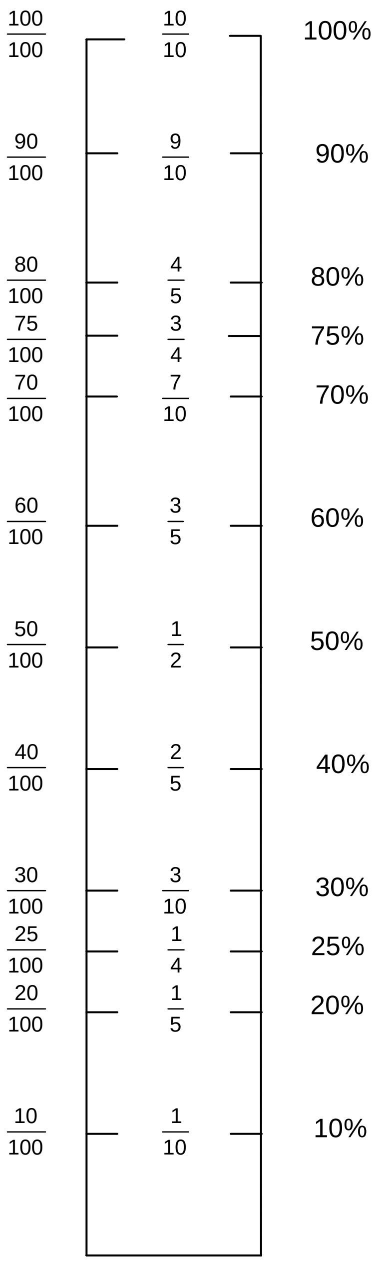
Prozentrechnung ist Hundertstelrechnung. Prozent bedeutet Hundertstel.

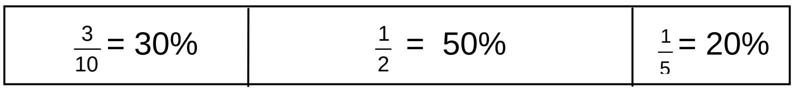
25 % (sprich „25 Prozent“) ist eine andere Schreibweise für den Bruch $\frac{25}{100}$.

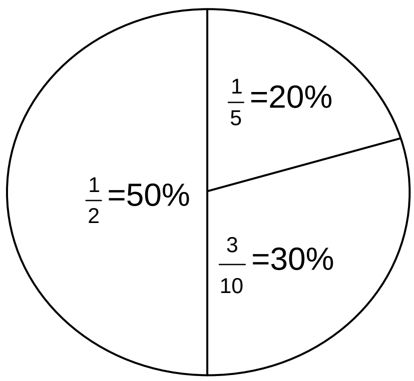


$\frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\%$

Der Bruch $\frac{1}{5}$ wird zunächst auf Hundertstel $\left(\frac{1}{5} = \frac{20}{100}\right)$ erweitert. Der Zähler des erweiterten Bruches $\frac{20}{100}$ gibt den Anteil vom Ganzen (20 von Hundert, also 20%) an.





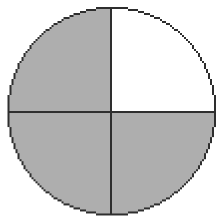


2. Grundbegriffe der Prozentrechnung

Grundwert (G):	Der Grundwert G ist das Ganze.
Prozentsatz (p):	Der Prozentsatz p gibt an, welcher Teil vom Ganzen zu bilden ist.
Prozentwert (P):	Der Prozentwert gibt an, wie groß dieser Teil ist.

Beispiel: Von 500 Schülern haben 375 ein Fahrrad.
Das sind 75%.

Graphische Darstellung:



G = 500 Schüler (der gesamte Kreis)

P = 375 Schüler (der schraffierte Teil des Kreises)

p = 75 (also p% = 75%)

Der Prozentsatz wird p genannt. Umgangssprachlich (z. B. bei Banken) hat dieser Begriff eine andere Bedeutung: der mathematische Prozentsatz ist: 4
bei Banken ist der Prozentsatz: 4%

3. Formeln zur Prozentrechnung

Für die Prozentrechnung gelten folgende Formeln:

Berechnung des Grundwertes G	Berechnung des Prozentwertes P	Berechnung des Prozentsatzes p
$G = \frac{P \bullet 100}{p}$	$P = \frac{G \bullet p}{100}$	$p = \frac{P \bullet 100}{G}$

Wenn man die Formel $P = G \bullet \frac{p}{100}$ auswendig lernt, kann man daraus die Formel zur Berechnung des Grundwertes G und des Prozentsatzes p durch Umformen ableiten:

$P = \frac{G \bullet p}{100} \quad | \bullet 100$

$P \bullet 100 = G \bullet p \quad | : p$

$\frac{P \bullet 100}{p} = G$

also: $G = \frac{P \bullet 100}{p}$

$P = \frac{G \bullet p}{100} \quad | \bullet 100$

$P \bullet 100 = G \bullet p \quad | : G$

$\frac{P \bullet 100}{G} = p$

also: $p = \frac{P \bullet 100}{G}$

4. Grundaufgaben der Prozentrechnung

Es gibt in der Prozentrechnung drei Grundaufgaben, die entweder mit den Formeln oder dem Dreisatz gelöst werden können.

Wenn mit dem Dreisatz Probleme auftreten, bitte erst das Kapitel „Dreisatz“ bearbeiten.

Gesucht ist der Grundwert:

300 Schüler einer Schule sind Jungen.
Das sind 60%.
Wie viele Schüler sind in der Schule?
gegeben: P = 300 Schüler, p = 60
gesucht: G

Lösungsweg Formel	Lösungsweg Dreisatz
$G = \frac{P \bullet 100}{p}$	60% ⓪ 300 Schüler
$G = \frac{300 \bullet 100}{60}$	1% ⓪ 300 Schüler : 60 = 5 Schüler
$G = 500$	100% ⓪ 5 Schüler •100
	100% ⓪ 500 Schüler

Antwort: In der Schule sind 500 Schüler.

Gesucht ist der Prozentsatz:

In einer Klasse mit 25 Schülern sind 15 Jungen.
Wie viel Prozent der Schüler sind Jungen?
gegeben: P = 15 Schüler, G = 25 Schüler
gesucht: p

Lösungsweg Formel	Lösungsweg Dreisatz
$p = \frac{P \bullet 100}{G}$	25 Schüler ⓪ 100%
$p = \frac{15 \bullet 100}{25}$	1 Schüler ⓪ 100% : 25 = 4%
$p = 60$	15 Schüler ⓪ 4% • 15
	15 Schüler ⓪ 60%

Antwort: 60% der Schüler sind Jungen.

Gesucht ist der Prozentwert:

In einer Schule mit 500 Schülern sind 60% Jungen.
Wie viele Schüler sind das?
gegeben: G = 500 Schüler, p = 60
gesucht: P

Lösungsweg Formel	Lösungsweg Dreisatz
$P = \frac{G \bullet p}{100}$	100% ⓪ 500 Schüler
$P = \frac{500 \bullet 60}{100}$	1% ⓪ 500 Schüler : 100 = 5 Schüler
$P = 300$	60% ⓪ 5 Schüler • 60
	60% ⓪ 300 Schüler

Antwort: 300 Schüler sind Jungen.

Manchmal ist der Prozentsatz nicht direkt im Text angegeben. Man muss ihn aus dem Inhalt der Aufgabe schließen.

1. *Beispiel:*

Ein Walkman kostet einschließlich 16% Mehrwertsteuer 232 DM.
(Also entsprechen 232 DM 116%.)
Wie hoch ist der Preis ohne Mehrwertsteuer?
(Gesucht wird G).

gegeben: P = 232 DM, p = 116
gesucht: G

(Solche Aufgaben werden in vielen Büchern als Aufgaben mit *vermehrtem Grundwert* bezeichnet.)

Lösungsweg Formel	Lösungsweg Dreisatz
$G = \frac{P \bullet 100}{p}$ $G = \frac{232 \bullet 100}{116}$ P = 200	116% ⓪ 232 DM 1% ⓪ 232 DM : 116 = 2 DM 100% ⓪ 2 DM • 100 100% ⓪ 200 DM

Antwort: Ohne Mehrwertsteuer kostet der Walkman 200 DM.

2. *Beispiel:*

Ein Damenpullover wurde um 35% reduziert und kostet jetzt 39 DM.
(Also entsprechen 39 DM 65%).
Wie teuer war der Pullover vor der Reduzierung?
(Gesucht wird G).

gegeben: P = 39 DM, p = 65
gesucht: G

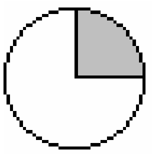
(Solche Aufgaben werden in vielen Büchern als Aufgaben mit *vermindertem Grundwert* bezeichnet.)

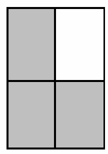
Lösungsweg Formel	Lösungsweg Dreisatz
$G = \frac{P \bullet 100}{p}$ $G = \frac{39 \bullet 100}{65}$ G = 60	65% ⓪ 39 DM 1% ⓪ 39 DM : 65 = 0,6 DM 100% ⓪ 0,6 DM • 100 100% ⓪ 60 DM

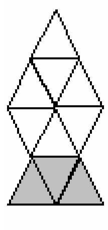
Antwort: Vor der Reduzierung kostete der Pullover 60 DM.

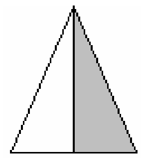
Diagramm

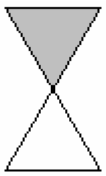
Wie viel Prozent jeder Fläche ist dunkel?

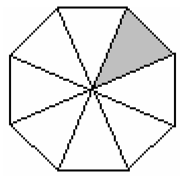
a) 

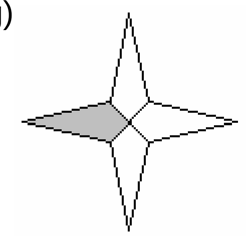
b) 

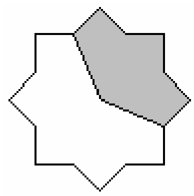
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

Umwandlung: Prozentzahl in Bruch und Bruch in Prozentzahl

a) 10% b) 13% c) 75% d) 100%

e) $\frac{27}{100}$ f) $\frac{13}{50}$ g) $\frac{9}{10}$ h) $\frac{3}{5}$

Anwendungsaufgaben

G		925			250		175	1425	285	
p (%)	20 %		8 %	6 %		6 %	12 %			16 %
P	13	37	34	36	40	15		57	57	24

Textaufgaben

Gliedere beim Lösen in Frage, Rechnung und Antwort.

a) 2100 Fans begleiten den HSV zu einem Auswärtsspiel. 21 % fahren mit dem Bus.
Wie viele Fans benutzen den Bus?

b) Auf einem Schulfest hat eine Klasse 88 % der eingekauften Würstchen verkauft.
Das sind 396 Würste.
Wie viele Würstchen hatte die Klasse eingekauft?

c) Karlchen war von 230 Schultagen an 46 Tagen in der Schule.
Wie viel Prozent sind das?

d) Eine Doppel-CD wurde um 30% reduziert und kostet jetzt 31,50 DM.
Wie viel kostete sie vorher?

e) Claudia hat eine Mieterhöhung von 8% bekommen und muss jetzt 799,20 DM bezahlen.
Wie hoch war die Miete vorher?

Diagramm

a) 25% b) 75% c) 30% d) 50%

e) 50% f) 12,5% g) 25% h) 37,5%

Umwandlung: Prozentzahl in Bruch und Bruch in Prozentzahl

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{13}{100}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 1

e) 27% f) 26% g) 90% h) 60%

Anwendungsaufgaben

G	**65**	925	**425**	**600**	250	**250**	175	1425	285	**150**
p (%)	20 %	**4 %**	8 %	6 %	**16 %**	6 %	12 %	**4 %**	**20 %**	16 %
P	13	37	34	36	40	15	**21**	57	57	24

Textaufgaben

a) 441 Fans benutzten den Bus.

b) Die Klasse hatte 450 Würstchen eingekauft.

c) Karlchen war an 20% aller Schultage in der Schule.

d) Die Doppel-CD kostete vorher 45 DM.

e) Die Miete betrug vorher 740 DM.

Diagramm

100 Schüler wurden nach ihrer Lieblingsfarbe befragt.

Lieblingsfarbe	lila	schwarz	weiß	blau	grau	rot	sonstige
Anteil in %	37	22	16	10	8	5	2

Veranschauliche die Tabelle in einem Streifendiagramm!

Umwandlung: Prozentzahl in Bruch und Bruch in Prozentzahl

a) 41% b) 77% c) 54% d) 12,5%

e) $\frac{4}{25}$ f) $\frac{2}{5}$ g) $\frac{3}{30}$ h) $\frac{24}{32}$

Anwendungsaufgaben

G	215	200		40	110	420	650			450
p (%)			5%				36%	25%	35%	32%
P	43	38	41	6	33	189		121	189	

Textaufgaben

Gliedere beim Lösen in Frage, Rechnung und Antwort.

a) Fernsehgewohnheiten: Von 350 befragten Jugendlichen sahen 28% mehr als 2 Stunden täglich fern, 24% benutzten den Fernseher unregelmäßig, 4% sahen kaum oder gar nicht fern. Der Rest machte keine Angaben.
Wie viele Jugendliche waren es jeweils?

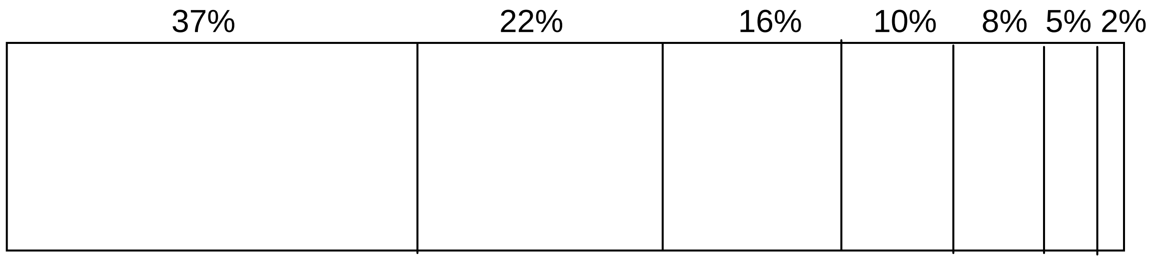
b) Die Preise für Computer wurden bei Brinkmann auf 85% des Preises gesenkt. Jetzt kostet eine komplette Anlage nur noch 3825 DM.
Wie viel DM waren es vorher?

c) Otto erhält jetzt 20 DM, Jana 30 DM und Karl 40 DM Taschengeld im Monat. Der Vater schlägt ihnen drei Angebote zur Taschengelderhöhung vor.
Für wen ist welches Angebot das günstigste?
1. Angebot: Erhöhung um 2 DM
2. Angebot: Erhöhung um 2% zuzüglich 1,50 DM.
3. Angebot: Erhöhung um 6%.

d) Ein Geschäft reduziert für einen Tag seine Preise um 20%. Dann werden sie wieder um 20% erhöht. Ein anderes Geschäft, das vorher die gleichen Preise hatte, möchte auf jeden Fall bessere Angebote machen.
Wie muss es seine Preise verändern?

Prozentrechnung Lösungen

Diagramm



Umwandlung: Prozentzahl in Bruch und Bruch in Prozentzahl

a) $\frac{41}{100}$ b) $\frac{77}{100}$ c) $\frac{27}{50}$ d) $\frac{1}{8}$

e) 16% f) 40% g) 10% h) 75%

Anwendungsaufgaben

G	215	200	**820**	40	110	420	650	**484**	**540**	450
p (%)	**20%**	**19%**	5%	**15%**	**30%**	**45%**	36%	25%	35%	32%
P	43	38	41	6	33	189	**234**	121	189	**144**

Textaufgaben

a) Es schauen 98 Schüler mehr als 2 Stunden täglich fern, 84 Schüler benutzen den Fernseher unregelmäßig und 14 sahen kaum oder gar nicht fern. 154 Schüler machten keine Angaben.

b) Vorher kostete der Computer 4500 DM.

c) Für Otto ist das erste Angebot das günstigste. Er bekommt dann 22 DM.
Für Jana ist das zweite Angebot das günstigste. Sie bekommt dann 32,10 DM.
Für Karl ist das dritte Angebot das günstigste. Er bekommt dann 42,40 DM.

d) Das Geschäft muss seine Preise um mehr als 4% senken.

Wenn in diesem Kapitel Schwierigkeiten auftreten, dann sollte zunächst das Kapitel „Prozentrechnung“ bearbeitet werden.

1. Grundbegriffe der Zinsrechnung

<u>Kapital (K):</u> Das Kapital ist das gesamte Geld, das geliehen wird.

<u>Zinsen (Z):</u> Die Zinsen sind eine Art "Leihgebühren", die abhängig sind von der geliehenen Geldmenge und dem Zinssatz.

<u>Zinssatz (p):</u> Der Zinssatz gibt an, wie groß die Leihgebühr in Bezug auf das gesamte geliehene Geld ist. Grundsätzlich bezieht sich der Zinssatz auf einen Zeitraum von einem Jahr.

Der Zinssatz wird p genannt. Umgangssprachlich (z. B. bei Banken) hat dieser Begriff eine andere Bedeutung: 4%: der mathematische Zinssatz ist 4
bei Banken ist der Zinssatz 4% gemeint.

Es gibt in der Zinsrechnung zwei Möglichkeiten:

entweder:
Ich leihe mir das Geld von der Bank (d. h. ich nehme einen Kredit auf), weil ich mir etwas kaufen will. Dafür muß ich Zinsen zahlen. Das heißt, ich muß mehr Geld zurückzahlen, als ich mir geliehen habe.

oder:
Ich spare Geld, z. B. auf einem Sparbuch. Solange das Geld auf dem Sparbuch liegt, leiht sich die Bank das Geld. Für das geliehene Geld bekomme ich Zinsen. Das heißt, mein Geld auf dem Sparbuch vermehrt sich, ohne daß ich etwas einzahlen muß.

<u>Beispiel:</u> Herr Meier möchte ein Auto kaufen und leiht sich von der Bank 6500 DM. Der Zinssatz ist p = 9. Er muß 585 DM Zinsen zahlen.

K = 6500 DM
Z = 585 DM
p% = 9% (also p = 9)

2. Formeln zur Zinsrechnung (Jahreszinsen)

Für die Zinsrechnung gelten folgende Formeln:

Berechnung des Kapitals K	Berechnung der Zinsen Z	Berechnung des Zinssatzes p
$K = \frac{Z \bullet 100}{p}$	$Z = \frac{K \bullet p}{100}$	$p = \frac{Z \bullet 100}{K}$

Wenn man die Formel $Z = \frac{K \bullet p}{100}$ auswendig lernt, kann man daraus die Formel zur Berechnung des Kapitals K und des Prozentsatzes p durch Umformen ableiten:

$Z = \frac{K \bullet p}{100} \quad | \bullet 100$

$Z \bullet 100 = K \bullet p \quad | : p$

$\frac{Z \bullet 100}{p} = K$

also: $K = \frac{Z \bullet 100}{p}$

$Z = \frac{K \bullet p}{100} \quad | \bullet 100$

$Z \bullet 100 = K \bullet p \quad | : K$

$\frac{Z \bullet 100}{K} = p$

also: $p = \frac{Z \bullet 100}{K}$

3. Grundaufgaben der Zinsrechnung

Es gibt in der Zinsrechnung drei Grundaufgaben, die entweder mit den Formeln oder dem Dreisatz gelöst werden können.

Wenn mit dem Dreisatz Probleme auftreten, bitte erst das Kapitel „Dreisatz“ bearbeiten.

<u>Gesucht ist das Kapital:</u>

Bei einem Zinssatz p = 3 erhält Uwe 150 DM Zinsen.
Wie groß ist sein Kapital?
gegeben: Z = 150 DM, p = 3
gesucht: K

Lösungsweg Formel	Lösungsweg Dreisatz
$K = \frac{Z \bullet 100}{p}$ $K = \frac{150 \bullet 100}{3}$ K = 5000	3% ⓪ 150 DM 1% ⓪ 150 DM : 3 = 50 DM 100% ⓪ 50 DM • 100 100% ⓪ 5000 DM

Antwort: Uwes Kapital beträgt DM 5000.

<u>Gesucht ist der Zinssatz:</u>

Uwes Kapital beträgt 5000 DM. Er erhält 150 DM Zinsen.
Wie groß ist der Zinssatz?
gegeben: K = 5000 DM, Z = 150 DM
gesucht: p

Lösungsweg Formel	Lösungsweg Dreisatz
$p = \frac{Z \bullet 100}{K}$ $p = \frac{150 \bullet 100}{5000}$ p = 3	5000 DM ⓪ 100% 1 DM ⓪ 100% : 5000 = 0,02% 150 DM ⓪ 0,02% • 150 150 DM ⓪ 3%

Antwort: Der Zinssatz beträgt 3.

<u>Gesucht sind die Zinsen:</u>

Uwes Kapital beträgt 5000 DM, der Zinssatz p =3.
Wie viel Zinsen erhält Uwe?
Gegeben: K = 5000 DM, p = 3
gesucht: Z

Lösungsweg Formel	Lösungsweg Dreisatz
$Z = \frac{K \bullet p}{100}$ $Z = \frac{5000 \bullet 3}{100}$ Z = 150	100% ⓪ 5000 DM 1% ⓪ 5000 DM : 100 = 50 DM 3% ⓪ 50 DM • 3 3% ⓪ 150 DM

Antwort: Uwe erhält DM 150 Zinsen.

4. Formeln für die Berechnung von Tageszinsen
(nur auf dem schwereren Aufgabenblatt)

Wenn man sich von der Bank für zwei Monate Geld leiht, muß man nicht die Zinsen für ein ganzes Jahr bezahlen, sondern nur für diese zwei Monate. Dafür muß man die Zinsen für einen Tag berechnen und dann auf den jeweiligen Zeitraum (hier zwei Monate) hochrechnen.

Die Bank rechnet mit 360 Tagen im Jahr (12 Monate mit jeweils 30 Tagen)

Für das Rechnen mit Tageszinsen gelten folgende, erweiterte Formeln:

Berechnung des Kapitals K	Berechnung der Zinsen Z	Berechnung des Zinssatzes p	Berechnung der Tage t
$K = \frac{Z \bullet 100 \bullet 360}{p \bullet t}$	$Z = \frac{K \bullet p \bullet t}{100 \bullet 360}$	$p = \frac{Z \bullet 100 \bullet 360}{K \bullet t}$	$t = \frac{Z \bullet 100 \bullet 360}{K \bullet p}$

5. Grundaufgaben der Zinsrechnung mit Tageszinsen

Es gibt in der Zinsrechnung mit Tageszinsen vier Grundaufgaben, die entweder mit den Formeln oder mit dem Dreisatz gelöst werden können.

<u>Gesucht ist das Kapital:</u>

Herr Meier legt für zwei Monate Geld auf die Bank.
Bei einem Zinssatz p = 3 erhält er für die zwei Monate 18 DM Zinsen.
Wie groß ist sein Kapital?
gegeben: Z = 18 DM, p = 3, t = 60 Tage
gesucht: K

Lösungsweg Formel	Lösungsweg Dreisatz
$K = \frac{Z \bullet 100 \bullet 360}{p \bullet t}$ $K = \frac{18 \bullet 100 \bullet 360}{3 \bullet 60}$ $K = 3600$	Es wird berechnet, wie viel Zinsen er in einem Jahr bekommen hätte: 2 Monate ⓪ 60 Tage 60 Tage ⓪ 18 DM 1 Tag ⓪ 18 DM : 60 = 0,3 DM 360 Tage ⓪ 0,3 DM • 360 360 Tage ⓪ 108 DM Die Zinsen betragen in einem Jahr also 108 DM. Jetzt kann das Kapital wie oben bei den Jahreszinsen berechnet werden. ...

Antwort: Das Kapital beträgt 3600 DM.

<u>Gesucht ist der Zinssatz:</u>

Herr Meier bringt für zwei Monate 3600 DM auf die Bank. Er bekommt dafür 18 DM Zinsen.
Wie hoch ist der Zinssatz?
gegeben: Z = 18 DM, K = 3600 DM, t = 60 Tage
gesucht: p

Lösungsweg Formel	Lösungsweg Dreisatz
$p = \frac{Z \bullet 100 \bullet 360}{K \bullet t}$ $p = \frac{18 \bullet 360 \bullet 100}{3600 \bullet 60}$ $p = 3$	Zuerst wird berechnet, wie viel Zinsen er in einem Jahr bekommen hätte: 2 Monate ⓪ 60 Tage 60 Tage ⓪ 18 DM 1 Tag ⓪ 18 DM : 60 = 0,3 DM 360 Tage ⓪ 0,3 DM • 360 360 Tage ⓪ 108 DM Herr Meier würde in einem Jahr 108 DM Zinsen bekommen. Jetzt kann der Zinssatz wie oben bei den Jahreszinsen berechnet werden. ...

Antwort: Der Zinssatz ist p = 3.

<u>Gesucht sind die Zinsen</u>:

Herr Meier bringt 3600 DM bei einem Zinssatz von p = 3 für zwei Monate auf die Bank.
Wie viel Zinsen bekommt er?
gegeben: K = 3600 DM, t = 60 Tage, p = 3
gesucht: Z

Lösungsweg Formel	Lösungsweg Dreisatz
$Z = \frac{K \bullet p \bullet t}{100 \bullet 360}$ $Z = \frac{3600 \bullet 3 \bullet 60}{100 \bullet 360}$ $Z = 18$	Zunächst wird berechnet, wie viel Zinsen Herr Meier nach einem Jahr bekommen würde (siehe Rechnung bei den Jahreszinsen). ... Er würde 108 DM Zinsen bekommen. 360 Tage ⓪ 108 DM 1 Tag ⓪ 108 DM : 360 = 0,3 DM 60 Tage ⓪ 0,3 DM • 60 60 Tage ⓪ 18 DM

Antwort: Er bekommt 18 DM Zinsen.

<u>Gesucht sind die Tage:</u>

Herr Meier bringt 3600 DM zu einem Zinssatz von p = 3 auf die Bank. Er bekommt 18 DM Zinsen.
Für wie lange muß er das Geld auf der Bank bringen?
gegeben: K = 3600 DM, Z = 18 DM, p = 3
gesucht: t

Lösungsweg Formel	Lösungsweg Dreisatz
$t = \frac{Z \bullet 100 \bullet 360}{K \bullet p}$ $t = \frac{18 \bullet 100 \bullet 360}{3600 \bullet 3}$ $t = 60$	Zunächst wird berechnet, wie viel Zinsen Herr Meier nach einem Jahr bekommen würde (siehe Rechnung bei Jahreszinsen). ... Er würde 108 DM Zinsen bekommen. 108 DM ⓪ 360 Tage 1 DM ⓪ 360 Tage : 108 = $3\frac{1}{3}$ Tage 18 DM ⓪ $3\frac{1}{3}$ Tage • 18 18 DM ⓪ 60 Tage

Antwort: Er bringt sein Geld für 60 Tage auf der Bank.

Ergänze die Tabelle

p (%)		5,5%	2,5%	
K	5000 DM		500 DM	9000 DM
Z	225 DM	137,50 DM		1080 DM

a) Daniel hat 12000 DM auf seinem Sparbuch.
Wie viel Zinsen bekommt er bei einem Zinssatz von 5,5 nach einem Jahr?

b) Wie viel DM hat Katja angelegt, wenn sie nach Ablauf eines Jahres bei einem Zinssatz von 7,5 von der Bank 1500 DM Zinsen ausbezahlt bekommt?

c) Für Bundesschatzbriefe im Wert von 1200 DM werden nach dem Ablauf eines Jahres 102 DM Zinsen gezahlt.
Welchen Zinssatz berechnet die Deutsche Bundesbank?

d) Für sein erstes Auto nahm Uwe einen Kredit in Höhe von 6000 DM auf. Er zahlt diesen in 12 Monatsraten von je 542,50 DM zurück.
Wie viel zahlt Uwe insgesamt zurück?
Wie viel Zinsen bezahlt er?
Wie hoch war der Zinssatz der Bank?

e) Für die Festgeldkonten, die mit 7,5% verzinst wurden, zahlte die Bank in einem Jahr insgesamt 2 625 000 DM Zinsen an ihre Kunden aus.
Wie viel Geld wurde auf Festgeldkonten eingezahlt?

f) Ein Darlehen von 12000 DM soll nach einem Jahr einschließlich Zinsen zurückgezahlt werden. Die Bank fordert 13320 DM.
Wie viel Zinsen müssen gezahlt werden?
Welchen Zinssatz berechnet die Bank?

Zinsrechnung Lösungen

Ergänze die Tabelle

p(%)	**4,5%**	5,5%	2,5%	**12%**
K	5000 DM	**2500 DM**	500 DM	9000 DM
Z	225 DM	137,50 DM	**12,50 DM**	1080 DM

a) Daniel bekommt nach einem Jahr 660 DM Zinsen.

b) Katja hat 20000 DM angelegt.

c) Die Deutsche Bundesbank berechnet p = 8,5.

d) Uwe zahlt insgesamt 6510 DM zurück.
Er bezahlt 510 DM Zinsen.
Der Zinssatz betrug p = 8,5.

e) Insgesamt wurden 35 000 000 DM auf Festgeldkonten eingezahlt.

f) Es müssen 1320 DM Zinsen bezahlt werden.
Es wurde ein Zinssatz von 11% berechnet.

Ergänze die Tabelle

K	7200 DM	860 DM	4056 DM	
p (%)	5%		2,25%	4%
t		3 Monate	2 Monate	24 Tage
Z	12 DM	6,45 DM		24 DM

Textaufgaben

a) Für Bundesschatzbriefe im Wert von 1200 DM werden nach Ablauf eines Jahres 102 DM Zinsen gezahlt.
Welcher Zinssatz wurde berechnet?

b) Frau Meier kauf einen Neuwagen für 23500 DM. Sie erhält für ihren alten Pkw einen Nachlass von 7500 DM. 5500 DM zahlt sie bar. Für den Restbetrag gibt ihr der Autohändler einen Kredit, den sie in 12 Monatsraten von 901,25 DM zurückzahlen muss.
Wie viel muss sie insgesamt noch zahlen?
Wie viel Zinsen bezahlt sie?
Der Autohändler sagt, er hätte ihr einen Zinssatz von 3% berechnet. Stimmt das?

c) Familie Müller will sich ein Haus für 450000 DM kaufen. Bank A bietet ihr 220000 DM zu einem Zinssatz von 9,5 und 230000 DM zu einem Zinssatz von 8,5 an. Bank B bietet ihr die gesamte Summe zu einem Zinssatz von 9,25 an.
Für welche Bank sollte sich die Familie entscheiden?

d) Uwe legt 25000 DM für 3 Monate zu einem Zinssatz von p = 7 an.
Wie viel Geld kann Uwe nach diesen 3 Monaten insgesamt abheben?

e) Banken und Sparkassen berechnen bei der Erteilung eines Kredites häufig neben den Kreditzinsen eine einmalige Bearbeitungsgebühr.
Prüfe folgende Angebote für einen Kredit von 5000 DM:
Angebot 1: Zinssatz p = 10,5 und 2% Bearbeitungsgebühr
Angebot 2: Zinssatz p = 11,5 und 0,50 DM je 100 DM Kredit als Bearbeitungsgebühr
Angebot 3: Zinssatz p = 13 und keine Bearbeitungsgebühren
Welches der drei Angebote ist für den Kunden am günstigsten?

f) Ein Sparguthaben von 17200 DM wurde 3 Monate verzinst. Nach diesen 3 Monaten zahlt die Bank insgesamt 17339,75 DM zurück.
Wie hoch war der Zinssatz?

Ergänze die Tabelle

K	7200 DM	860 DM	4056 DM	**9000 DM**
p (%)	5%	**3%**	2,25%	4%
t	**12 Tage**	3 Monate	2 Monate	24 Tage
Z	12 DM	6,45 DM	**15,21 DM**	24 DM

Textaufgaben

a) Es wurde ein Zinssatz von 8,5% berechnet.

b) Frau Meier muss insgesamt noch 10815 DM zahlen.
Sie zahlt 315 DM Zinsen.
Ja, es stimmt.

c) Bei Bank A muss Familie Müller 40450 DM zurückzahlen, bei Bank B 41625 DM. Sie sollte sich also für das Angebot von Bank A entscheiden.

d) Nach 3 Monaten bekommt Uwe 437,50 DM Zinsen und kann somit insgesamt 25437,50 DM abheben.

e) Bei Angebot 1 muss man insgesamt 5625 DM zurückzahlen (davon 535 DM Zinsen und 100 DM Bearbeitungsgebühr).
Bei Angebot 2 muss man insgesamt 5600 DM zurückzahlen (davon 575 DM Zinsen und 25 DM Bearbeitungsgebühr).
Bei Angebot 3 muss man insgesamt 5650 DM zurückzahlen (davon 650 DM Zinsen).
Somit ist das zweite Angebot für den Kunden am günstigsten.

f) Der Zinssatz der Bank betrug p = 3,25.

Dreisatz Grundlagen 1

Um eine Textaufgabe mit dem Dreisatz zu lösen, werden aus dem Text Informationen gesammelt. Aus diesen Angaben werden zwei Verhältnisgleichungen aufgestellt. Bei dem zweiten Verhältnis fehlt eine Information, die mit Hilfe des Dreisatzes berechnet werden soll.

1. Proportionaler Dreisatz

Proportional bedeutet: das Verhältnis bleibt immer gleich. d. h.

dem Doppelten (Dreifachen, ...) der einen Größe	• 2 • 3	• 2 • 3	wird das Doppelte (Dreifache, ...) der anderen Größe zugeordnet.

1. Beispiel: 3 Tüten Lakritz kosten 3,90 DM. Wie viel kosten 5 Tüten?

3 Tüten ⓪ 3,90 DM
5 Tüten ⓪ ?

Aufstellen der Verhältnisgleichungen

1. Schritt:

:3 — 3 Tüten ⓪ 3,90 DM — :3
1 Tüte ⓪ 1,30 DM

Die linke Seite, von der zwei Informationen bekannt sind, wird auf 1 gebracht. Die dafür notwendige Rechenoperation : 3 wird auch auf der anderen Seite durchgeführt, also auch : 3.

2. Schritt:

•5 — 1 Tüte ⓪ 1,30 DM — •5
5 Tüten ⓪ 6,50 DM

Abschließend wird die 1 auf das gesuchte Vielfache (in diesem Beispiel 5) gebracht. Diese Rechenoperation wird wieder auf beiden Seiten durchgeführt (in diesem Beispiel • 5).

Antwort: 5 Tüten Lakritz kosten 6,50 DM.

Zum Lösen der Aufgabe sind also drei Sätze notwendig:
1. Satz: 3 Tüten kosten 3,90 DM.
2. Satz: 1 Tüte kostet 1,30 DM.
3. Satz: 5 Tüten kosten 6,50 DM.

2. Beispiel: 15 Rollen Tapeten kosten 270 DM. Wie viel kosten 7 Rollen?

15 Rollen ⓪ 270 DM
7 Rollen ⓪ ?

Aufstellen der Verhältnisgleichungen

: 15 — 15 Rollen ⓪ 270 DM — : 15
• 7 — 1 Rolle ⓪ 18 DM — • 7
7 Rollen ⓪ 126 DM

Berechnung des Preises mit dem Dreisatz.

Antwort: 7 Rollen Tapete kosten 126 DM.

2. Umgekehrt proportionaler Dreisatz

Umgekehrt proportional bedeutet:

dem Doppelten (Dreifachen, ...) der einen Größe • 2 • 3 : 2 : 3 wird die Hälfte (der dritte Teil,...) der anderen Größe zugeordnet.

1. Beispiel: 5 LKW fahren einen Schuttberg in 12 Tagen ab. Wie viele Tage benötigen dafür 6 LKW?

5 LKW ⓪ 12 Tage
6 LKW ⓪ ?

Aufstellen der Verhältnisgleichungen

1. Schritt:

bekannt

: 5 5 LKW ⓪ 12 Tage • 5
1 LKW ⓪ 60 Tage

Die linke Seite, von der zwei Informationen sind, wird auf 1 gebracht. Die dafür notwendigen - Rechenoperation : 5 wird auf der anderen Seite gegenteilig durchgeführt, also • 5.

2. Schritt:

• 6 1 LKW ⓪ 60 Tage : 6
6 LKW ⓪ 10 Tage

Abschließend wird die 1 auf das gesuchte Vielfache , also • 6 gebracht. Diese Rechenoperation wird auf der anderen Seite wieder gegenteilig durchgeführt, also : 6.

Antwort: 6 LKW brauchen für das Abtragen des Schuttbergs 10 Tage.

2. Beispiel: In der Aula stehen 12 Reihen mit 20 Stühlen. Sie sollen in 16 Reihen umgestellt werden. Wie viele Stühle stehen dann in jeder Reihe?

12 Reihen ⓪ 20 Stühle
16 Reihen ⓪ ?

Aufstellen der Verhältnisgleichungen

: 12 12 Reihen ⓪ 20 Stühle • 12
• 16 1 Reihe ⓪ 240 Stühle : 16
16 Reihen ⓪ 15 Stühle

Berechnung der Anzahl der Stühle mit dem Dreisatz.

Antwort : In jeder Reihe stehen 15 Stühle.

Ergänze die Tabelle

Anzahl der Dosen Cola	3	1	4	7	11
Preis in DM	2,37				

Gemischte Aufgaben

Berechne, wenn möglich!
Entscheide, ob ein proportionaler oder ein umgekehrt proportionaler Dreisatz vorliegt!

a) 75 Blatt eines Buches sind zusammen 15 mm dick.
Wie dick sind 30 Blatt von einem Buch?

b) Ein Auto fährt 4,5 km in 1,5 Minuten.
Welche Strecke legt es in einer Stunde zurück?

c) In dem folgenden Kochrezept für Apfelkompott sind die Zutaten für 10 Personen angegeben:
2500 g Äpfel
1 ¼ l Wasser
250 g Zucker
Berechne die Zutaten für 4 Personen!

d) Die Klasse 9 b hat für ihre Klassenreise einen Zuschuss erhalten. Wenn alle 24 Schüler mitfahren, erhält jeder 35 DM. 3 Schüler werden kurz vor der Klassenreise krank und können nicht mitfahren.
Wie hoch ist jetzt der Zuschuss für jeden Schüler?

e) Um 5 Kästen CDs auszupacken, brauchen 2 Personen 30 Minuten.
Wie lange brauchen 3 Personen?

f) Ein Ei braucht 10 Minuten in kochendem Wasser bis es hartgekocht ist.
Wie lange müssen 5 Eier in kochendem Wasser liegen bis sie hartgekocht sind?

g) Hans zieht in seine neue Wohnung. Für 15 Rollen Tapete hat er 179,70 DM bezahlt. Er muss vier Rollen nachkaufen.
Wie viel muss er noch bezahlen?

Ergänze die Tabelle

Anzahl der Dosen Cola	3	1	4	7	11
Preis in DM	2,37	**0,79**	**3,16**	**5,53**	**8,69**

Gemischte Aufgaben

Entscheide, ob ein proportionaler oder ein umgekehrt proportionaler Dreisatz vorliegt!

a) 30 Blatt sind 6 mm dick (proportional).

b) Das Auto fährt 180 km in einer Stunde (proportional).

c) Für 4 Personen braucht man für Apfelkompott 1000 g Äpfel, $\frac{1}{2}$ l Wasser und 100 g Zucker (proportional).

d) Bei 21 Schülern beträgt der Zuschuss 40 DM für jeden Schüler (proportional).

e) 3 Personen packen die 5 Kästen CDs in 20 Minuten aus (umgekehrt proportional).

f) Es ist egal, wie viele Eier man kocht, es dauert immer 10 Minuten, bis sie hartgekocht sind (umgekehrt proportional).

g) Er muss noch 47,92 DM zahlen (proportional)

Ergänze die Tabelle

Anna überlegt, wie sie während einer reise ihr Taschengeld einteilen muss, wenn sie täglich den gleichen Betrag zur Verfügung haben will. Bleibt sie 12 Tage, so kann sie pro Tag 10,50 DM ausgeben.

Anzahl der Reisetage	12	15	8	25
Taschengeld pro Tag in DM	10,50			

Gemischte Aufgaben

a) In einem Dreifamilienhaus wohnen Familie Wolf, Familie Schröder und Familie Fuchs. Ihre monatliche Miete wird nach der Wohnfläche berechnet. Familie Wolf bezahlt für eine Wohnfläche von 96 m² 1104 DM Miete.
Welche monatliche Miete muss Familie Schröder bezahlen, deren Wohnung 107 m² groß ist?
Welche monatliche Miete muss Familie Fuchs für ihre Wohnung bezahlen, wenn die gesamte Wohnfläche in diesem Haus 332 m² beträgt?

b) Auf einem Ponyhof brauchen 3 Pferdepfleger 5 Stunden, um alle 30 Ponys zu striegeln.
Wie viele Stunden werden benötigt, wenn noch 2 Pfleger eingestellt werden, aber zusätzlich 5 Pferde mehr im Stall stehen?

c) Rezept für einen Wurstsalat (4 Personen)
400 g Bierschinken
250 g Champignons
200 g Spinat
2 Zwiebeln
1 Salatgurke
Petersilie
Berechne die Zutaten für 10 Personen!

d) Bei einer Feuerwehrübung wurde ein Teich mit 4 Pumpen in 3,5 Stunden leer gepumpt.
Wie lange hätte das mit 5 Pumpen gedauert?

e) Die Fahrzeit von Kassel nach Flensburg beträgt 7 Stunden bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h.
Wie groß muss die Geschwindigkeit sein, wenn die gleiche Strecke in 4 Stunden zurückgelegt werden soll?

f) Mit 3 Maschinen werden in 8 Stunden insgesamt 12000 Schrauben hergestellt.
Wie viele Schrauben können von 5 Maschinen in 4 Stunden gefertigt werden?

Ergänze die Tabelle

Anzahl der Reisetage	12	15	8	25
Taschengeld pro Tag in DM	10,50	**8,40**	**15,75**	**5,04**

Gemischte Aufgaben

a) Familie Schröder bezahlt für ihre 107 m² große Wohnung monatlich 1230,50 DM. Die Wohnfläche von Familie Fuchs beträgt 129 m². Sie muss monatlich 1483,50 DM bezahlen.

b) 5 Pferdepfleger brauchen 3,5 Stunden, um 35 Pferde zu striegeln. (Ein Pfleger braucht für 30 Pferde 15 Stunden, also 0,5 Stunden, um ein Pferd zu striegeln. Also braucht er 17,5 Stunden für 35 Pferde).

c) Für 10 Personen benötigt man: 1000 g Bierschinken, 625 g Champignons, 500 g Spinat, 5 Zwiebeln, 2 ½ Salatgurken und etwas Petersilie.

d) Mit 5 Pumpen hätte die Übung 2,8 Stunden gedauert.

e) Wenn die Strecke von Kassel nach Flensburg in 4 Stunden zurückgelegt werden soll, muss die durchschnittliche Geschwindigkeit 105 km/h betragen.

f) Mit 5 Maschinen können in 4 Stunden 10000 Schrauben hergestellt werden.

Setzt man in einer Gleichung für die Variablen (z. B. x, y, a, b) Zahlen ein, so erhält man wahre oder falsche Aussagen. Die Zahlen, die wahre Aussagen ergeben, bezeichnet man als Lösungen der Gleichungen.

Beispiel: $3 + x = 7$ wahre Aussage: $3 + 4 = 7$ Lösung der Gleichung: $x = 4$
falsche Aussage: $3 + 2 = 7$

1. Lösen von Gleichungen durch Gleichungsumformungen

1. Fall: Beidseitige Addition einer Zahl

$$\begin{aligned} x - 3 &= 5 \quad \vert +3 \\ x - 3 + 3 &= 5 + 3 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 8}} \end{aligned}$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird 3 addiert.

Lösung der Gleichung: $x = 8$

2. Fall: Beidseitige Subtraktion einer Zahl

$$\begin{aligned} x + 5 &= 12 \quad \vert -5 \\ x + 5 - 5 &= 12 - 5 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 7}} \end{aligned}$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird 3 subtrahiert.

Lösung der Gleichung: $x = 7$

3. Fall: Beidseitige Multiplikation mit einer Zahl

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x &= 18 \quad \vert \bullet 3 \\ \frac{1}{3}x \bullet 3 &= 18 \bullet 3 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 54}} \end{aligned}$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird mit 3 multipliziert.

Lösung der Gleichung: $x = 54$

4. Fall: Beidseitige Division durch eine Zahl

$$\begin{aligned} 4x &= 64 \quad \vert :4 \\ 4x : 4 &= 64 : 4 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 16}} \end{aligned}$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird durch 4 dividiert.

Lösung der Gleichung: $x = 16$

Kombinationen dieser 4 Fälle ermöglichen es, jede Gleichung zu lösen.

1. Beispiel:

$4x + 25 = 53$	$\mid -25$	
$-4x = 28$	$\mid :4$	
$-x = 7$	$\mid \bullet (-1)$	
$\underline{\underline{x = -7}}$	Lösung der Gleichung: $x = -7$	

$-33x + 9 = -24$	$\mid -9$
$-33x = -33$	$\mid :33$
$-x = -1$	$\mid \bullet (-1)$
$\underline{\underline{x = 1}}$	Lösung der Gleichung: $x = 1$

$3a - 26 = 1$	$\mid +26$
$3a = 27$	$\mid :3$
$\underline{\underline{a = 9}}$	Lösung der Gleichung: $a = 9$

Häufig kommt die Variable, die berechnet werden soll, mehrmals in einer Gleichung (u. a. auch in Klammern) vor. Dann sind zuerst die Klammern aufzulösen. Anschließend ist die Gleichung zu ordnen (Variablen zu Variablen, Zahlen zu Zahlen), zusammen zu fassen und durch schrittweises Umformen zu lösen.

$3x + 5 + 2x - 7 + 10\,(3x + 2) = 4x + 102 + 11x + 36$	Klammer auflösen
$3x + 5 + 2x - 7 + 30x + 20 = 4x + 102 + 11x + 36$	Ordnen
$3x + 2x + 30x + 5 - 7 + 20 = 4x + 11x + 102 + 36$	Zusammenfassen
$35x + 18 = 15x + 138$	$\mid -15x$
$20x + 18 = 138$	$\mid -18$
$20x = 120$	$\mid :20$
$\underline{\underline{x = 6}}$	Lösung der Gleichung: $x = 6$

2. Zwei Gleichungen mit zwei Variablen (Einsetzungsverfahren)

Eine Gleichung mit zwei Variablen kann nur dann eindeutig gelöst werden, wenn es eine zweite Gleichung mit den gleichen Variablen gibt, und diese beiden Gleichungen in Beziehung gesetzt werden.

Dabei wird:

- eine Gleichung nach einer Variablen (z. B. x) aufgelöst.
- dieses Ergebnis in die andere Gleichung eingesetzt und durch Umformen y ausgerechnet.
- der berechnete y–Wert in die erste Gleichung eingesetzt, um den x–Wert zu berechnen.

Beispiel:
erste Gleichung (I): $x + 2y = 5$
zweite Gleichung (II): $2x - 4y = 2$

$$
\begin{array}{lrcll}
\mathrm{I} & x + 2y & = & 5 & \\
\mathrm{II} & 2x - 4y & = & 2 & \\
 & & & & \\
\mathrm{I} & x + 2y & = & 5 & \mid -2y \qquad \text{nach x auflösen} \\
\mathrm{I} & x & = & 5 - 2y & \\
 & & & & \\
x\ \mathrm{II} & 2x - 4y & = & 2 & \qquad\qquad \text{Lösung für x einsetzen} \\
\mathrm{II} & 2(5 - 2y) - 4y & = & 2 & \qquad\qquad \text{Klammer auflösen} \\
\mathrm{II} & 10 - 4y - 4y & = & 2 & \qquad\qquad \text{zusammenfassen} \\
\mathrm{II} & 10 - 8y & = & 2 & \mid -10 \\
\mathrm{II} & -8y & = & -8 & \mid :(-8) \\
\mathrm{II} & & & \underline{\underline{y = 1}} & \\
 & & & & \\
y\ \mathrm{I} & x & = & 5 - 2 \bullet (1) & \\
\mathrm{I} & x & = & 5 - 2 & \\
\mathrm{I} & & & \underline{\underline{x = 3}} &
\end{array}
$$

Probe:
Bei der Probe werden die errechneten Werte in die Ausgangsgleichungen eingesetzt.

$$
\begin{array}{lrcl}
\mathrm{I} & x + 2y & = & 5 \\
\mathrm{I} & 3 + 2 \bullet 1 & = & 5 \\
\mathrm{I} & & & \underline{\underline{5 = 5}} \\
 & & & \\
\mathrm{II} & 2x - 4y & = & 2 \\
\mathrm{II} & 2 \bullet 3 - 4 \bullet 1 & = & 2 \\
\mathrm{II} & & & \underline{\underline{2 = 2}}
\end{array}
$$

3. Aufstellen von Gleichungen aus Textaufgaben

Es gibt viele Textaufgaben, die man mit Hilfe von Gleichungen lösen kann.
Hier sind einige Beispiele von Textaufgaben mit der Entwicklung der dazugehörigen Gleichung.

Textaufgabe	Gleichung	Erklärung
Zu welcher Zahl muß man 125 addieren, um 150 zu erhalten?	$x + 125 = 150$	• zu welcher Zahl → x • 125 addieren → $+ 125$ • 150 zu erhalten → $= 150$
Das Doppelte einer Zahl um 3 vermehrt ist gleich dem Dreifachen dieser Zahl um 2 vermehrt.	$2x + 3 = 3x + 2$	• das Doppelte einer Zahl → $2x$ • um 3 vermehrt → $+ 3$ • das Dreifache dieser Zahl → $3x$ • um 2 vermehrt → $+ 2$
Felix kauft 5 Kinokarten. Er bezahlt mit einem 100 DM – Schein und bekommt 30 DM zurück.	$5x = 100 - 30$	• 5 Kinokarten → $5x$ • 100 DM Schein → $= 100$ • 30 DM zurück → $- 30$
Frank, Tina und Werner sind zusammen 90 Jahre alt. Werner ist viermal so alt wie Tina. Tina ist 12 Jahre älter als Frank. Wie alt ist Frank?	$x+(x+12)+4(x+12) = 90$	• Franks Alter → x • Tina ist 12 Jahre älter als Frank. → $x + 12$ • Werner ist viermal so alt wie Tina. → $4(x+12)$ • Alle zusammen sind 90 Jahre alt. → $= 90$
Wegen einer Baustelle muß Karl auf seinem Schulweg einen Umweg machen. Sein Schulweg verlängert sich um 780 m auf 1360 m.	$x + 780 = 1360$	• Länge normaler Schulweg → x • verlängert sich um 780 m → $+ 780$ • auf 1360 m → $= 1360$

Löse die Gleichungen

a) $3(y + 2) = 36$

b) $6x + 15 = 5x + 17$

c) $(-2 + y) \bullet 4 = y + 7$

d) $x + y = 19$
$y = x + 1$

e) $2x = 4y - 10$
$4y - 3x = 7$

f) $3x + 5y = 8$
$12x + y = 13$

Textaufgaben

a) Die Summe aus dem Vierfachen einer Zahl und 73 ist 141.
Wie heißt die Zahl?

b) Wenn man zu einer Zahl 72 addiert, erhält man das siebenfache der Zahl.
Bestimme die Zahl!

c) Addiert man zu einer Zahl 5 und verdoppelt das Ergebnis, so erhält man 30.
Wie heißt die Zahl?

d) Mutter, Vater und Sohn sind zusammen 86 Jahre alt. Die Mutter ist dreimal so alt wie ihr Sohn. Der Sohn ist 26 Jahre jünger als der Vater.
Wie alt ist der Sohn?
Wie alt sind Mutter und Vater?

e) Subtrahiert man von einer Zahl 4, multipliziert die Differenz mit 3 und addiert zu diesem Produkt 12, so erhält man 42.
Bestimme die Zahl!

f) Aus 32 cm Draht soll ein Rechteck gebogen werden. Die zweite Seite soll dreimal so lang sein wie die erste.
Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

g) Frau Kampel ist jetzt 42 und ihre Tochter Nina 17 Jahre alt.
Nach wie vielen Jahren wird Frau Kampel doppelt so alt sein wie Nina?

h) George Gershwin war ein bekannter amerikanischer Komponist. Wenn man sein Geburtsjahr und sein Sterbejahr addiert, so erhält man 3835. Gershwin wurde nur 39 Jahre alt.
In welchem Jahr wurde er geboren und in welchem Jahr starb er?

Löse die Gleichungen

a) Lösung der Gleichung: $y = 10$

b) Lösung der Gleichung: $x = 2$

c) Lösung der Gleichung: $y = 5$

d) Lösungen der Gleichung: $x = 9$
$y = 10$

e) Lösungen der Gleichung: $x = 3$
$y = 4$

f) Lösungen der Gleichung: $x = 1$
$y = 1$

Textaufgaben

a) Die Zahl heißt 17.
Gleichung: $4x + 73 = 141$.

b) Gesucht wird die Zahl 12.
Gleichung: $x + 72 = 7x$

c) Die Zahl heißt 10.
Gleichung: $(x + 5) \bullet 2 = 30$

d) Der Sohn ist 12 Jahre alt. Die Mutter ist 36 und der Vater 38 Jahre alt.
Gleichung: $3x + (x + 26) + x = 86$

e) Die gesuchte Zahl heißt 14.
Gleichung: $(x - 4) \bullet 3 + 12 = 42$

f) Die Seiten des Rechtecks sind 4 cm und 12 cm lang.
Gleichungen: $2a + 2b = 32$
$a = 3b$

g) In 8 Jahren wird Frau Kampel doppelt so alt sein wie Nina.
Gleichung: $42 + x = 2(17 + x)$

h) George Gershwin wurde 1898 geboren und starb 1937.
Gleichungen: $x + y = 3835$
$y - x = 39$

Löse die Gleichungen

a) $-7x + 43 = 9x - 5$

b) $41 + 9x = 27 - (13 - x) + 17x$

c) $112 + (m - 5) \bullet 9 - m = 5 + 3(5m + 2)$

d) $$\begin{aligned} 14x - 9y &= 24 \\ y - 8x &= -80 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 3x + 15 &= 6(3x - 10) \\ 3x &= y + 10 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 2(4y + 2) - (3x - 3) \bullet 3 + 2 &= 20 \\ 5(y - x - 2) &= y - 3x \end{aligned}$$

Textaufgaben

a) Heikes Vater ist doppelt so alt wie Heike. Vor 11 Jahren war er dreimal so alt wie sie.
Wie alt sind die beiden im Augenblick?

b) Großvater ist 50 Jahre älter als sein Enkel und doppelt so alt wie sein Sohn. Zusammen sind sie 100 Jahre alt.
Wie alt ist der Großvater?

c) Auf dem Hof von Bauer Schmidt werden Gänse und Schafe gezüchtet. Auf die Frage, wie viele Gänse und wie viele Schafe momentan auf dem Hof leben, antwortet er: „Alle Tiere sind auf der Wiese. Dort laufen 152 Beine umher und es gibt 61 Köpfe.“
Wie viele Gänse und Schafe leben auf dem Hof?

d) Ein 2,70 m langes Band soll in die gleiche Anzahl von Bändchen mit je 1 cm, 3 cm und 5 cm Bandlänge zerschnitten werden.
Wie viele Bändchen erhält man insgesamt?

e) Addiert man zu einer Zahl 5, multipliziert die Summe mit 2 und subtrahiert von diesem Produkt 16, so erhält man ebenso viel, wie wenn man von der Zahl 12 subtrahiert und die Differenz verfünffacht.
Wie lautet die Zahl?

f) Jens trifft Uwe und fragt ihn: „Wie viele Briefmarken hast du?“ Da antwortet Uwe: „Hätte ich doppelt so viele Briefmarken und 99 mehr, dann hätte ich fünfmal so viele Briefmarken wie jetzt.“
Wie viele Briefmarken hat Uwe?

g) Zwei Radfahrer, von denen der eine 16 km und der andere 17 km in der Stunde zurücklegen, fahren sich aus zwei Städten A und B entgegen. Die Städte sind 132 km voneinander entfernt.
Nach wie vielen Stunden treffen sich die Radfahrer?

Löse die Gleichungen

a) Lösung der Gleichung: $x = 3$

b) Lösung der Gleichung: $x = 3$

c) Lösung der Gleichung: $m = 8$

d) Lösung der Gleichungen: $x = 12$
$y = 16$

e) Lösung der Gleichungen: $x = 5$
$y = 5$

f) Lösung der Gleichungen: $x = 3$
$y = 4$

Textaufgaben

a) Heikes Vater ist 44 Jahre und Heike 22 Jahre alt.
Gleichungen: $2x = y$
$3\,(x - 11) = y - 11$

b) Großvater ist 60 Jahre alt.
Gleichung: $x + (x - 50) + \frac{x}{2} = 100$

c) Es leben 46 Gänse und 15 Schafe auf dem Hof.
Gleichungen: $x + y = 61$
$2x + 4y = 152$

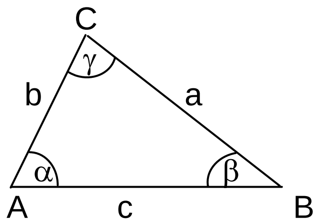
d) Man erhält 30 Bändchen.
Vor der Rechnung muss 2,70 m in 270 cm umgewandelt werden.
Gleichung: $x + 3x + 5x = 270$

e) Die Zahl lautet 18.
Gleichung: $(x + 5) \bullet 2 - 16 = (x - 12) \bullet 5$

f) Uwe hat 33 Briefmarken.
Gleichung: $2x + 99 = 5x$

g) Sie treffen sich nach 4 Stunden.
Gleichung: $16x + 17x = 132$

In Dreiecken gibt es folgende Bezeichnungen:
- die Punkte A,B,C.
- die Seiten a,b,c.
- die Winkel α,β,γ.

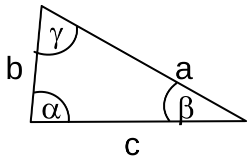
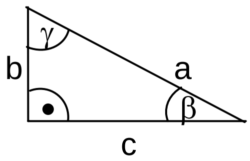
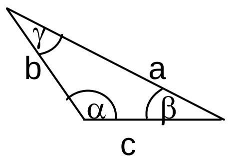
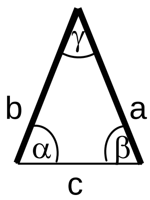
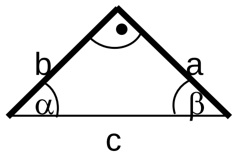
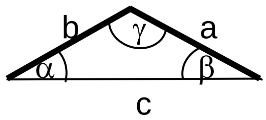
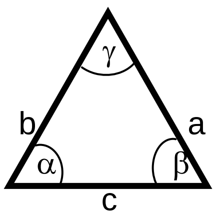


Dem Punkt A mit dem Winkel α liegt die Seite a gegenüber.
Entsprechendes gilt für die Punkte B und C.

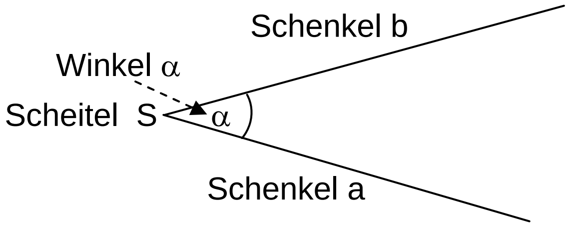
Die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ beträgt im Dreieck immer 180°.

Die beiden Seiten, die einen Winkel einschließen, heißen Schenkel.

1. <u>Dreiecksformen</u>

Dreieck	**spitzwinklig** alle Winkel < 90°	**rechtwinklig** ein Winkel = 90°	**stumpfwinklig** ein Winkel > 90°
ungleichseitig keine Seite gleich lang	 $a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	 $a \neq b \neq c$ $\alpha = 90°$	 $a \neq b \neq c$ $\alpha > 90°$
gleichschenklig zwei Seiten gleich lang	 $a = b$ $\alpha = \beta$	 $a = b$ $\alpha = \beta$ $\gamma = 90°$	 $a = b$ $\alpha = \beta$ $\gamma > 90°$
gleichseitig alle Seiten gleich lang	 $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma$		

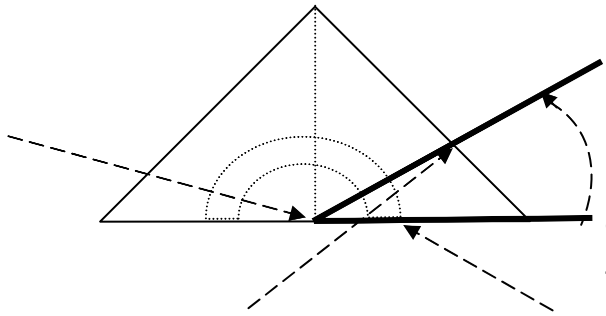
2. Begriffe am Winkel



3. Winkel messen und zeichnen

Winkel messen

Um die Größe eines Winkels zu messen, muß das Geodreieck so angelegt werden, dass sein Nullpunkt genau auf der Spitze des Winkels liegt.



Der Schnittpunkt des freien Schenkels mit dem Geodreieck zeigt die Gradzahl und damit die Größe des Winkels an.

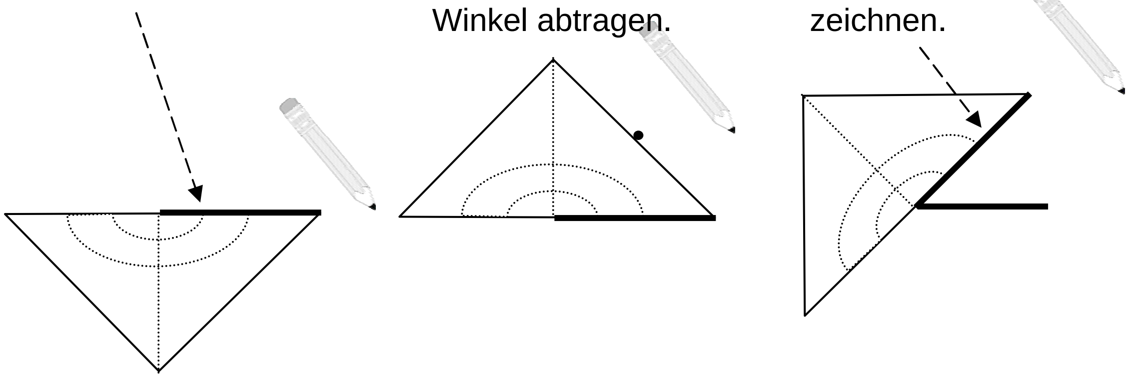
Beginne bei Null!

Winkel zeichnen

Schenkel zeichnen.

Am Geodreieck Winkel abtragen.

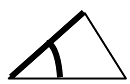
Anderen Schenkel zeichnen.

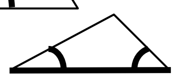


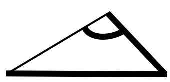
4. Konstruktion von Dreiecken

Zur Konstruktion von Dreiecken sind mindestens drei Angaben notwendig.
Man unterscheidet je nach Angaben vier verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten:

a) SSS (drei Seiten sind bekannt). 

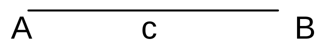
b) SWS (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind bekannt). 

c) WSW (eine Seite und die beiden anliegenden Winkel sind bekannt). 

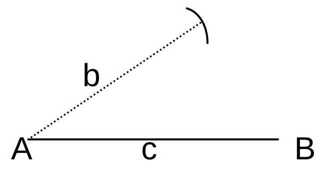
d) SSW (zwei Seiten und der, der längeren Seite gegenüberliegende Winkel sind bekannt). 

Konstruktion nach SSS (gegeben a, b, c)

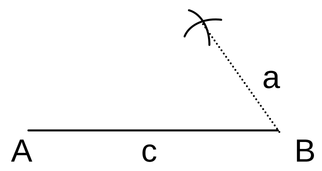
1.) Zeichne eine gegebene Seite (z. B. c).



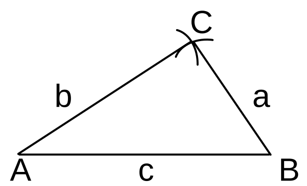
2.) Ziehe um den Punkt A mit einem Zirkel einen Kreisbogen mit dem Radius b.



3.) Ziehe um den Punkt B mit einem Zirkel einen Kreisbogen mit dem Radius a.

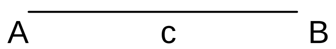


4.) Der Schnittpunkt der beiden Kreisbogen ist der Punkt C. Verbinde ihn mit A und B.

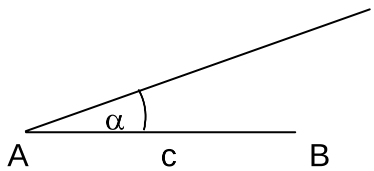


Konstruktion nach SWS (gegeben c, α, b)

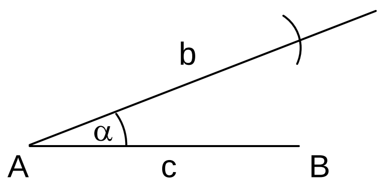
1.) Zeichne eine gegebene Seite (z. B. c).



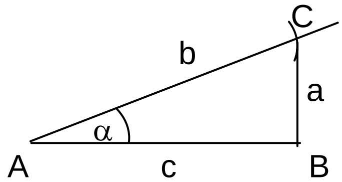
2.) Zeichne den zweiten Schenkel vom gegebenen Winkel α.



3.) Ziehe um den Punkt A mit einem Zirkel einen Kreisbogen mit dem Radius b.

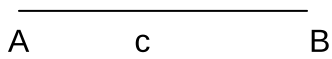


4.) Der Schnittpunkt von Schenkel und Kreisbogen ist der Punkt C. Verbinde ihn mit B.

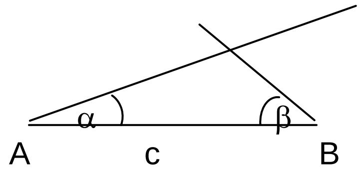


Konstruktion nach WSW (gegeben c, α, β)

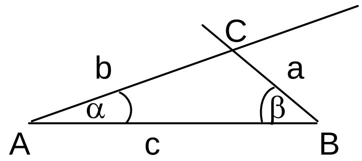
1.) Zeichne die gegebene Seite.



2.) Zeichne die zweiten Schenkel der gegebenen Winkel α und β.

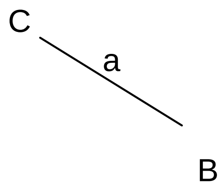


3.) Der Schnittpunkt dieser beiden Schenkel ist C.

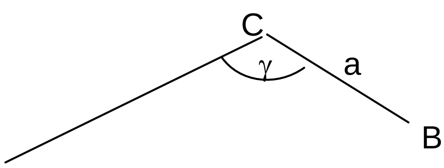


Konstruktion nach SSW (gegeben c, γ, a)

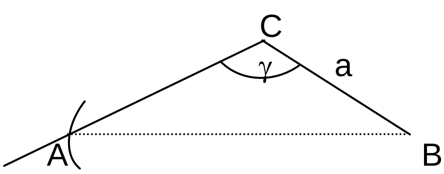
1.) Zeichne die Seite, die am Winkel γ anliegt (hier also a).



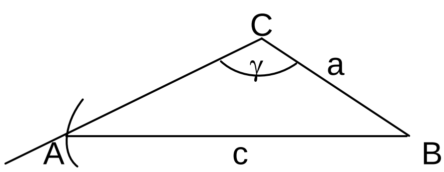
2.) Zeichne den zweiten Schenkel des gegebenen Winkels γ ein.



3.) Ziehe einen Kreisbogen um B mit der Länge der zweiten vorgegebenen Seite.



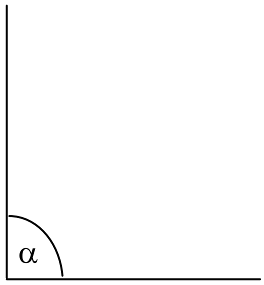
4.) Der Schnittpunkt von Schenkel und Kreisbogen ist der Punkt A. Verbinde diesen Punkt mit B.



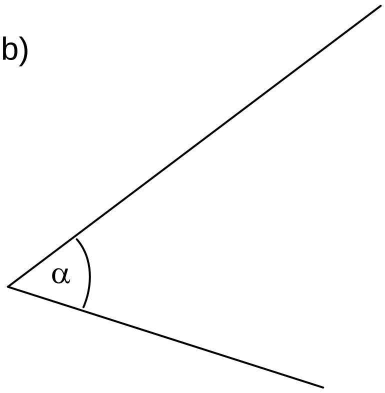
Winkel messen und zeichnen

Miss folgende Winkel!

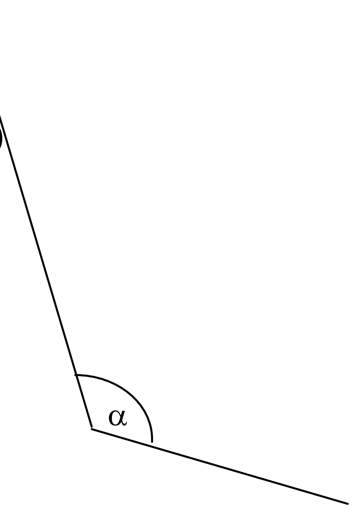
a)



b)



c)



Zeichne folgende Winkel!

a) $\alpha = 35°$ b) $\alpha = 68°$ c) $\alpha = 125°$

Winkelsumme im Dreieck

Berechne den fehlenden Winkel im Dreieck!

a) $\alpha = 23°$ $\beta = 46°$ $\gamma = ?$

b) $\alpha = 25°$ $\beta = ?$ $\gamma = 60°$

c) $\alpha = ?$ $\beta = ?$ $\gamma = 50°$ (gleichschenkliges Dreieck mit $\alpha = \beta$)

Dreieckskonstruktionen

Konstruiere:

a) ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 5 cm.

b) ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 90°$, $\beta = 35°$, c = 5 cm.

c) ein gleichschenkliges Dreieck mit a = b = 3 cm, $\gamma = 40°$.

d) ein ungleichseitiges Dreieck mit c = 7 cm, $\gamma = 114°$, a = 3 cm.

e) ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck mit beliebig langen Seiten.

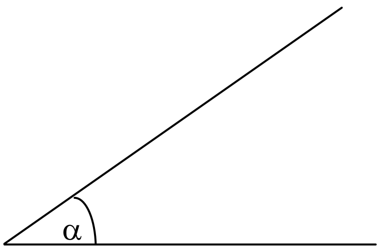
Winkel messen und zeichnen

Miss folgende Winkel!

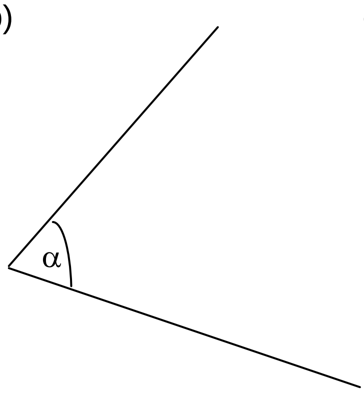
a) α = 90°   b) α = 55°   c) α = 123°

Zeichne folgende Winkel!

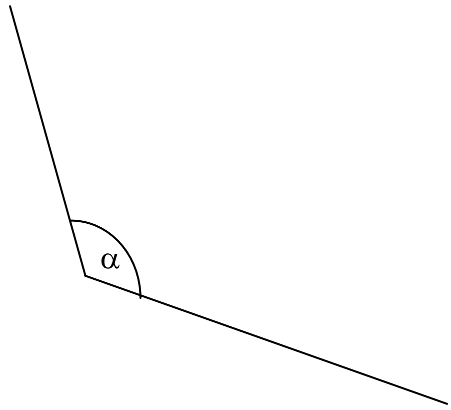
a)



b)



c)

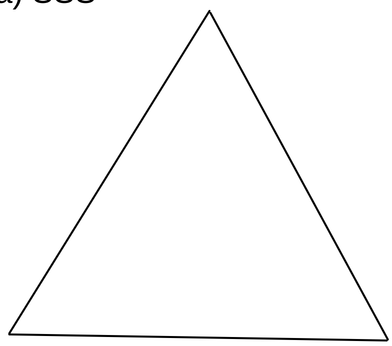


Winkelsumme im Dreieck

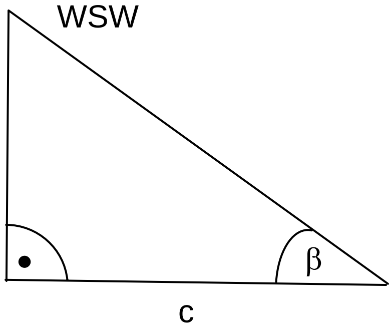
a) γ = 111°   b) β = 95°   c) α = β = 65°

Dreieckskonstruktionen

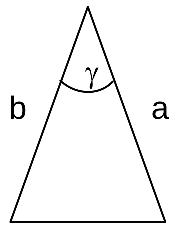
a) SSS



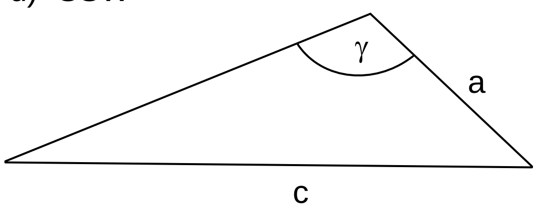
b) WSW



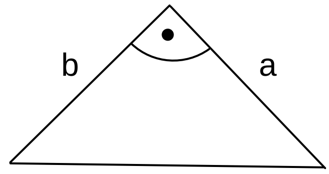
c) SWS



d) SSW



e) SWS, z. B.

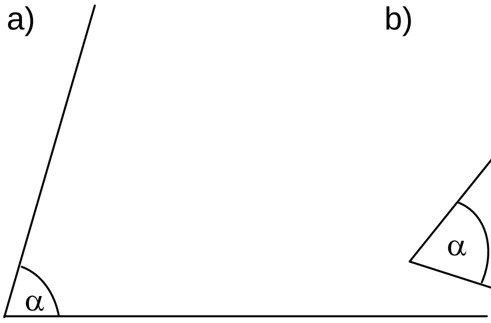


Dreiecke Aufgaben

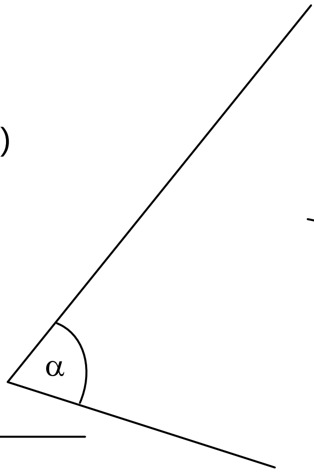
Winkel messen und zeichnen

Miss folgende Winkel!

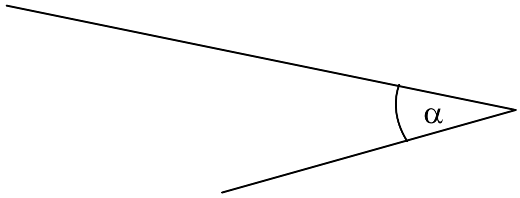
a)



b)



c)



Zeichne folgende Winkel!

a) $\alpha = 170°$ b) $\alpha = 15°$ c) $\alpha = 98°$

Winkelsumme

Berechne den fehlenden Winkel im Dreieck!

a) $\alpha = 56{,}7°$	$\beta = ?$	$\gamma = 23{,}8°$	
b) $\alpha = ?$	$\beta = ?$	$\gamma = 40°$	(gleichschenkliges Dreieck)
c) $\alpha = ?$	$\beta = ?$	$\gamma = 90°$	(gleichschenkliges Dreieck)

Dreieckskonstruktionen

Konstruiere:

a) ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 2,5 cm.

b) ein ungleichseitiges Dreieck mit $\alpha = 27°$, $\beta = 45°$, c = 4 cm.

c) ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C und a = 4 cm.

d) ein ungleichseitig stumpfwinkliges Dreieck mit beliebig langen Seiten.

e) Warum gibt es kein gleichseitiges Dreieck mit einem rechten Winkel?

f) Warum gibt es kein gleichseitiges Dreieck mit einem stumpfen Winkel?

Dreiecke Lösungen

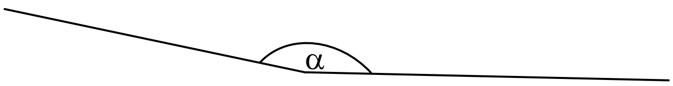
Winkel messen und zeichnen

Miss folgende Winkel!

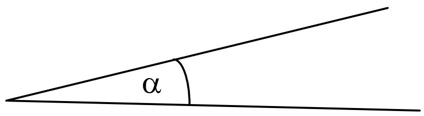
a) $\alpha = 74°$ b) $\alpha = 69°$ c) $\alpha = 27°$

Zeichne folgende Winkel!

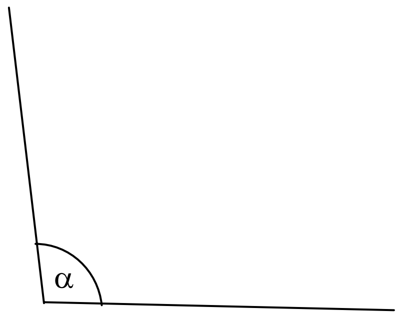
a)



b)



c)

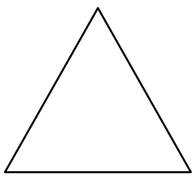


Winkelsumme

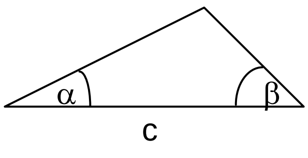
a) $\beta = 99{,}5°$ b) $\alpha = \beta = 70°$ c) $\alpha = \beta = 45°$

Dreieckskonstruktionen

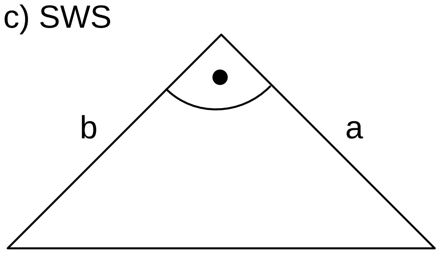
a) SSS



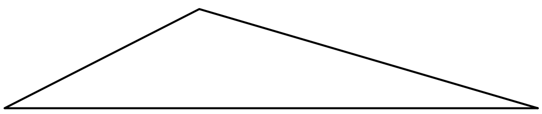
b) WSW



c) SWS



d) z. B.



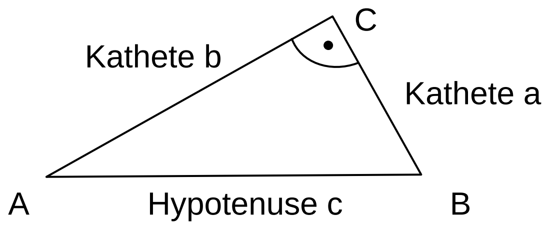
e) In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich groß: $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. Deswegen kann kein Winkel 90° betragen.

f) siehe Antwort e)

Satz des Pythagoras — Grundlagen 1

In rechtwinkligen Dreiecken haben die Seiten besondere Bezeichnungen:

Katheten:	die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen.
Hypotenuse:	die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt.

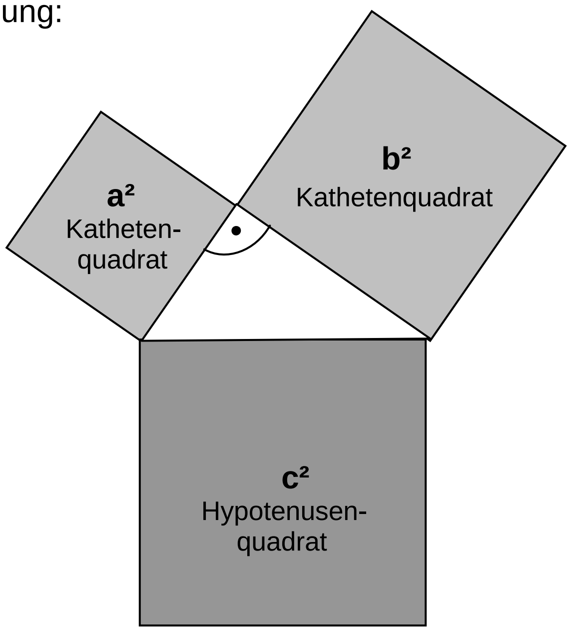


Da in Dreiecken die längste Seite immer dem Winkel mit dem größten Winkelmaß gegenüber liegt, ist im rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite.

Wenn c die Hypotenuse ist, dann gilt in rechtwinkligen Dreiecken:

$a^2 + b^2$	$=$	c^2
Summe der Flächeninhalte der Katheten-quadrate	gleich	dem Flächeninhalt des Hypotenusen-quadrats.

Graphische Darstellung:

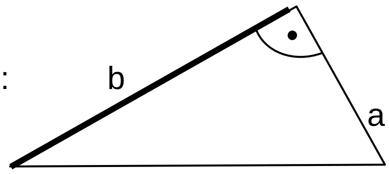


Wenn zwei Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks bekannt sind, dann kann man mit Hilfe des Satzes des Pythagoras die Länge der dritten Seite berechnen:

1. *Beispiel:*

$a = 6cm$
$c = 8cm$
$b = ?$

Skizze:



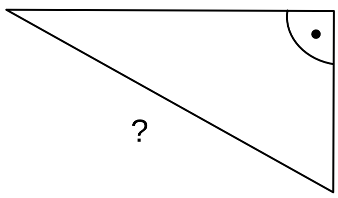
Rechnung:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad | - a^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \quad | \sqrt{\ }$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$6^2 + b^2 = 8^2$$
$$b^2 = 8^2 - 6^2 \quad | \sqrt{\ }$$
$$b^2 = \sqrt{8^2 - 6^2}$$
$$= \sqrt{64 - 36}$$
$$= \sqrt{28}$$
$$\approx \underline{\underline{5,29}}$$

Antwort: b = 5,29 cm.

2. *Beispiel:*



Berechne die fehlende Seitenlänge!

Überlegung: Die fehlende Seiten liegt dem rechten Winkel gegenüber. Es ist also die Hypotenuse c gesucht.

Rechnung:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad | \sqrt{\ }$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$= \sqrt{10^2 + 15^2}$$
$$= \sqrt{100 + 225}$$
$$= \sqrt{325}$$
$$\approx \underline{\underline{18}}$$

Antwort: Die gesuchte Hypotenuse hat eine Länge von 18cm.

WENN NÖTIG, RUNDE BEI DIESEN AUFGABEN SINNVOLL!

Sind die Dreiecke rechtwinklig? Begründe!

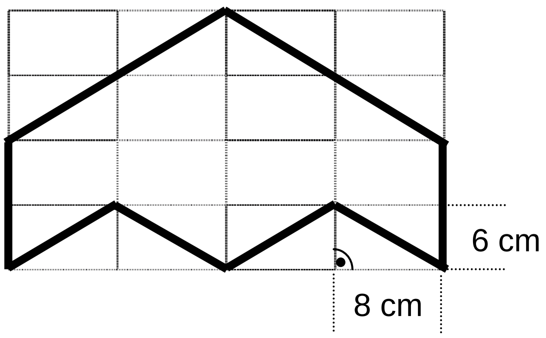
a)	a = 5 cm	b = 6,5 cm	c = 9 cm
b)	a = 30 cm	b = 18 cm	c = 24 cm
c)	a = 5 cm	b = 13 cm	c = 12 cm

Berechne!

a) In einem rechtwinkligen Dreieck sind nur eine Kathete und die Hypotenuse bekannt: a = 6cm, b = 10 cm.
Berechne die Länge der anderen Kathete!

b) Berechne die Länge d der Diagonalen eines Rechtecks mit den Seitenlängen 8 cm und 15 cm.

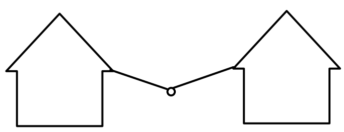
c) Welchen Umfang hat diese Figur?



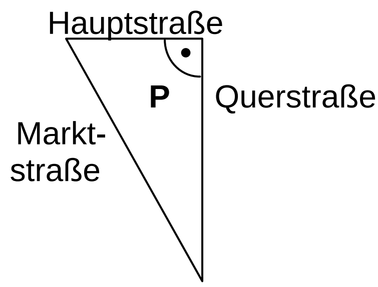
Textaufgaben

a) Ein Dorf hat einen Maibaum aufgestellt. Doch leider hat ihn schon in der ersten Mainacht die Gewalt eines Gewittersturms in einer Höhe von 15 m so abgeknickt, dass seine Spitze den Boden 8 m vom Fuß des Stammes entfernt berührt.
Wie hoch war der Maibaum, als er aufgestellt wurde?

b) Zwischen zwei Häusern, die 16 m voneinander entfernt sind, wird genau in der Mitte eine Straßenlaterne angebracht. Das Stahlseil hängt 75 cm durch.
Wie lang ist das Stahlseil?



c) Neben einem Supermarkt wird ein Parkplatz P angelegt, der die Form eines rechtwinkligen Dreiecks besitzt. Der Parkplatz nimmt an der Hauptstraße 96 m und an der Marktstraße 160 m ein.
Welche Länge hat er an der Querstraße?



Satz des Pythagoras Lösungen

WENN NÖTIG, WURDEN DIESE AUFGABEN GERUNDET!

<u>Sind die Dreiecke rechtwinklig? Begründe!</u>

a) nein, denn: $5^2 + 6{,}5^2 \boxtimes 9^2$

b) ja, denn: $18^2 + 24^2 = 30^2$

c) ja, denn: $5^2 + 12^2 = 13^2$

<u>Berechne!</u>

a) Die Länge der Kathete beträgt 8 cm.

b) Die Diagonalen des Rechtecks ist 17 cm lang.

c) Die Figur hat einen Umfang von 104 cm.

<u>Textaufgaben</u>

a) Der Maibaum war 17 m hoch.

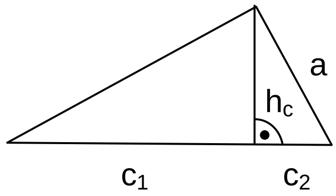
b) Das Seil ist 16,07 m lang.

c) An der Querstraße hat der Parkplatz eine Länge von 128 m.

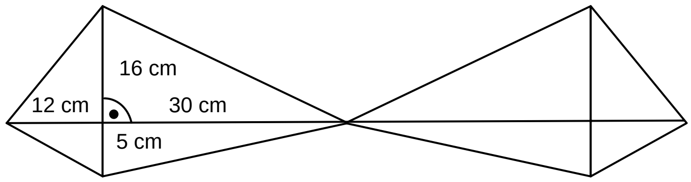
WENN NÖTIG, RUNDE BEI DIESEN AUFGABEN SINNVOLL!

Berechne!

a) In einem Dreieck
sind folgende Längen bekannt:
$a = 7$ cm; $c_1 = 14{,}26$ cm; $h_{c'} = 4$ cm.
Wie lang ist die Seite c mit $c = c_1 + c_2$?



b) Welchen Umfang hat diese symmetrische Figur?



Textaufgaben

a) 12 m entfernt von einer 14 m hohen Fichte verläuft in 6 m Höhe eine Telefonleitung. Die Fichte soll gefällt werden.
Weise nach, dass im ungünstigsten Falle mit einer Gefährdung der Telefonleitung gerechnet werden muss, wenn die Fichte unmittelbar in Höhe des Erdbodens abgesägt wird.
Zeige, dass keine Gefahr für die Telefonleitung besteht, wenn die Fichte 1,3 m über dem Erdboden abgesägt wird.

b) In einer 25 m² großen Quadratfläche sollen die beiden Diagonalen durch einen weißen Farbanstrich kenntlich gemacht werden.
Wie lang sind die weißen Linien zusammen?

c) An einem Sendemast sind in 200 m Höhe drei Stahlseile angebracht, die am Erdboden 160 m entfernt vom Mast verankert sind.
Welche Länge hat ein Seil? Runde auf m!

d) Kann ein 14 cm langer Bleistift auf einer 13 cm langen und 7 cm breiten Deckfläche eines Quaders liegen, ohne überzustehen?

e) Eine Leiter, die an eine Hauswand angelehnt ist, steht am Boden 1,10 m vom Haus entfernt.
Wie hoch reicht die Leiter, wenn sie 5 m lang ist?

WENN NÖTIG, WURDEN DIESE AUFGABEN GERUNDET!

Berechne!

a) Die Seite c ist 20 cm lang.

b) Der Umfang beträgt 194,82 cm.

Textaufgaben

a) Da der Abstand zwischen dem Fuß der Fichte und der Telefonleitung nur 13,41 m beträgt, kann es ihm ungünstigen Fall passieren, dass der Baum die Telefonleitung trifft.
Wenn die Fichte 1,3 m über dem Erdboden abgesägt wird, ist der Stamm nur noch 12,7 m lang. Der Abstand vom Stumpf zur Telefonleitung beträgt 12,89 m, so dass der Baum die Leitung nicht treffen kann.

b) Die weißen Linien sind zusammen 14,14 m lang.

c) Das Seil hat eine Länge von 161 m.

d) Ja, die Diagonale der Deckfläche ist 14,76 cm lang und somit länger als der Bleistift.

e) Die Leiter reicht 4,88 m hoch.

WENN NÖTIG, WURDEN DIESE AUFGABEN GERUNDET!

Berechne!

a) Die Seite c ist 20 cm lang.

b) Der Umfang beträgt 194,82 cm.

Textaufgaben

a) Da der Abstand zwischen dem Fuß der Fichte und der Telefonleitung nur 13,41 m beträgt, kann es ihm ungünstigen Fall passieren, dass der Baum die Telefonleitung trifft.
Wenn die Fichte 1,3 m über dem Erdboden abgesägt wird, ist der Stamm nur noch 12,7 m lang. Der Abstand vom Stumpf zur Telefonleitung beträgt 12,89 m, so dass der Baum die Leitung nicht treffen kann.

b) Die weißen Linien sind zusammen 14,14 m lang.

c) Das Seil hat eine Länge von 161 m.

d) Ja, die Diagonale der Deckfläche ist 14,76 cm lang und somit länger als der Bleistift.

e) Die Leiter reicht 4,88 m hoch.

Längen und Flächen sind Größen. Eine Größe besteht immer aus einer Maßzahl und einer Maßeinheit.

$$\underbrace{4{,}25}_{\text{Maßzahl}}\ \underbrace{\text{m}}_{\text{Maßeinheit}} \qquad\qquad \underbrace{7{,}28}_{\text{Maßzahl}}\ \underbrace{\text{m}^2}_{\text{Maßeinheit}}$$

1. Längen

Die Grundeinheit der Länge ist der Meter (m). Je nach Bedarf kann man eine größere oder kleinere Einheit wählen.

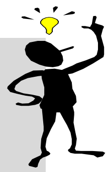
Wichtige Maßeinheiten für Längen sind:

km	(Kilometer)
m	(Meter)
dm	(Dezimeter)
cm	(Zentimeter)
mm	(Millimeter)

Für die Umrechnung der Längenmaße gelten folgende Beziehungen:

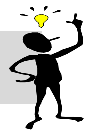
$$\begin{tikzcd}
\text{km} \arrow[r, bend left, "\bullet\ 1000"] & \text{m} \arrow[l, bend left, ":\ 1000"] \arrow[r, bend left, "\bullet\ 10"] & \text{dm} \arrow[l, bend left, ":\ 10"] \arrow[r, bend left, "\bullet\ 10"] & \text{cm} \arrow[l, bend left, ":\ 10"] \arrow[r, bend left, "\bullet\ 10"] & \text{mm} \arrow[l, bend left, ":\ 10"]
\end{tikzcd}$$

Um von einer Einheit in die nächst größere (nächst kleinere) Einheit umzurechnen, muß man die Maßzahlen durch 10 dividieren (multiplizieren).
Ausnahme: Bei der Umwandlung von km in m muß man die Maßzahl mit 1000 multiplizieren, von m in km durch 1000 dividieren.



1 km = 1000 m 1 m = 10 dm 1 dm = 10 cm 1 cm = 10 mm	1 mm = 0,1 cm 1 cm = 0,1 dm 1 dm = 0,1 m 1 m = 0,001 km

Wenn man Längenmaße addiert oder subtrahiert, muß man vorher alle Maße in dieselbe Einheit umwandeln.



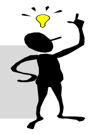
Beispiel: Ein Schüler fährt jeden Morgen 650 m mit dem Fahrrad zur Schule und mittags wieder zurück. Am Wochenende macht er eine Fahrradtour über 35 km. Wie viele km hat er in der Woche mit dem Fahrrad zurückgelegt?

Überlegung: 5 Tage je 2 Fahrten à 650 m ⇒ 10 Fahrten à 650 m
Rechnung: 10 • 650 = 6500
Umrechnung: 6500 m = 6,5 km
Rechnung: 6,5 + 35 = 41,5

Antwort: Er fährt mit dem Fahrrad 41,5 km in der Woche.

2. Umfang

Der Umfang (U) einer Fläche ist die Summe aller Seitenlängen. Die Einheit des Umfanges ist also dieselbe wie die der Seitenlängen.

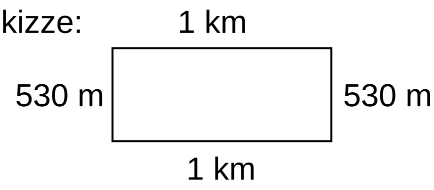


Wenn man Längenmaße addiert oder subtrahiert, muß man vorher alle Maße in dieselbe Einheit umwandeln.

Beispiel: Ein Feld ist 1 km lang und 530 m breit. Wie lang ist ein Zaun, der das Feld abgrenzt?

Überlegung: Der Umfang des Feldes muss berechnet werden.

Skizze:



Formel: U = a + b + a + b

Umrechnung: 1 km = 1000 m

Rechnung: U = 1000 + 530 + 1000 + 530
= 3060

Umrechnung: 3060 m = 3,060 km = <u>3,06 km</u>

Antwort: Der Zaun ist 3,06 km lang.

3. Flächeninhalt

Die Größe der Fläche einer Figur wird mit Flächeninhalt (A) bezeichnet. Die Grundeinheit für Flächeninhalte ist der Quadratmeter (m²).

Wichtige Maßeinheiten für Flächeninhalte sind:

km²	(Quadratkilometer)
ha	(Hektar)
a	(Ar)
m²	(Quadratmeter)
dm²	(Quadratdezimeter)
cm²	(Quadratzentimeter)
mm²	(Quadratmillimeter)

1 m² entspricht dem Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 m.
1 dm² entspricht dem Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 dm.

Für die Umrechnung der Flächenmaße gelten folgende Beziehungen:

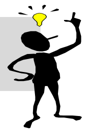
$$\mathrm{km}^2 \underset{:100}{\overset{\bullet\,100}{\rightleftarrows}} \mathrm{ha} \underset{:100}{\overset{\bullet\,100}{\rightleftarrows}} \mathrm{a} \underset{:100}{\overset{\bullet\,100}{\rightleftarrows}} \mathrm{m}^2 \underset{:100}{\overset{\bullet\,100}{\rightleftarrows}} \mathrm{dm}^2 \underset{:100}{\overset{\bullet\,100}{\rightleftarrows}} \mathrm{cm}^2 \underset{:100}{\overset{\bullet\,100}{\rightleftarrows}} \mathrm{mm}^2$$

Um von einer Einheit in die nächst größere (nächst kleinere) Einheit umzurechnen, muß man die Maßzahlen durch 100 dividieren (multiplizieren).

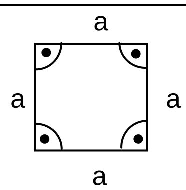
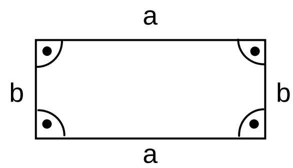
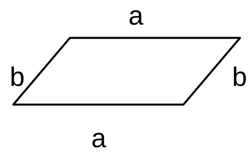
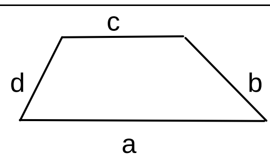
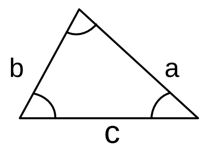
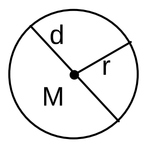
1 km^2 = 100 ha
1 ha = 100 a
1 a = 100 m^2
1 m^2 = 100 dm^2
1 dm^2 = 100 cm^2
1 cm^2 = 100 mm^2

1 mm^2 = 0,01 cm^2
1 cm^2 = 0,01 dm^2
1 dm^2 = 0,01 m^2
1 m^2 = 0,01 a
1 a = 0,01 ha
1 ha = 0,01 km^2

Wenn man Flächenmaße addiert oder subtrahiert, muß man vorher alle Maße in dieselbe Einheit umwandeln.



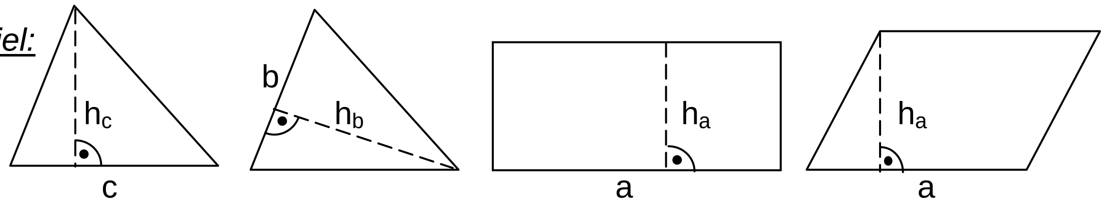
3.1. Eigenschaften von verschiedenen Flächen

Fläche	Eigenschaften	Skizze
Quadrat	- vier gleich lange Seiten - vier rechte Winkel - zwei Paare paralleler Seiten	
Rechteck	- vier Seiten, von denen die gegenüber liegenden jeweils gleich lang sind - vier rechte Winkel - zwei Paare paralleler Seiten	
Parallelogramm	- vier Seiten, von denen die gegenüber liegenden Seiten gleich lang und parallel sind	
Trapez	- vier Seiten, von denen zwei parallel sind	
Dreieck	- drei Seiten - drei Winkel	
Kreis	- Radius (r): Strecke vom Mittelpunkt (M) zu einem Punkt des Kreises. - Durchmesser (d): Strecke durch M, die zwei Punkte des Kreises miteinander verbindet. d = 2 • r	

3.2. Die Höhe von Flächen

Die Höhe einer Fläche wird immer im rechten Winkel zu der Grundseite der Höhe gemessen.

Beispiel:

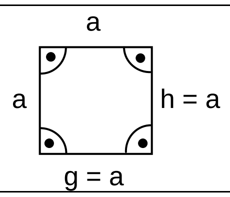
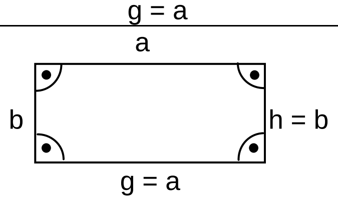
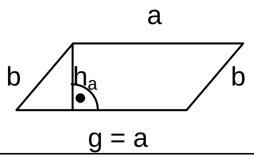
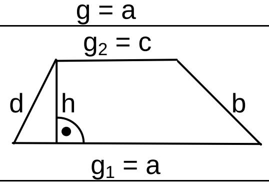
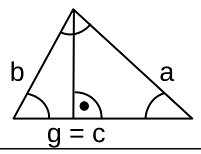
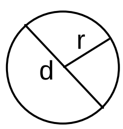


3.3. Formeln für die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt

Grundsätzlich gilt für die Berechnung der Flächeninhalte:

A = Grundseite • dazugehörige Höhe (allg. $A = g \bullet h$) bzw.

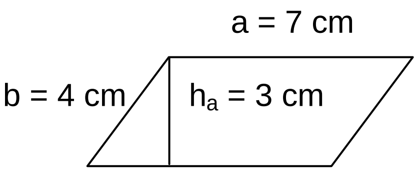
$A = \frac{1}{2} \bullet$ Grundseite • dazugehörige Höhe (allg. $A = \frac{1}{2} \bullet g \bullet h$)

Fläche	Skizze	Umfangsformel	Flächeninhaltsformel
Quadrat		$U = a + a + a + a$ $= 4a$	$A = g \bullet h$ $= a \bullet a$ $= a^2$
Rechteck		$U = a + b + a + b$ $= 2a + 2b$	$A = g \bullet h$ $= a \bullet b$
Parallelogramm		$U = a + b + a + b$ $= 2a + 2b$	$A = g \bullet h$ $= a \bullet h_a$
Trapez		$U = a + b + c + d$	$A = \frac{1}{2} \bullet (g_1 + g_2) \bullet h$ $= \frac{1}{2} \bullet (a + c) \bullet h$
Dreieck		$U = a + b + c$	$A = \frac{1}{2} \bullet g \bullet h$ $= \frac{1}{2} \bullet c \bullet h_c$
Kreis		$U = 2 \bullet \pi \bullet r$	$A = \pi \bullet r^2$

1. Beispiel:

Welchen Umfang und welchen Flächeninhalt hat ein Parallelogramm, dessen eine Seite 7 cm und eine andere 4 cm lang ist? Die zu der 7 cm langen Seite gehörende Höhe ist 3 cm lang.

Skizze:



Formeln: U = 2a + 2b A = g • h

Rechnungen: U = 2 • 7 + 2 • 4 A = 7 • 3

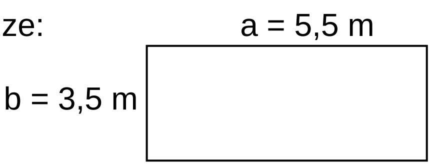
= $\underline{\underline{22}}$ = $\underline{\underline{21}}$

Antwort: Der Umfang des Parallelogramms beträgt 22 cm.
Der Flächeninhalt beträgt 21 cm².

2. Beispiel:

Karina möchte sich für ihr Zimmer einen neuen Teppich und neue Fußleisten kaufen. Ihr Zimmer ist 3,5 m breit und 5,5 m lang. Wie viel Meter Fußleisten und wie viel Quadratmeter Teppich muß sie kaufen?

Skizze:



Formeln: U = 2a + 2b A = g • h

Rechnungen: U = 2 • 5,5 + 2 • 3,5 A = 5,5 • 3,5

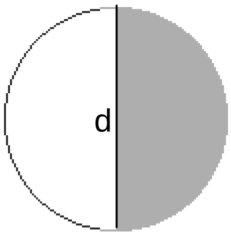
= $\underline{\underline{18}}$ = $\underline{\underline{19,25}}$

Antwort: Karina muß 18 m Fußleisten kaufen und 19,25 m² Teppich.

3. Beispiel:

Berechne den Umfang und den Flächeninhalt der dunklen Fläche mit d = 5 cm.

Skizze:



Überlegung: Die dunkle Fläche ist ein Halbkreis. Also ist der Umfang die Hälfte des Umfanges eines Vollkreises plus der Länge des Durchmessers. Der Flächeninhalt ist die Hälfte der ganzen Kreisfläche.

Formeln: $U = \frac{1}{2} \bullet (\pi \bullet d) + d$ $A = \frac{1}{2} \bullet \pi \bullet r^2$

Rechnungen: $U = \frac{1}{2} \bullet (\pi \bullet 5) + 5$ $A = \frac{1}{2} \bullet \pi \bullet 2{,}5^2$

$\approx \underline{\underline{12{,}85}}$ $\approx \underline{\underline{9{,}82}}$

Antwort: Die dunkle Fläche hat einen Umfang von 12,85 cm und einen Flächeninhalt von 9,82 cm².

WENN NÖTIG, RUNDE BEI DIESEN AUFGABEN SINNVOLL!

Umrechnung von Längen- und Flächeneinheiten

Rechne in die nächst größere Einheit um!

a) 47,4 cm	b) 564 m	c) 9128 dm²	d) 25487 a

Rechne in die nächst kleinere Einheit um!

a) 5,978 km	b) 25,43 dm	c) 4,921 ha	d) 2,98 km²

Was ist größer?

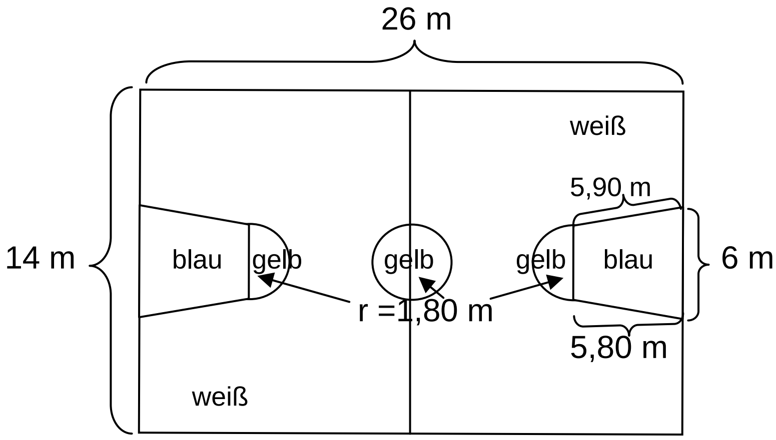
a) 5,6 km	oder	3859 m	b) 2,12 cm	oder	234 mm
c) 47,9 m²	oder	4,78 a	d) 58,8 cm²	oder	58 cm² 6 mm²

Textaufgaben

a) Welchen Flächeninhalt hat ein Quadrat, dessen Seite 5,5 cm lang sind?

b) Welchen Umfang hat ein Parallelogramm, dessen eine Seite 7 cm und die andere Seite 5,4 cm lang ist?

c) In einem Basketballfeld wird der Boden neu verlegt. Die verschiedenen Spielfeldteile sollen unterschiedliche Farben bekommen.
Wie viel m² des gelben, blauen und weißen Belags werden benötigt?
Sämtliche Linien des Feldes werden mit schwarzem Klebeband umrahmt.
Wie viel m Klebeband wird benötigt?



WENN NÖTIG, WURDEN DIESE AUFGABEN GERUNDET!

Umrechnung von Längen- und Flächeneinheiten

Rechne in die nächst größere Einheit um!

a) 4,74 dm	b) 0,564 km	c) 91,28 m²	d) 254,87 ha

Rechne in die nächst kleinere Einheit um!

a) 5978 m	b) 254,3 cm	c) 492,1 a	d) 298 ha

Was ist größer?

a) 5,6 km	>	3859 m	b) 2,12 cm	<	234 mm
c) 47,9 m²	<	4,78 a	d) 58,8 cm²	>	58 cm² 6 mm²

Textaufgaben

a) Der Flächeninhalt beträgt 30,25 cm².

b) Das Parallelogramm hat einen Umfang von 24,8 cm.

c) Folgende Mengen des Belags werden gebraucht:
blau: 55,68 m²
gelb: 20,35 m²
weiß: 287,97 m²

Es werden 147,42 m Klebeband benötigt, davon
80 m für die Umrandung des gesamten Feldes,
14 m für die Mittellinie,
22,62 m für die Kreise und
30,80 m für die Trapeze ohne Grundseite (wird von der Außenumrandung abgedeckt).

WENN NÖTIG, RUNDE BEI DIESEN AUFGABEN SINNVOLL!

Umrechnung von Längen- und Flächenmaßen

Rechne in die nächst größere Einheit um!

a) 230 cm²	b) 36,85 dm	c) 5900 a	d) 45,68 mm

Rechne in die nächst kleinere Einheit um!

a) 2,9 km²	b) 56,87 km	c) 0,79 ha	d) 7,98 dm

Ordne nach der Größe! Beginne mit der kleinsten Größe!

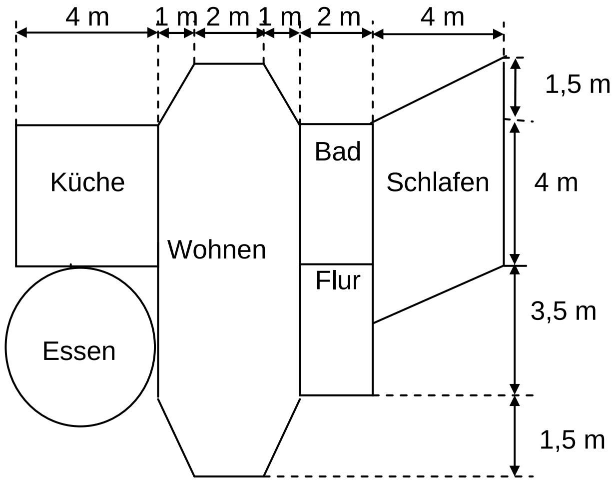
a) 5,89 cm;	0,05 m;	530 m
b) 4,67 ha;	490 a;	430 a 234 m²
c) 52 cm²;	4478 mm²;	0,53 dm²
d) 7,202 km;	6967 m;	7,1 km 301 m

Textaufgaben

a) Welchen Flächeninhalt hat ein Parallelogramm, dessen eine Seite 56 mm und die dazugehörige Höhe 5,4 cm lang ist?

b) Welchen Umfang und welchen Flächeninhalt hat ein Dreieck, wenn die Seite a = 34 mm, die Seite b = 6,7 cm, die Seite c = 5 cm sowie die Höhe zur Seite a h_a = 4,5 cm lang ist.

c) Das Esszimmer, der Flur, das Bad und die Küche des Hauses mit dem unten aufgezeichneten Grundriss werden mit Fließen ausgelegt. Wohnzimmer und Schlafzimmer werden mit Teppich ausgelegt.
Wie viel m² Fliesen und Teppich müssen gekauft werden?



WENN NÖTIG, WURDEN DIESE AUFGABEN GERUNDET!

Umrechnung von Längen- und Flächenmaßen

Rechne in die nächst größere Einheit um!

a) 2,30 dm²   b) 3,685 m   c) 59 ha   d) 4,568 cm

Rechne in die nächst kleinere Einheit um!

a) 290 ha   b) 56870 m   c) 79 a   d) 79,8 cm

Ordne nach der Größe! Beginne mit der kleinsten Größe!

a) 0,005m;	5,89 cm;	530 m
b) 430 a 234 m²;	4,67 ha;	490 a;
c) 4478 mm²;	52 cm²	0,53 dm²
d) 6967 m;	7,202 km;	7,1 km 301 m

Textaufgaben

a) Das Parallelogramm hat einen Flächeninhalt von 3024 mm² (= 30,24 cm²).

b) Der Umfang beträgt 15,1 cm, der Flächeninhalt 7,65 cm².

c) Die Flächen der einzelnen Zimmer betragen:
Esszimmer: 12,57 m², Flur: 7 m², Bad: 8 m², Küche: 16 m²,
Wohnzimmer: 39 m², Schlafzimmer: 22 m²
Es müssen 43,57 m² Fliesen und 61 m² Teppich gekauft werden.

Wenn in diesem Kapitel Probleme auftreten, bitte erst das Kapitel Längen- und Flächenberechnung bearbeiten.

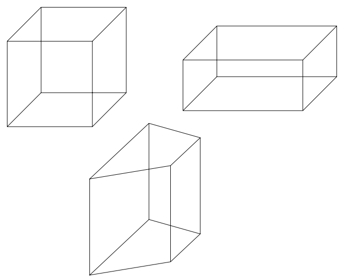
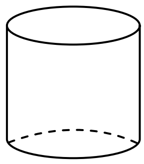
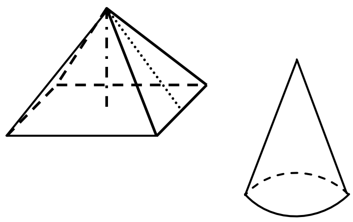
Flächen und Volumen sind Größen. Eine Größe besteht immer aus einer Maßzahl und einer Maßeinheit.

6,39 m² 5,83 m³

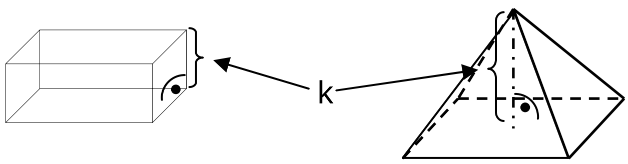
Maßzahl Maßeinheit Maßzahl Maßeinheit

1. Körper

Grundsätzlich lassen sich Körper in vier Gruppen einteilen:

Körper	Eigenschaften	Skizze
Prismen	- Grund- und Deckfläche parallele und deckungsgleiche n-Ecke (n ≥ 3) - Seitenflächen stehen senkrecht zu G	
Zylinder	- Grund- und Deckfläche parallele und deckungsgleiche Kreisflächen	
Spitzkörper	- laufen nach oben spitz zu und haben somit keine Deckfläche	
Kugel	- Alle Punkte, die auf der Kugeloberfläche liegen, haben die gleiche Entfernung vom Mittelpunkt der Kugel haben.	

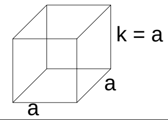
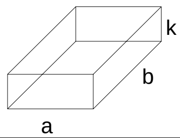
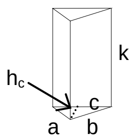
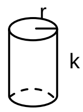
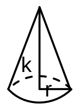
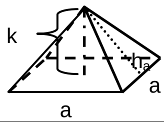
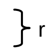
Die Körperhöhe (k) wird immer im rechten Winkel zu der Grundfläche gemessen.



2. Oberflächenberechnung

Die **Oberfläche** (O) eines Körpers (ausgenommen: Kugel) ist die Summe verschiedener Flächen: Grundfläche (G) + Deckfläche (D) + Seitenflächen.

Die Summe der Seitenflächen wird als **Mantelfläche** (M) bezeichnet.

Körper		Skizze	Mantelflächenformel	Oberflächenformel
Prisma	Würfel (Prisma mit quadratischer Grundfläche)		$M = 4a \bullet k$ $= 4a \bullet a$ $= 4a^2$	$O = 2G + M$ $= 2a^2 + 4a^2$ $= 6a^2$
	Quader (Prisma mit rechteckiger Grundfläche)		$M = (a + b + a + b) \bullet k$ $= (2a + 2b) \bullet k$	$O = 2G + M$ $= 2ab + (2a + 2b) \bullet k$
	bel. Prisma (hier: mit dreieckiger Grundfläche)		$M = (a + b + c) \bullet k$	$O = 2G + M$ $= 2\,(\frac{1}{2} \bullet c \bullet h_c) +$ $(a + b + c) \bullet k$ $= c \bullet h_c + (a+b+c) \bullet k$
Zylinder			$M = (2\pi r) \bullet k$	$O = 2G + M$ $= 2 \bullet (\pi r^2) + (2\pi r) \bullet k$
Spitz-körper	Kegel		$M = \pi r\, s$ (mit s = Seitenkante)	$O = G + M$ $= \pi r^2 + \pi r\, s$
	Quadratische Pyramide		$M = 4 \bullet (\frac{1}{2} \bullet a \bullet h_a)$ $= 2 \bullet a \bullet h_a$	$O = G + M$ $= a^2 + 2 \bullet a \bullet h_a$
Kugel			Gibt es nicht!!!	$O = 4\pi r^2$

3. Volumenberechnung

Die Grundeinheit des Volumens (V) ist der Kubikmeter (m^3). Je nach Bedarf kann man die Grundeinheit oder eine kleinere Einheit wählen.

Wichtige Maßeinheiten für Volumen sind:

m^3	(Kubikmeter)
dm^3	(Kubikdezimeter)
cm^3	(Kubikzentimeter)
mm^3	(Kubikmillimeter)

Für die Umrechnung der Volumenmaße gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
m^3 \arrow[r, bend left, "\bullet\,1000"] & dm^3 \arrow[l, bend left, ": 1000"] \arrow[r, bend left, "\bullet\,1000"] & cm^3 \arrow[l, bend left, ": 1000"] \arrow[r, bend left, "\bullet\,1000"] & mm^3 \arrow[l, bend left, ": 1000"]
\end{tikzcd}$$

Um von einer Einheit in die nächst größere (nächst kleinere) Einheit umzurechnen, muß man die Maßzahlen durch 1000 dividieren (multiplizieren).

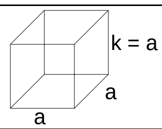
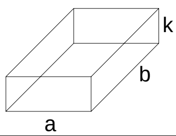
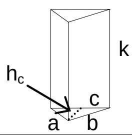
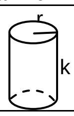
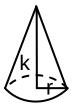
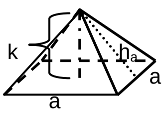
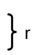
1 m³ = 1000 dm³ 1 dm³ = 1000 cm³ 1 cm³ = 1000 mm³	1 mm³ = 0,001 cm³ 1 cm³ = 0,001 dm³ 1 dm³ = 0,001 m³

Wenn man Volumenmaße addiert oder subtrahiert, muß man vorher alle Maße in dieselbe Einheit umwandeln.

Grundsätzlich gilt für die Volumenberechnung:

Grundfläche • Körperhöhe (allg. V = G • k) bzw.

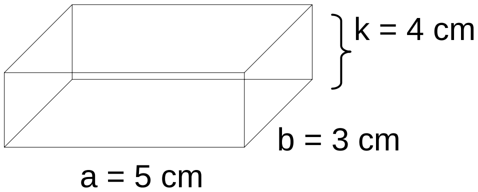
$\frac{1}{3}$ • Grundfläche • Körperhöhe (allg. V = $\frac{1}{3}$ • G • k)

Körper		Skizze	Volumenformel
Prisma	Würfel (Prisma mit quadratischer Grundfläche)		V = G • k = a² • = a³
	Quader (Prisma mit rechteckiger Grundfläche)		V = G • k = ab • k
	bel. Prisma (hier: mit dreieckiger Grundfläche)		V = G • k = ($\frac{1}{2}$ • a • h_a) • k
Zylinder			V = G • k = πr² • k
Spitz-körper	Kegel		V = $\frac{1}{3}$ • G • k = $\frac{1}{3}$ • πr² • k
	Quadratische Pyramide		V = $\frac{1}{3}$ • G • k = $\frac{1}{3}$ • a² • k
Kugel			V = $\frac{4}{3}$ πr³

1. Beispiel:

Gegeben ist ein Quader mit a = 5 cm, b = 3 cm und der Körperhöhe k = 4 cm.
Berechne die Mantel- und Oberfläche und das Volumen des Körpers!

Skizze:



Formeln:

$M = (2a + 2b) \bullet k$ $O = 2G + M = 2ab + M$ $V = G \bullet k = ab \bullet k$

Rechnungen:

$M = (2 \bullet 5 + 2 \bullet 3) \bullet 4 = \underline{\underline{64}}$

$O = 2 \bullet 5 \bullet 3 + 64 = \underline{\underline{94}}$

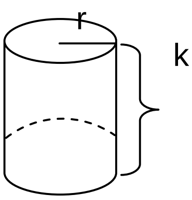
$V = 5 \bullet 3 \bullet 4 = \underline{\underline{60}}$

Antwort: Die Mantelfläche des Quaders beträgt 64 cm², die Oberfläche 94 cm² und sein Volumen 60 cm³.

2. Beispiel:

Ein Zylinder hat einen Radius von r = 2,5 cm und eine Körperhöhe k = 20 cm.
Berechne die Mantel- und Oberfläche sowie das Volumen!

Skizze:



Formeln:

$M = (2\pi r) \bullet k$ $O = 2G + M = 2\pi r^2 + M$ $V = G \bullet k = \pi r^2 \bullet k$

Rechnungen:

$M = (2\pi \bullet 2{,}5) \bullet 20 \approx \underline{\underline{314{,}16}}$

$O = 2\pi \bullet (2{,}5)^2 + 314{,}16 \approx \underline{\underline{353{,}43}}$

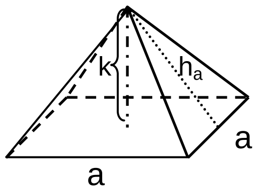
$V = \pi \bullet (2{,}5)^2 \bullet 20 \approx \underline{\underline{392{,}63}}$

Antwort: Die Mantelfläche des Körpers ist 314,16 cm², die Oberfläche 353,43 cm² und sein Volumen 392,63 cm³ groß.

3. Beispiel:

Die Cheopspyramide in Ägypten hat eine quadratische Grundfläche mit einer Kantenlänge a = 230 m, der Seitenhöhe h_a = 186 m und der Körperhöhe k = 146 m. Berechne die Mantel- und Oberfläche und das Volumen!

Skizze:



Formeln:

$M = 2 \bullet a \bullet h_a$ $O = G + M = a^2 + M$ $V = \frac{1}{3} \bullet G \bullet k = \frac{1}{3} \bullet a^2 \bullet k$

Rechnungen:

$M = 2 \bullet 230 \bullet 186 = \underline{\underline{85560}}$

$O = (230)^2 + 85560 = \underline{\underline{138460}}$

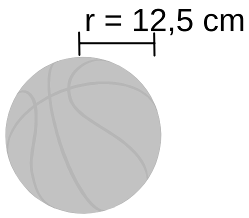
$V = \frac{1}{3} \bullet (230)^2 \bullet 146 = \underline{\underline{2574466{,}6}}$

Antwort: Die Mantelfläche des Körpers beträgt 85560 m², die Oberfläche 138460 m² und sein Volumen 2574466,6 m³.

4. Beispiel:

Ein Basketball hat einen Radius von 12,5 cm. Berechne, wie viel Leder zur Herstellung eines Basketballes benötigt werden und wie groß sein Volumen ist.

Skizze:



Formeln:

$O = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Rechnungen:

$O = 4\pi \bullet (12{,}5)^2 \approx \underline{\underline{1963{,}5 = 19{,}64}}$

$V = \frac{4}{3}\pi \bullet (12{,}5)^3 \approx \underline{\underline{8179{,}69}}$

Antwort: Es werden 19,64 dm² Leder benötigt. Das Volumen des Balles beträgt 8179,69cm³.

WENN NÖTIG, RUNDE BEI DIESEN AUFGABEN SINNVOLL!

Umrechnung von Volumeneinheiten

Rechne um in die angegebene Einheit!

a) 5600 mm³ (cm³) b) 28 m³ (dm³) c) 202 cm³ (mm³)

d) 726000 mm³ (cm³) e) 345 dm³ (m³) f) 37 dm³ (cm³)

Welche Angabe ist größer?

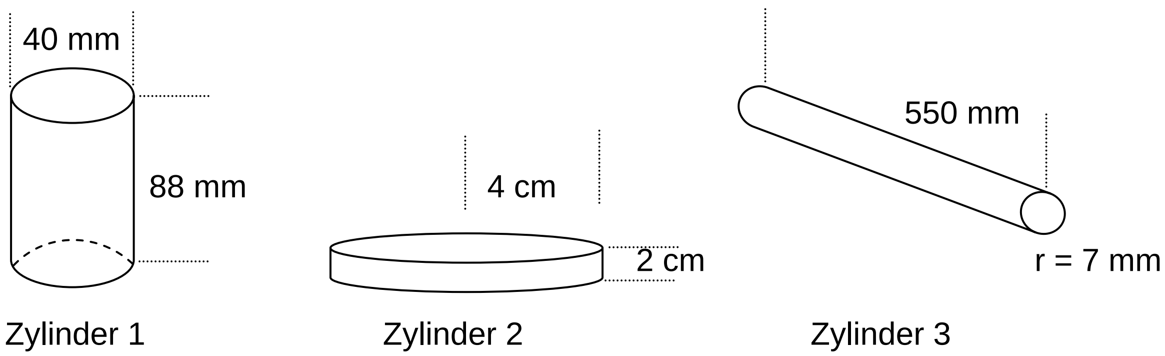
a) 36 dm³ oder 350000 mm³

b) 1,68 m³ oder 1650 dm³ 3300 cm³

c) 0,75 m³ oder 755 dm³

d) 8572 mm³ oder 85,72 dm³

Ordne die folgenden Zylinder nach ihrem Volumen und nach ihrer Oberfläche!



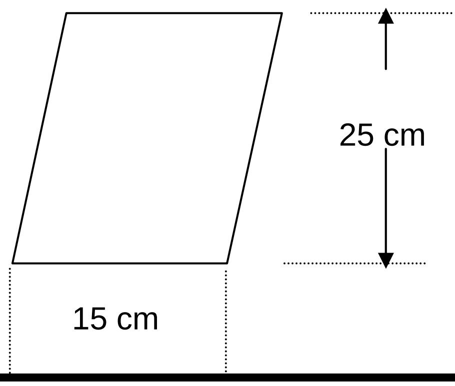
Textaufgaben

a) Bei einer Pyramide hat die quadratische Grundfläche eine Seitenlänge von a = 15 cm. Die Körperhöhe der Pyramide beträgt k = 18 cm.
Wie groß ist das Volumen?

b) Berechne Grund-, Mantel- und Oberfläche sowie Volumen von einem Prisma mit dreieckiger Grundfläche mit a = 7 m; b = 10 m; c = 2 m; h_b = 2,2 m; k = 3 m.

c) Es soll ein Schwimmbecken von 50 m Länge, 20 m Breite und 2 m Tiefe gebaut werden.
Wie groß ist die Fläche, auf die Kacheln geklebt werden müssen?
Wieviel m³ Wasser werden für die Füllung maximal gebraucht?

d) Berechne das Volumen des Körpers mit folgender Grundfläche und der Körperhöhe k = 150 cm!



WENN NÖTIG, WURDEN DIESE AUFGABEN GERUNDET!

Umrechnung von Volumeneinheiten

Rechne um in die angegebene Einheit!

a) 5,6 cm³	b) 28000 dm³	c) 202000 mm³
d) 726 cm³	e) 0,345 m³	f) 37000 cm³

Welche Angabe ist größer?

a) 36 dm³ > 350000 mm³

b) 1,68 m³ > 1650 dm³ 3300 cm³

c) 0,75 m³ < 755 dm³

d) 8572 mm³ > 85,72 dm³

Ordne die folgenden Zylinder nach ihrem Volumen und nach ihrer Oberfläche!

Oberfläche:		Volumen:	
Zylinder 3:	244,98 cm²	Zylinder 1:	110,58 cm³
Zylinder 2:	150,80 cm²	Zylinder 2:	100,53 cm³
Zylinder 1:	135,72 cm²	Zylinder 3:	84,67 cm³

Textaufgaben

a) Das Volumen beträgt 1350 cm³.

b) Die Grundfläche ist 11 m², die Mantelfläche 57 m² und die Oberfläche 79 m² groß.
Das Volumen beträgt 33 m³.

c) Die Kacheln müssen auf eine Fläche von 1280 m² geklebt werden.
In das Becken können maximal 2000 m³ Wasser gefüllt werden.

d) Das Volumen des Körpers beträgt 56250 cm³ (= 56,25 dm³).

Körperberechnungen Aufgaben

WENN NÖTIG, RUNDE BEI DIESEN AUFGABEN SINNVOLL!

Umrechnung von Volumeneinheiten

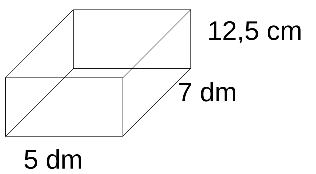
Rechne in die angegebene Einheit um!

a) 1800 mm³ (cm³)	b) 2,48 m³ (dm³)	c) 480 cm³ (mm³)
d) 1850023 cm³ (dm³)	e) 17459 dm³ (m³)	f) 2,5 dm³ (cm³)

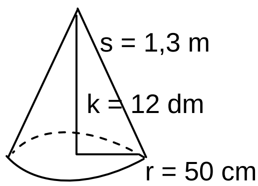
Ordne nach der Größe! Beginne mit der kleinsten Größe!

a) 3 dm³;	410 cm³;	0,25 m³
b) 4 cm³ 30 mm³;	3 cm³ 110 mm³;	3 cm³ 1310 mm³
c) 1225 mm³;	0,456 cm³;	0,0011 dm³

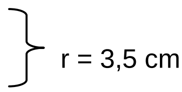
Ordne folgende Körper nach der Größe ihres Volumens und ihrer Oberfläche!



Quader



Kegel



Kugel

Textaufgaben

a) Bei einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche beträgt das Volumen 4050 cm³. Die Körperhöhe der Pyramide beträgt k = 18 cm.
Berechne die Seitenlänge der Grundfläche!

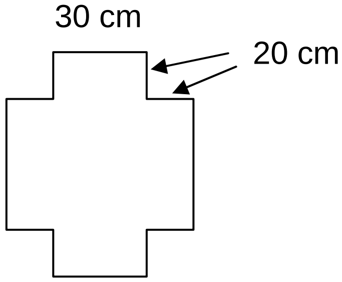
b) Für ein Prisma mit trapezförmiger Grundfläche sind folgende Maße angegeben:

Seitenlängen der parallelen seiten der Grundfläche:	12 cm und 18 dm
Seitenlänge der nicht parallelen Seiten der Grundfläche:	8 cm und 9,5 cm
Seitenhöhe der Grundfläche:	0,4 dm
Körperhöhe des Prismas:	17 dm

Berechne die Grund-, Mantel-, Oberfläche und das Volumen!

c) Ein quaderförmiges Schwimmbecken ist 50 m lang und 2,5 m tief.
Wie breit ist das Becken, wenn es ein Volumen von 3125 m³ beträgt?
Wie hoch steht das Wasser, wenn 2250 m³ in dem Becken sind?

d) Berechne das Volumen des Körpers mit folgender Grundfläche und der Körperhöhe k = 150 cm!



WENN NÖTIG, WURDEN DIESE AUFGABEN GERUNDET!

Umrechnung von Volumeneinheiten

Rechne in die angegebene Einheit um!

a) 1,8 cm³	b) 2480 dm³	c) 480000 mm³
d) 1850,023 dm³	e) 17,459 m³	f) 2500 cm³

Ordne nach der Größe! Beginne mit der kleinsten Größe!

a) 410 cm³	3 dm³;	0,25 m³
b) 3 cm³ 110 mm³;	4 cm³ 30 mm³;	3 cm³ 1310 mm³
c) 0,456 cm³;	0,0011 dm³;	1225 mm³

Ordne folgende Körper nach der Größe ihres Volumens und ihrer Oberfläche!

Oberfläche:	Kegel:	282,74 dm²	Volumen:	Kegel:	314,16 dm³
	Quader:	100 dm²		Quader:	43,75 dm³
	Kugel:	153 ,94 cm²		Kugel:	179,59 cm³

Textaufgaben

a) Das Seitenlänge beträgt 25,98 cm.

b) Die Grundfläche des Körpers beträgt 60 cm², die Mantelfläche 80,75 dm², die Oberfläche 81,95 dm² und das Volumen 10,2 dm³.

c) Das Becken ist 25 m breit.
Der Wasserstand beträgt 1,8 m.

d) Das Volumen des Körpers beträgt 495000 cm³ (= 495 dm³).