V1

Von Daten zu Funktionen

Aufgaben · Lernheft

Von Daten zu Funktionen

Worum geht es eigentlich?

In diesem Themenbereich wiederholen Sie Funktionen, die Sie bereits in der Mittelstufe kennen gelernt haben, und Sie lernen neue kennen:
Das geschieht oft in einer Aufgabe, die sich mit einer realitätsbezogenen Problemstellung befasst.
Es gibt Aufgaben, bei denen bestimmte Funktionsterme vorgegeben sind und darüber nachgedacht wird, ob diese Terme ein angemessenes mathematisches Modell darstellen. Es gibt Aufgaben, bei denen die Terme erst ermittelt werden müssen und auch Aufgaben, bei denen es eigentlich keine Terme geben kann.
Bei der Bearbeitung von Problemen in der Realität ist es oft nötig, geeignete Funktionen zur Modellierung des Sachverhalts zu wählen. Dazu braucht man aber einen Überblick über die Funktionsklassen und ihre Eigenschaften und auch Kenntnisse, wie man eine prinzipiell geeignete Funktion anpassen könnte.

Sie sollen sich also in diesem Themenbereich ein
Überblickswissen zu Funktionen
erarbeiten:

- Charakteristische Eigenschaften
- Darstellungs- und Anpassungsmöglichkeiten
- Eignung für Modellierung

Bei einigen Aufgaben geht es außerdem um die Ermittlung optimaler Werte. Solche Fragestellungen sind in der Realität recht häufig. Die „Idee der Optimierung“ wird daher noch in weiteren Themenbereichen eine wichtige Rolle spielen.

Insgesamt sollen Sie die nebenstehenden Kompetenzen erwerben.

Inhalt:

Aufgaben
überwiegend rationale Funktionen . . . . 1 - 8
trigonometrische Funktionen 9
Exponential-, Logarithmus-Funktion . . . . . . 10 - 11
Änderungsrate (ohne Term) 12

Informationen 13

Rückblick · Selbsteinschätzung 14

Lösungsvorschläge 16

Autoren: Winfried Euba · Jens Weitendorf
Version 2.2 (19. August 2006)

V1

Kompetenzen

(1) Sie erkennen, dass es verschiedene Arten von Daten gibt und unterscheiden,
- ob es empirische oder aus einem funktionalen Zusammenhang gewonnene Daten sind,
- ob es deterministische oder zufällige Daten sind,
- ob es diskrete oder kontinuierliche Daten sind

(2) Sie stellen Daten in einer Tabelle, durch einen Graphen oder eine Gleichung dar

(3) Sie erfahren, dass eine Gleichung für eine Funktion eine oft angestrebte – aber nicht immer mögliche – Form der Darstellung ist, da sich dann auch die Funktion ohne Probleme durch eine Tabelle oder einen Graphen darstellen lässt

(4) Sie erkennen, dass Funktionen ein Hilfsmittel sind, um realitätsbezogene Prozesse zu beschreiben, zu analysieren und zu lösen

(5) Sie wiederholen (oder lernen kennen) die Funktionsklassen der ganzrationalen, der gebrochen rationalen, der trigonometrischen und der Exponentialfunktionen und lernen ihre jeweilige gemeinsame Charakterisierung kennen

(6) Sie bestimmen Nullstellen einfacher Funktionen und lernen mindestens ein einfaches numerisches Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen kennen

(7) Sie bemerken, dass es inner- und außermathematische Fragestellungen gibt, für die nicht nur Funktionswerte sondern auch deren Änderung eine Bedeutung haben, und lösen so elementare Optimierungsprobleme näherungsweise graphisch

(8) Sie stellen in einfachen Fällen Gleichungen von Funktionen auf, auch mit Hilfe von Gleichungssystemen, und lösen diese

(9) Sie erfahren die Möglichkeiten des Computers bzw. eines entsprechenden Taschenrechners beim Aufstellen von Funktionsgleichungen, bei der Analyse von Funktionen und beim Lösen von Gleichungssystemen.

Begleitende Aufgabe

Stellen Sie während der Unterrichtsreihe zwei Übersichten zusammen:

Dokumentieren Sie die Entwicklung Ihrer Übersichten

behandelte Funktionsklassen

- charakteristischen Eigenschaften
- Zusammenhang mit anderen Funktionen *(wenn vorhanden)*
- Eignung für Modellierung.

z.B. Verlauf des Graphen, Anzahl der Nullstellen

z.B. der Kosinus kann durch geeignetes Verschieben der Sinus-Funktion erreicht werden

z.B. trigonometrische Funktionen eignen sich zur Modellierung periodischer Vorgänge

Umgang mit Funktionen

- Darstellungsformen
  (Mit Beispielen, bei denen kein Term vorhanden ist)
- Anpassen des Graphen *(Stauchen/Strecken · Verschieben)*
- Zusammensetzen
  (Bilden neuer Funktionen mit Hilfe bekannter)
- Herstellen von Funktionen aus Daten
- ...

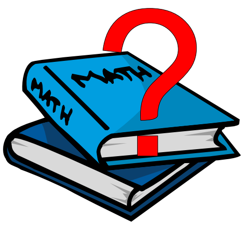
Das wissen Sie schon:
Graph, Tabelle, Term (gibt es nicht immer)
Strategie, wenn kein Term vorhanden ist?

Es kommen hierzu Beispiele im Unterricht

Die Übersichten können z.B. in Form von Tabellen erstellt werden.
Sie sollten diese Übersichten kontinuierlich Ihrem Kenntnisstand angepassen.

Aufgabe 1

Notieren Sie, welche Funktionen Sie in Ihrer bisherigen Schullaufbahn kennen gelernt haben und ordnen Sie diese geeignet an.



Fügen Sie jeweils hinzu

- Eigenschaften, die Ihnen einfallen
- Anwendungen
  (z.B. Realitätsbezüge, innermathematische Fragen)

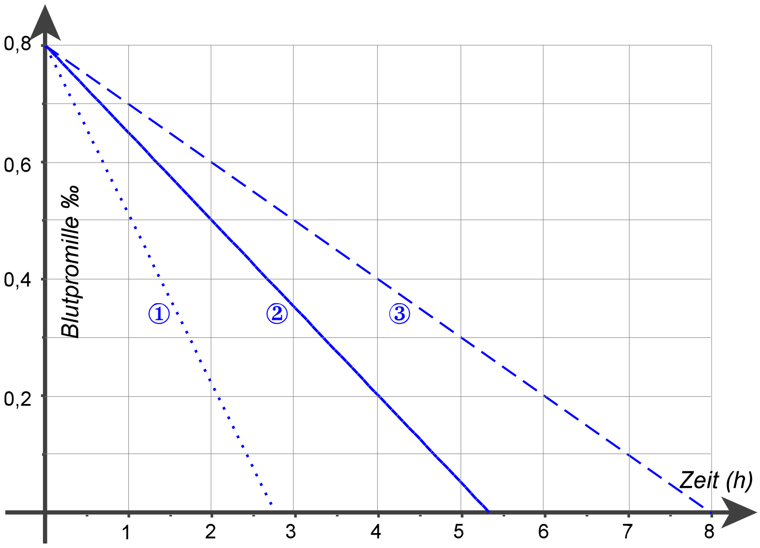
Aufgabe 2

In einer medizinischen Abhandlung ist zu lesen:

Die Abbaurate in der Leber verläuft bis ca. 0,2 Promille pro Stunde linear und unabhängig von der konsumierten Menge.

Gemeint ist der Abbau von Ethanol, also Alkohol. Die Abbaurate wird durch die Trinkgewohnheit "trainiert": etwa 0,2 Promille ist die Obergrenze für „normalen" Alkoholkonsum, bei krankhaftem Konsum ist sie höher.

Die abgedruckte Grafik zeigt drei Abbaugeschwindigkeiten: ① 0,29 ‰, ② 0,15 ‰ und ③ 0,1 ‰ (jeweils pro Stunde).



a) Deuten Sie die Grafik im Kontext der Aufgabe.

b) Geben Sie die Terme der drei Funktionen an, deren Graphen mit ①, ②, und ③ im betrachteten Bereich übereinstimmen und begründen Sie Ihre Angaben.

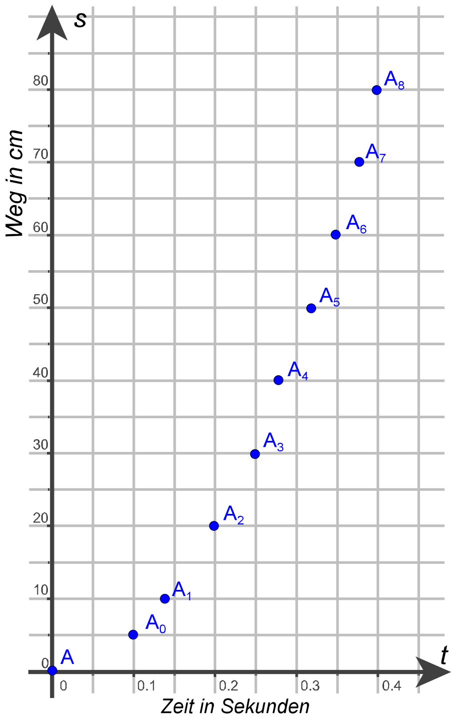
c) Wie unterscheiden sich die drei Funktionen (Graph, Term)? Nennen Sie (allgemeine) Eigenschaften der Funktionen aus dieser Klasse.

Aufgabe 3

In einer Physikstunde wird eine Versuchsreihe zum freien Fall durchgeführt, die z.B. folgende Mittelwerte ergibt:

Weg s (cm)	5	10	20	30	40	50	60	70	80
Zeit t (s)	0,10	0,14	0,20	0,25	0,28	0,32	0,35	0,38	0,40

Die Mittelwerte sind als Punkte in nebenstehendes Weg-Zeit-Diagramm eingetragen, ergänzt um A (0|0).



In der Formel steht v für Geschwindigkeit, s für Weglänge.

Geschwindigkeit am besten in km/h angeben.

a) Berechnen Sie den Term einer Funktion, deren Graph angenähert durch die ermittelten Punkte verläuft.

b) Beschreiben Sie Eigenschaften von derartigen Funktionen. Wie kann eine solche Funktion verschoben werden (in x- oder y-Richtung), wie gestaucht/gestreckt?

c) Interpretieren Sie das Diagramm hinsichtlich der Geschwindigkeit des Versuchskörpers und begründen Sie Ihre Deutung an Hand des Graphen.

d) Zwei Schüler sitzen auf der Fensterbank des geöffneten Fensters im Physiksaal im 2. Stock. Der Lehrer fordert sie auf, diesen Platz zu verlassen, und weist sie auf die Gefährlichkeit hin: Er lässt sie ausrechnen, mit welcher Geschwindigkeit ein Körper unten aufprallen würde. Nach einiger Diskussion fällt den beiden die Formel $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot s}$ ein. Und dass die Fallbeschleunigung g = 9,81 m/s^2 ist.

Schätzen Sie die Geschwindigkeit ab.

Beschreiben Sie die Wurzelfunktion w: x → $\sqrt{x}$ mit ihren Eigenschaften.

Aufgabe 4

a) Von einem riesigen Eisberg bricht eine nahezu quaderförmige Scholle ab, die etwa 800m lang, 400m breit und 120m dick ist, und treibt in wärmere Gewässer, wo sie zu schmelzen beginnt.
Zur Berechnung des verbleibenden Volumens nimmt man an, dass sich pro Tag Länge, Breite und Dicke um jeweils 1 m vermindern.

a1) Berechnen Sie das Volumen nach 10 Tagen.

a2) Geben Sie eine Formel für die Größe des Volumens nach x Tagen an und testen Sie Ihre Formel für x = 10.

a3) Bei dieser „Formel“ handelt es sich um einen Term. Wenn noch nicht geschehen, multiplizieren Sie ihn aus und nennen ihn V(x). Zeichnen Sie den Graphen zu V(x) in ein Koordinatensystem.

a4) Wann wäre die Eisscholle völlig geschmolzen, wenn der Schmelzprozess immer weiter so verliefe wie oben beschrieben?
Wie beurteilen Sie das Modell für den Schmelzprozess?

b) Ein solcher Term, wie Sie ihn in Aufgabenteil a) berechnet haben, heißt *Polynom*. Und weil der höchste vorkommende Exponent der Variablen (hier x) 3 ist, sagt man zu V(x) *Polynom 3. Grades*.

Polynom 3. Grades: $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Welche Funktion erhält man, wenn $a_3 = 0$ ist, welche, wenn $a_3 = 0$ und $a_2 = 0$ ist?

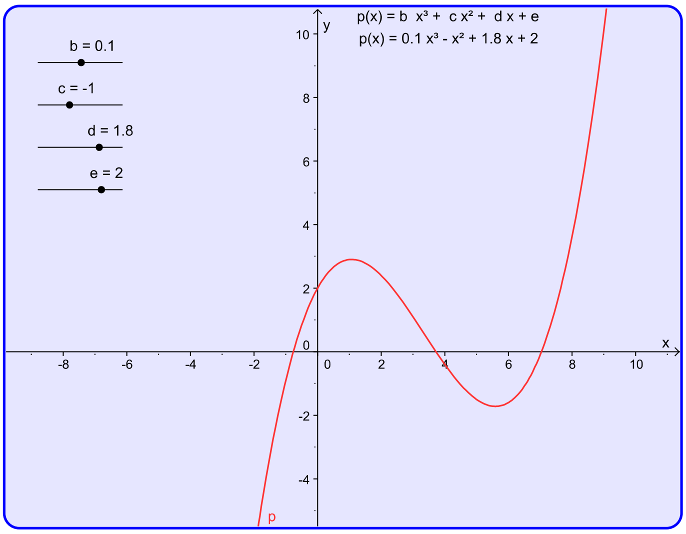
b1) Ändern Sie den Maßstab Ihrer Zeichnung von a3) gegebenenfalls so, dass Sie mehr über den weiteren Verlauf von V sehen können.
Notieren Sie alle Eigenschaften des Graphen, die Ihnen wichtig erscheinen, eventuell auch im Unterschied zu Graphen, die Ihnen bisher begegnet sind.

b2) Experimentieren Sie mit verschiedenen Polynomen verschiedenen Grades, um Aussagen über den prinzipiellen Verlauf der Graphen zu erhalten.
Versuchen Sie, Ihre Erkenntnisse geeignet zu ordnen und übersichtlich darzustellen.

Dateien

- HTML-Seiten mit Applets im Geogebra-Ordner:
- V1neu-start.html

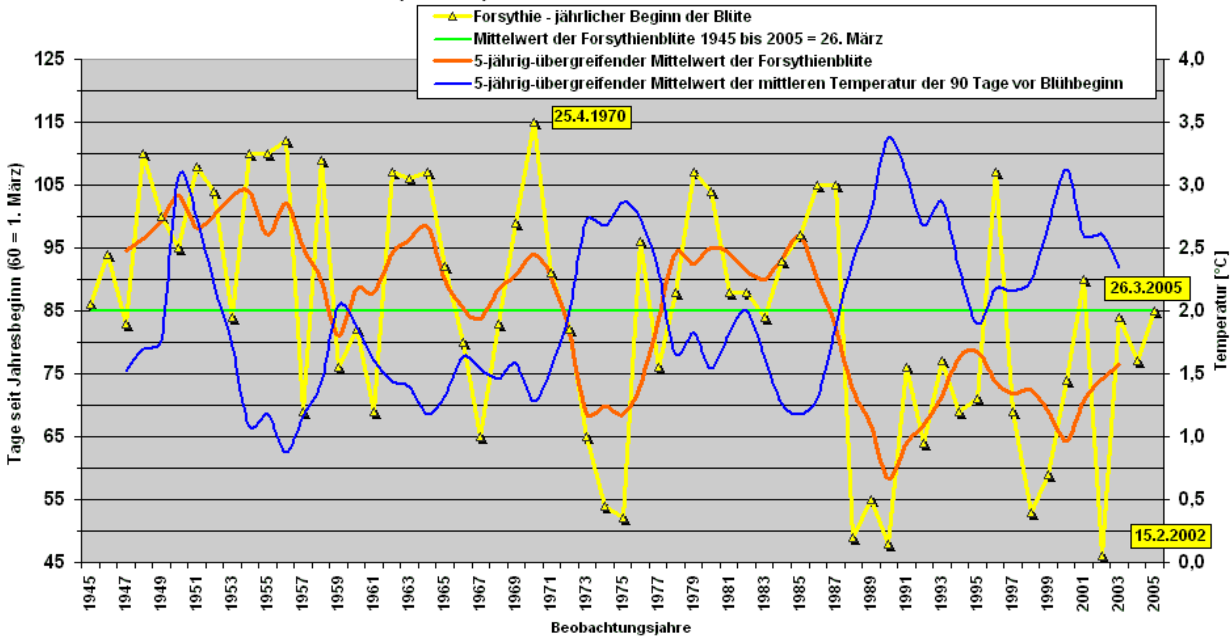
GeoGebra



Applet zu Polynom 3. Grades mit Schiebereglern

Aufgabe 5

Forsythien-Kalender für den Standort "Hamburger Lombardsbrücke" 1945 bis 2005 notiert von Carl Wendorf (+ 1984) und Jens Iska-Holtz



Kann man einen berechnen und wäre das sinnvoll?

Stellen Sie Überlegungen an, welcher Art der funktionale Zusammenhang obiger Abbildung sein könnte:

- Worauf basiert die Graphik vermutlich?
- Gibt es jeweils einen Funktionsterm für die Graphen?

In welchen Kontexten tauchen ähnliche Graphiken auf?

Aufgabe 6

Aus welchen Funktionen besteht die STEUERFUNKTION? Schreiben Sie die Steuerfunktion auf!

Dateien
- DERIVE-Datei V1neu-06A.dfw
- V1neu-06A.xls V1neu-06A.qpw

EStG §32a Einkommensteuertarif (Fassung vom 9. Dezember 2004)

(1) [1]Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. [2]Sie beträgt vorbehaltlich der §§ 32b, 34, 34b und 34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 7.664 Euro (Grundfreibetrag): 0;
2. von 7.665 Euro bis 12.739 Euro: (793,10 · y + 1.600) · y;
3. von 12.740 Euro bis 52.151 Euro: (265,78 · z + 2.405) · z + 1.016;
4. von 52.152 Euro an: 0,45 · x – 8.845.

[3] "y" ist ein Zehntausendstel des 7.664 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. [4] "z" ist ein Zehntausendstel des 12.739 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. [5] "x" ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. [6]Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

(2) und (3) weggefallen

a) Erstellen Sie eine Steuertabelle und einen Graphen.

b) Ist der oben stehende Tarif *gerecht* ?

Steuer relativ zum Einkommen, also Quotient: liefert Prozentwert

c) Erstellen Sie auch für den durchschnittlichen Steuersatz eine Tabelle und einen Graphen.

Hinweise zur Bedienung von Excel

Jede Eingabe von Rechen-Befehlen beginnt mit dem Gleichheitszeichen. Sonst hält Excel die Eingabe für normalen Text.

Für die Steuer *(das Einkommen steht in Spalte A, beginnend in A4.*
Der Zellen-Name, z.B. A4, steht stellvertretend für den Inhalt dieser Zelle.
Die Einträge beginnen in der Zelle B4):

Entweder vier verschiedene Eingaben je nach Einkommen

Solange in A4 Zahlen kleiner als 7665 stehen	=0
zwischen 7665 und 12.739	=(793,10*(A4-7664)/10000+1600)*(A4-7664)/10000
zwischen 12.740 und 52.151	=(265,78*(A4-12739)/10000+2300)*(A4-12739)/10000+1016
ab 52.152	=0,45*A4-8845

oder eine einzige Eingabe mit WENN-Befehlen

```
=WENN(A4<7665;0;
        WENN(A4<12740;(793,10*(A4-7664)/10000+1600)*(A4-7664)/10000;
                WENN(A4<52152;(265,78*(A4-12739)/10000+2300)*(A4-12739)/10000+1016;0,45*A4-8845)))
```

Aufgabe 7

Viele Lebensmittel sind in zylinderförmigen Blechdosen abgepackt. In dieser Aufgabe soll untersucht werden, ob dabei auch auf einen möglichst geringen Verbrauch von Verpackungsmaterial, hier verzinktem Blech, geachtet wurde.

a) Besorgen Sie sich eine leere Standard-Blechdose vom „Typ 850“, d.h. mit einem Volumen von 850 cm^3 (= 850 ml). Berechnen Sie das Volumen, indem Sie Ihre Dose ausmessen. Überprüfen Sie das Volumen auch durch Füllen mit Wasser und einem Messbecher.

Möglichst geringer Materialverbrauch bedeutet zunächst „Zylinder mit minimaler Oberfläche“ (das Volumen sei 850). Überlegen Sie sich, wie Sie untersuchen können, ob Ihre reale Dose tatsächlich eine minimale Oberfläche (unter allen 850 ml - Dosen) aufweist, und führen Sie diese Untersuchung durch.

b) Der Term für die Oberfläche besteht prinzipiell aus zwei Bauteilen:

$$f_1(x) = x^2 \text{ und } f_2(x) = \frac{1}{x}.$$

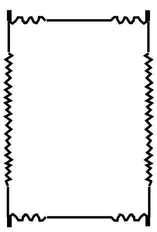
Schauen Sie sich das zugehörige Applet an. Warum überwiegt für „kleine“ x > 0 f_2, für „große“ x dagegen f_1?

Zusammensetzen

Bauform des Terms

GeoGebra

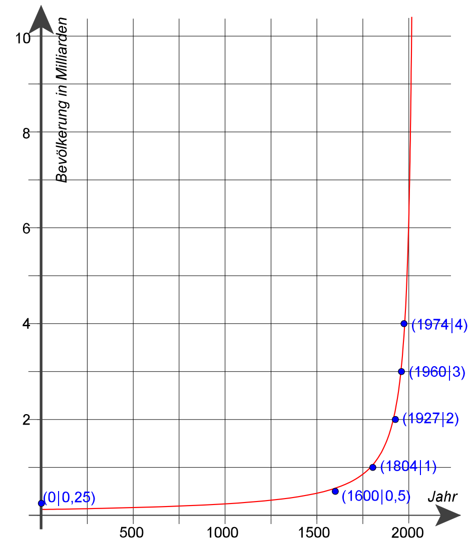
c) Modellkritik:
Das erste Modell „Zylinder“ ist nur eine grobe Beschreibung der realen Dose. In Wirklichkeit benötigt man mehr Material, um eine Dose herzustellen (siehe Abbildung):



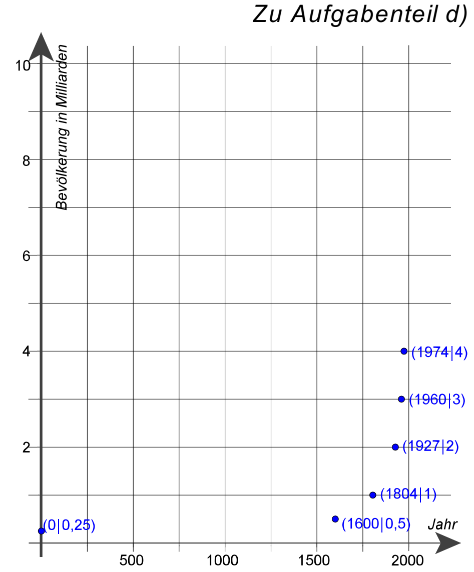
(1) Sowohl die beiden Deckel als auch die Mantelfläche sind mit Rillen versehen, um die Stabilität der Dose zu erhöhen.
(2) Die Deckel sind durch Umbördeln des Randes mit dem Rand der Mantelfläche vernietet und verlötet, wozu ein größerer Deckelradius benötigt wird.

Untersuchen Sie erneut, ob der Materialverbrauch bei Ihrer Dose minimiert ist.

Weitere Kritik: Das Blech für diverse Dose wird aus einem großen Blech gestanzt. Wie viel Abfall entsteht dort? Möglicherweise unterscheiden sich die Lösungen von a) und c) in diesem Punkt gar nicht.



Zu Aufgabenteil d)



Aufgabe 8

1974 wurde eine Prognose für das Anwachsen der Weltbevölkerung anhand folgender Daten abgegeben:

Jahr	„0“	1600	1804	1927	1960	1974
Bevölkerung in Milliarden	0,25	0,5	1	2	3	4

Die Prognose basierte auf der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{249}{2040 - x}$.

Der Funktionsgraph zeigt, dass f die Werte in der Tabelle recht gut wiedergibt:

a) Geben Sie damit eine Prognose ab, in welchem Jahr die Weltbevölkerung die 5 Milliarden erreicht und in welchem die 6 Milliarden.
Vergleichen Sie Ihre berechneten Werte mit den tatsächlichen Jahreszahlen und kommentieren Sie die Güte Ihrer Prognose.

b) Besorgen Sie sich aktuelle Prognosen für das Anwachsen der Weltbevölkerung, erstellen Sie mit Hilfe von f ebenfalls Prognosen für die dort genannten Jahre und vergleichen Sie.
Was stellen Sie fest?
Kommentieren Sie und versuchen Sie zu erklären.

c) Vor einigen Monaten haben Sie im Unterricht „exponentielles Wachstum“ betrachtet.
Versuchen Sie, sich an die charakteristische Eigenschaft dieses Wachstumsmodells zu erinnern.
Das 1974 verwendete Modell beschreibt „hyperbolisches Wachstum“. Was erscheint Ihnen an diesem Modell charakteristisch zu sein, auch in Abgrenzung gegen das exponentielle Modell?

d) Schlagen Sie selbst ein Modell vor, das 1974 eine recht gute Prognose ergeben hätte. Dabei ist es erlaubt, nicht alle Daten aus obiger Wertetabelle dem Modell zugrunde zu legen.

e) Erstellen Sie einen Graphen von f so, dass deutlich wird, dass es sich bei f um eine Hyperbel handelt.
Benennen Sie am Graphen Eigenschaften von Hyperbeln allgemein, aber auch speziell der Hyperbel f (z.B. Bedeutung der Konstanten im Zähler, Lage der Polstelle).

f) Experimentieren Sie mit dem Funktionsterm einer Hyperbel (Variable potenzieren, Konstante verändern). Versuchen Sie, Ihre Entdeckungen für andere verständlich darzustellen.
Siehe dazu auch das zugehörige Applet.

Aufgabe 9

a) In den letzten drei Aufgaben haben Sie Funktionsterme kennen gelernt, die aus einem Bruch bestanden, dessen Zähler und Nenner ein Polynom war. Funktionen, deren Term so beschrieben wird, heißen *gebrochenrationale Funktionen*.

gebrochenrationale Funktion: $x \longrightarrow \frac{\text{Polynom}(x)}{\text{Polynom}(x)}$

Versuchen Sie charakteristische Eigenschaften dieser Klasse von Funktionen zu finden.
Durch variieren des Zähler- und Nennerterms werden diese Eigenschaften bestätigt oder müssen revidiert oder gar verworfen werden.
Versuchen Sie nach Möglichkeit auch, die mit dem Graphen gefundenen Eigenschaften am Funktionsterm zu begründen.

GeoGebra

Beschränken Sie sich bei den Variationen im Zähler auf Polynome maximal 3. Grades und im Nenner auf Polynome höchstens 2. Grades.

b) Nicht immer ist es vorteilhaft, Polynome auszumultiplizieren, weil man dabei Informationen verlieren kann.

FORM DER TERME

- In Aufgabe 4 z.B. ergab sich in Aufgabenteil a2) ein Term der Form $(a-x) \cdot (b-x) \cdot (c-x)$.
  Welche Eigenschaft(en) der Funktion kann (können) aus dieser Form des Terms sofort abgelesen werden?

Produktform manchmal vorteilhaft

- Für eine Parabel ist die Form $a \cdot (x-b)^2 + c$ oft sinnvoll.
  Welche Eigenschaften lassen sich daraus unmittelbar ablesen?
- Finden Sie eigene Beispiele.

Aufgabe 10

In einem Monopolbetrieb ergibt sich die Abhängigkeit des Erlöses E und der Gesamtkosten K von den verkauften Mengeneinheiten (ME) nach folgender Tabelle *(Preis, Erlös und Kosten in Geldeinheiten GE)*:

ME x	Preis p (pro ME)	Erlös E	Gesamtkosten K
0	40	0	4.000
100	35	3.500	4.100
200	30	6.000	4.200
300	25	7.500	4.300
400	20	8.000	4.400
500			
600			
700			

a) Führen Sie die Tabelle weiter.

...vielleicht auch mit einer Gewinnspalte

b) Ermitteln Sie je eine Funktionsgleichung, welche
- die Gesamtkosten K,
- den Preis p und
- den Gewinn G

beschreibt *(unter der Annahme, dass sich Preis, Erlös und Kosten in Abhängigkeit von x kontinuierlich entwickeln)* und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Von Daten zu Funktionen

c) Wie groß müssen die Produktionszahlen sein, damit der Betrieb mit Gewinn arbeitet?
Für welche Anzahl von ME ist der Gewinn maximal und wie groß sind dann der Gewinn und der Preis?

Aufgabe 11

Man unterscheidet in der Wirtschaft

fixe Kosten,
z.B. Mietzahlungen
rein proportionale Kostenzunahme,
z.B. Materialkosten
unterproportionale (degressive) Kostenzunahme,
z.B. Fertigungslohn
überproportionale (progressive) Kostenzunahme,
z.B. Wartungskosten
durch Überbeanspruchung der Anlagen
oder Investitionskosten für neue Anlagen.

Für die Gesamtkosten eines Betriebes liegen folgende Kenntnisse vor:

Stückzahl in Mengeneinheiten	1	2	3	4	5	6	8	10
Kosten in Geldeinheiten	7,5	10,0	11,3	12,0	12,7	14,0	20,8	37,2

a) Übertragen Sie die obigen Werte in ein Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie eine Funktion K, welche die oben gegebene Wertetabelle erfüllt und daher als ein Modell für die Kostenfunktion gesehen werden kann, und erstellen Sie einen Graphen.
Kommentieren Sie die Qualität Ihrer Lösung.
Warum haben Kostenfunktionen oft einen vergleichbaren Verlauf?
In welchen Bereichen lohnt es sich, die Stückzahl zu erhöhen (*„Kostenzunahme unterproportional“*), in welchen Bereichen wird eine Erhöhung der Stückzahl unverhältnismäßig teuer (*„Kostenzunahme überproportional“*)?

c) Die Erlösfunktion sei gegeben durch $E(x) = -0{,}5x^2 + 7x$.

- Fügen Sie dem Graphen von K (aus b)) die Graphen von E und der Gewinnfunktion G hinzu.
- Welche Stückzahlen kann der Betrieb produzieren, um Gewinne zu machen?
- Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn maximal und welchen Preis erzielt das Unternehmen dann?

Denken Sie an die
BEGLEITENDE AUFGABE!

Sie sollten in Ihre Übersicht
die Klasse der rationalen Funktionen
eingebaut haben.

GeoGebra

Warum sind
eine Gerade (lineare Funktion),
eine Parabel (quadratische Funktion)
ganzrationale Funktionen?

Zusammenfassung

Sie haben bisher rationale Funktionen kennen gelernt (und wiederholt):

- gebrochenrationale Funktionen (auch rationale Funktionen)

  Der Funktionsterm ist ein Bruch, bei dem die Variable (auch) im Nenner vorkommt: $\dfrac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$

- ganzrationale Funktionen

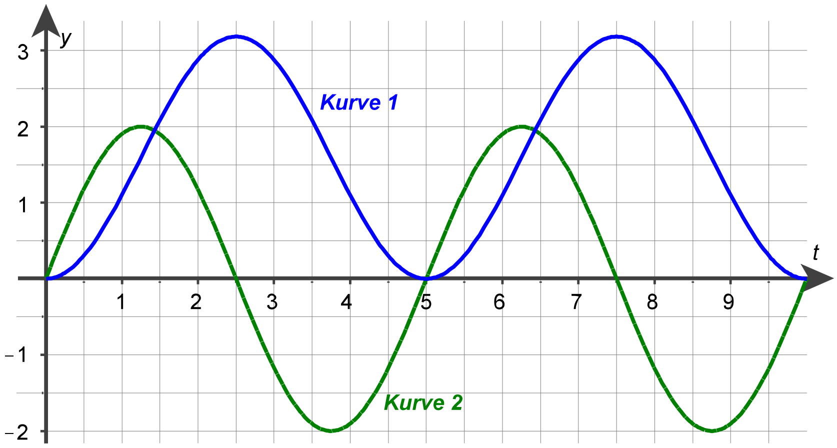
  Der Funktionsterm ist ein Polynom. Ein Polynom ist eine Summe aus „Konstante mal Potenz der Variablen“:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Aufgabe 12

Trigonometrische Funktionen

Das Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge und den zeitlichen Verlauf der Änderungsrate des Luftvolumens.



a) Welche der beiden Kurven beschreibt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge?
Begründen Sie Ihre Wahl im Sachkontext der Aufgabenstellung.

b) Die Terme zu den beiden Kurven lauten

$$f(t) = 2 \cdot \sin(0{,}4\pi \cdot t) \text{ und } g(t) = \frac{5}{\pi} \cdot (1 - \cos(0{,}4\pi \cdot t));$$

Eigenschaften der Sinus- und Cosinus-Funktion?

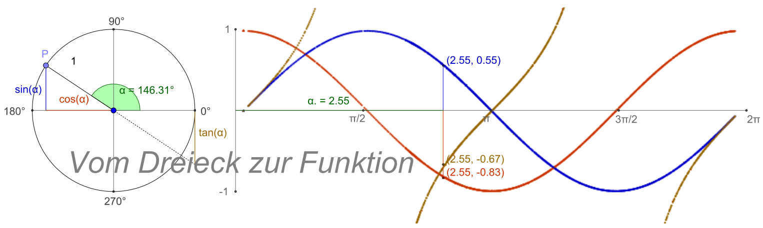
t ist die Zeit in Sekunden und der Funktionswert Liter bzw. Liter pro Sekunde.
Welcher Term gehört zu welcher Kurve? Begründen Sie Ihre Wahl.

c) Ermitteln Sie das maximale und das minimale Luftvolumen in der Lunge.
Bestimmen Sie Zeitpunkte, zu denen die Lunge jeweils die Hälft des maximalen Luftvolumens enthält.

d) Entgegen obiger Annahme bleibt immer Luft in der Lunge. Vereinfachend nehmen wir an, dass diese minimale Luftmenge in der Lunge konstant 0,8 Liter sei. Der Atemvorgang laufe ansonsten wie in Aufgabenteil a) ab.

Welche Änderungen ergeben sich in den Kurven 1 und 2? Wie wirken sich die Änderungen auf die beiden Funktionsterme aus?

Anpassen der Graphen



Aufgabe 13

a) Sammeln Sie Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

GeoGebra

b) Wie lautet die Definition der Tangens-Funktion?
Welche Eigenschaften kann man unmittelbar aus der Definition der Funktionsgleichung ablesen?

Der TANGENS ist schon ganz oft aufgetaucht, sogar bevor Sie ihn kannten...

c) Auf Ihrem Taschenrechner fehlt die Cotangens-Funktion. Das ist verschmerzbar, weil man sie leicht erzeugen kann. Wie?

Aufgabe 14

Beginnt eine Kerze in einem dunklen Raum zu leuchten, so empfindet man einen deutlichen Zuwachs an Helligkeit. Zündet man bei Sonnenschein auf der Terrasse eine Kerze an, so ist der Zuwachs an Helligkeit für unsere Sinne nicht wahrzunehmen. Der Zuwachs der Helligkeit durch die Kerze ist im Vergleich zur Helligkeit bei Sonnenlicht zu gering, als dass wir ihn wahrnehmen können, im Vergleich zur „Helligkeit" in einem dunklen Raum jedoch groß. Ob wir einen Unterschied wahrnehmen, hängt von der Größe der Reizänderung ΔR im Verhältnis zum vorliegenden Reiz R ab: Wichtig ist also für unsere Wahrnehmung die relative Reizzunahme $\frac{\Delta R}{R}$.

ERNST HEINRICH WEBER (1795 - 1878), Anatom und Physiologe

GUSTAV THEODOR FECHNER (1801 - 1887), Naturforsche und Psychologe

ERNST HEINRICH WEBER stellte in vielen Versuchen fest, dass diese konstant ist; für Helligkeit ist die Weber-Konstante z.B. 0,08. GUSTAV THEODOR FECHNER gelang es schließlich, die von Weber gefundenen Daten mathematisch zu beschreiben. Daher heißt diese Beschreibung heute das ***Weber-Fechnersche Gesetz****.*

Der kleinste noch wahrnehmbare Reiz sei R_0, der größte gerade noch erträgliche Reiz sein R_1. Die zugehörigen Empfindungen bezeichnen wir mit E_0 und E_1.
FECHNER konnte zeigen, dass die Funktion

$$E(R) = (E_1 - E_0) \cdot \frac{\lg \frac{R}{R_0}}{\lg \frac{R_1}{R_0}} + E_0$$

den Zusammenhang zwischen R *(Reiz)* und E *(Empfindung)* wiedergibt.

Dateien
- DERIVE-Datei V1neu-14A.dfw
- *Aufgabenteil b) kann mit der speziellen Funktion von a) auch an Beispielen gesehen werden.*

a) Das Gehör nimmt den Druck p der Schallwelle wahr, und zwar gilt E_0 = 0 dB, E_1 = 120 dB *(dB = Dezibel)* und $R_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa, R_1 = 20 Pa *(Pa = Pascal)*.

   Geben Sie hierfür den Term E(R) an und skizzieren Sie die Funktion in ein Koordinatensystem.

   Beschreiben Sie, wie sich im gesamten Definitionsbereich die Empfindung in Abhängigkeit zu den Reizen entwickelt.

b) Zeigen Sie mit der (allgemeinen) Funktion, dass die Reizsteigerung um einen **Faktor** k eine Empfindungssteigerung um einen bestimmten **Betrag** bringt.

Aufgabe 15

Das *Radioaktive Zerfallsgesetz* lautet: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.
Dabei ist

N_0 = Anzahl der Atome eines radioaktiven Elements zu Beginn der Beobachtungszeit (Zeit t=0).
$N(t)$ = Anzahl der nach der Zeit t noch nicht zerfallenen Atome dieses radioaktiven Elements.
λ = Zerfallskonstante

e ist die irrationale Zahl 2,718281..., die zu Ehren des Mathematikers Leonhard Euler (1707 - 1783) auch Eulersche Zahl genannt wird.

Warum ist diese Zahl so wichtig, dass man ihr einen eigenen Buchstaben hat zukommen lassen?

Die Zeit, nach der genau die Hälfte der ursprünglichen Atome zerfallen ist, heißt *Halbwertszeit*. Sie ist bei einzelnen Elementen verschieden.

Kohlenstoff besteht zu $3 \cdot 10^{-8}$ % aus einer radioaktiven Variante („Isotop“) des normalen Kohlenstoffs. Die Bezeichnung für dieses Isotop ist C-14. Es zerfällt mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren.
Sobald ein lebendiger Stoff (Baum, Knochen, organische Farben, ...) stirbt, hört die Zufuhr von Kohlenstoff aus der Atmosphäre und dem Boden auf. Der Gehalt an C-14 nimmt vom Tod an ständig durch Zerfall (in Stickstoff) nach dem Zerfallsgesetz ab. Hochempfindliche Geräte erlauben die Messung auch geringster Mengen von C-14, indem man die Zerfallsakte pro Minute zählt.
Es darf vorausgesetzt werden, dass der C-14-Gehalt im Kohlenstoff heute prozentual genauso groß ist wie vor einigen zehntausend Jahren. Er entsteht durch Höhenstrahlung. Die „Radiokarbon-Methode“ erlaubt Alterbestimmungen bis zu 50.000 Jahren.

Material: V1-Zeitung.pdf

a) Bestimmen Sie aus der Kenntnis der Halbwertszeit die Zerfallskonstante λ (im Exponenten des Zerfallsgesetzes).

b) *Hamburg hat seinen ältesten Bewohner verloren: Der „Neandertaler von Hahnöfersand“ ist nicht, wie 1980 datiert, 36.000 Jahre alt. Er lebte vor „nur“ 7470 Jahren* meldete am 17. August 2004 das Hamburger Abendblatt.

   Berechnen Sie, welcher C-14-Gehalt für ein Alter von 36.000 Jahren gemessen werden muss, welcher für ein Alter von 7.470 Jahren.

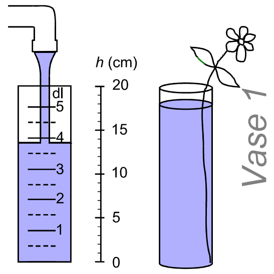
Aufgabe 16

Sammeln Sie Eigenschaften von Exponential- und Logarithmus-Funktionen.

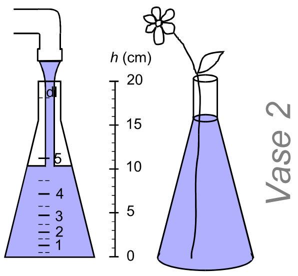
GeoGebra

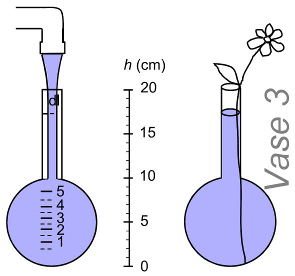
Aufgabe 17

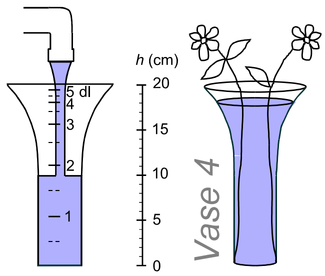
Die folgenden Fragen betreffen fünf verschiedene Glasvasen, die jeweils 20 cm hoch sind und maximal 5,6 dl (= 560 ml) Wasser fassen können.



a) Eine zylinderförmige Vase wird mit Wasser gefüllt, wie in der Abbildung (Vase 1) gezeigt. Die Höhe h (in cm) des Wassers, vom Boden der Vase aus gemessen, ist eine Funktion des Volumens x (in dl) des Wassers, das in die Vase geflossen ist.
Zeichen Sie einen Graphen zu diesem Füllungsvorgang. Überlegen Sie, wie sich die Höhe des Wassers bei einer Zunahme des Volumens ändert.

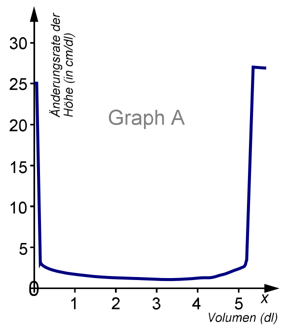


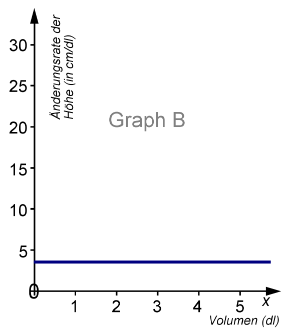


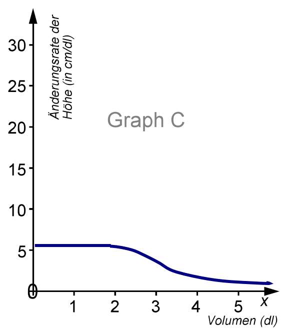


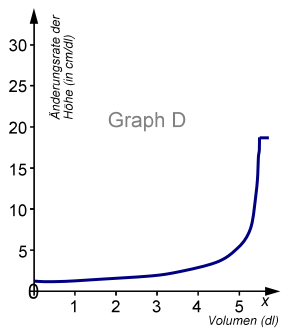
b) Obige Abbildungen zeigen, wie in drei weitere Vasen Wasser eingefüllt wird.
Wieder ist die Höhe h (in cm) des Wassers, vom Boden der Vase aus gemessen, eine Funktion des Volumens x (in dl) des Wassers, das in die Vase geflossen ist.
Die Graphen A, B, C und D zeigen jeweils die (lokale) Änderungsrate der Höhe in Abhängigkeit vom Volumen. Sie gehören jeweils zu einer der Vasen 1, 2, 3 und 4.

Geben Sie an, welcher Graph zu welcher Vase gehört, und begründen Sie ihre Wahl.

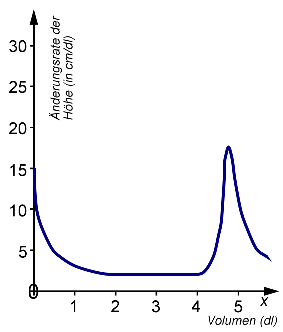








c) Skizzieren Sie in die Graphen der Änderungsraten jeweils den zugehörigen Füllgraphen. Auf der y-Achse wird dann die Höhe des Wassers in cm abgetragen.



d) Wie könnte die Vase zu nebenstehendem Graphen (der Änderungsraten) aussehen?

Zeichnen Sie eine Skizze der Vase und begründen Sie die Form der Vase.

Informationen

Informationen zu Aufgabe 6, aktueller Einkommensteuertarif:
http://bundesrecht.juris.de/bundesrecht/estg/__32a.html

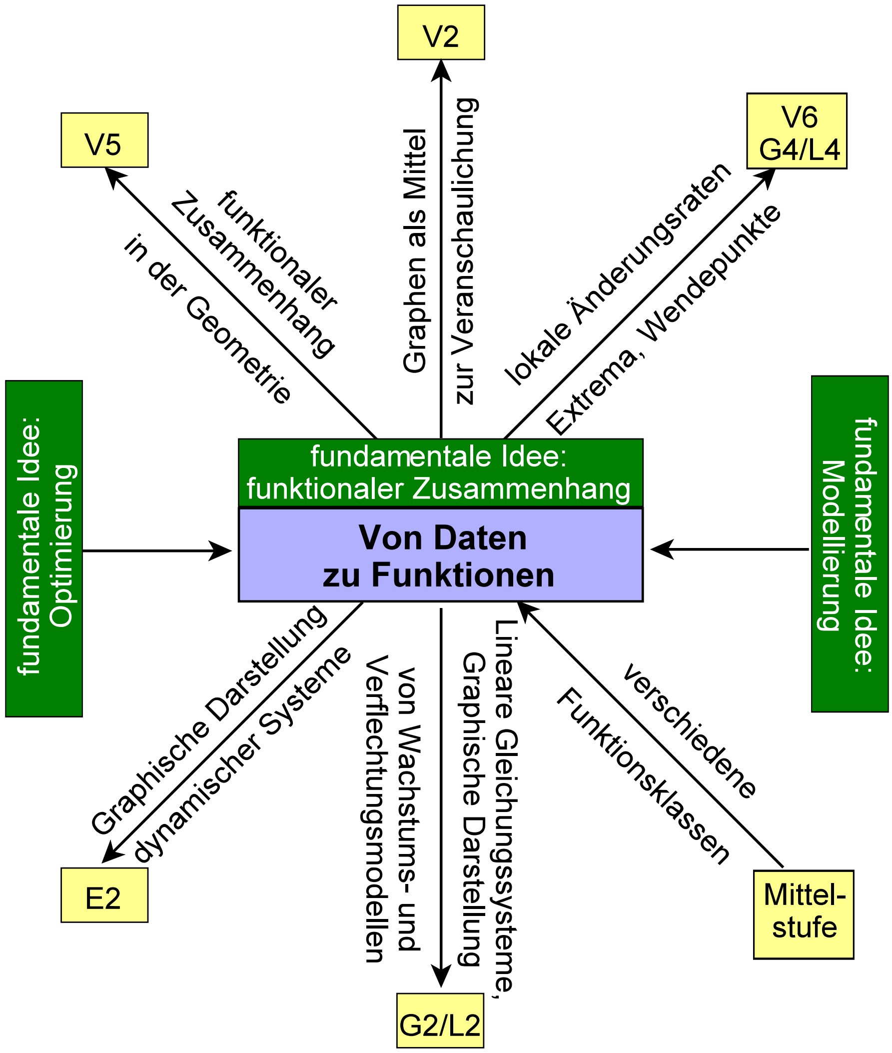
Informationen für Aufgabe 8 zur Weltbevölkerung z.B. bei http://www.weltbevoelkerung.de
Weltbevölkerungsuhr dort über *Info-Service*

Ideen für Aufgaben stammen aus

- 2) Peter Bützer · „Alkohol“ Ethanol · http://www.sysdyn.ch/ETHANOL.pdf
- 4) Ross Brodie / Stephen Swift · QMaths 11b · Moreton Bay Publishing · Melbourne 1999
- 5) Quelle der Grafik und inhaltliche Informationen über die „Phänologie“ auf den Internetseiten des Deutschen Wetterdienstes:
  http://www.dwd.de/de/FundE/Klima/KLIS/daten/nkdz/fachdatenbank/datenkollektive/phaenologie/index.htm
- 7) Hans-Wolfgang Henn · Realitätsnaher Mathematikunterricht mit DERIVE · Dümmler, Bonn 1997, S. 29ff *(leider vergriffen)*
- 12) EPA Mathematik
- 14) Werner Schmidt · Mathematikaufgaben 7–10 · Klett · Stuttgart 1989 *(leider vergriffen)*
- 17) National Test in Mathematics Course C, Spring 2002 · Schweden, Aufgabe 15
  http://www.umu.se/edmeas/np/np-prov/C-eng-vt02.pdf

Die Clipart-Bilder sind aus WordPerfect® Office

Verbindungen zu anderen Themenbereichen



Rückschau

V1 · Von Daten zu Funktionen

Überblick-Grafik

Versuchen Sie, einen Überblick über die Inhalte dieses Themenbereichs zu gewinnen. Überlegen Sie dabei auch, was Ihnen wichtig erschien.

Stellen Sie das nach Ihrer Meinung Zentrale in nebenstehendem Kasten dar und verwenden Sie dazu graphische Elemente (z.B. Mind Map, Concept Map, eine Grafik, ...).
Wichtig ist, dass Sie diese Übersicht selbst gestalten und nicht irgendwo kopieren.

Überblick-Text

Wenn Sie möchten, können Sie hier maximal drei Punkte nennen, die Ihre obige Darstellung ergänzen oder erläutern.

Vernetzungen

Welche Verbindungen zu früheren Themenbereichen sehen Sie?
Sind Ihnen Inhalte und/oder Methoden aus diesem Themenbereich schon außerhalb des Mathematikunterrichts begegnet und wenn ja, wo?

Im Rückblick sollten Sie sich auch fragen, ob Sie die am Anfang des Heftes stehenden Kompetenzen erworben haben. Schätzen Sie sich selbst ein und kreuzen Sie in der Tabelle jeweils die am ehesten zutreffende Antwort an:

Kompetenzen	ja	ein wenig	eher nicht	nein
Sie erkennen, dass es verschiedene Arten von Daten gibt und unterscheiden, • ob es empirische oder aus einem funktionalen Zusammenhang gewonnene Daten sind • ob es deterministische oder zufällige Daten sind • ob es diskrete oder kontinuierliche Daten sind				
Sie stellen Daten in einer Tabelle, durch einen Graphen oder eine Gleichung dar				
Sie wissen, dass eine Gleichung für eine Funktion eine oft angestrebte – aber nicht immer mögliche – Form der Darstellung ist, da sich dann auch die Funktion ohne Probleme durch eine Tabelle oder einen Graphen darstellen lässt				
Sie sehen Funktionen als ein Hilfsmittel, um realitätsbezogene Prozesse zu beschreiben, zu analysieren und zu lösen				
Sie kennen die Funktionsklassen der ganzrationalen, der gebrochen rationalen, der trigonometrischen und der Exponentialfunktionen und ihre jeweilige gemeinsame Charakterisierung				
Sie bestimmen Nullstellen einfacher Funktionen und können mindestens ein einfaches numerisches Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen anwenden				
Sie wissen, dass es inner- und außermathematische Fragestellungen gibt, für die nicht nur Funktionswerte sondern auch deren Änderung eine Bedeutung haben, und lösen so elementare Optimierungsprobleme näherungsweise graphisch				
Sie stellen in einfachen Fällen Gleichungen von Funktionen auf, auch mit Hilfe von Gleichungssystemen, und lösen diese				
Sie erfahren die Möglichkeiten des Computers bzw. eines entsprechenden Taschenrechners beim Aufstellen von Funktionsgleichungen, bei der Analyse von Funktionen und beim Lösen von Gleichungssystemen				

Haben Sie Kompetenzen nicht erworben oder nicht so, wie Sie es sich erhofft hatten, notieren Sie sich, woran es gelegen haben könnte. Überlegen Sie zugleich, ob Sie in Ihrem eigenen Verantwortungsbereich Möglichkeiten sehen, den Erwerb von Kompetenzen zu verbessern.

✎

Aufgaben-Lösungen (Kurzfassung)
Die angegebenen Lösungen müssen nicht die einzig möglichen sein!

Aufgabe 2

a) Eine höhere Abbaugeschwindigkeit führt zu schnellerem Abbau (in kürzerer Zeit).

b) $f_1(x) = -0{,}29x + 0{,}8$ $f_2(x) = -0{,}15x + 0{,}8$
$f_3(x) = -0{,}1x + 0{,}8$

c) Steigung verschieden

Aufgabe 3

a) $f(x) = 500\,x^2$ *aus Ansatz* $f(x) = a\cdot x^2$ *und z.B.* $80 = f(0{,}4)$

c) Geschwindigkeit nimmt mit der Zeit t zu: Die 10cm-Wegstücke werden in immer kürzeren Zeiten durchquert.

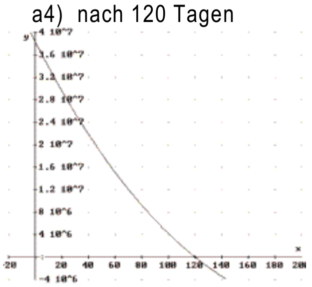
d) Die Höhe der Fensterbank über Grund sei 12 m, dann ist v etwa $\sqrt{240}$ m/s ≈ 15,5 m/s, das sind über 50 km/h.

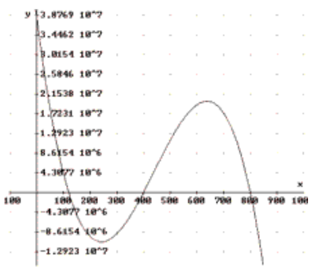
Aufgabe 4

a1) 33.891.000 m^3

a2) $V(x) = (800 - x)\cdot(400 - x)\cdot(120 - x)$
$= -x^3 + 1.320\cdot x^2 - 464.000\cdot x + 38.400.000$

a4) nach 120 Tagen





Aufgabe 5

Es handelt sich um diskrete Daten, die durch Beobachtungen gewonnen wurden und für die kein Funktionsterm existiert (Beginn der Blüte). Die Datenpunkte sind offenbar zur besseren Beurteilung der Graphik mit Streckenzügen verbunden. Die übrigen Graphen folgen aus ersterem.
Der Mittelwert des Blütenbeginns ist eine Konstante, die als Parallele zur x-Achse eingezeichnet ist und daher einen Term hat.

Aufgabe 6 *Term zur Steuerfunktion siehe DERIVE-Datei*

Aufgabe 7

a) Ansatz: Oberfläche (r,h) = $2\pi r^2 + 2\pi r\cdot h$
Bekannt: Volumen = 850 = $\pi r^2\cdot h$
$h = \frac{850}{\pi r^2} \Rightarrow$ Oberfläche = $O(r) = 2\pi r^2 + \frac{1700}{r}$.
Darstellung als rationale Funktion: $O(r) = \frac{2\pi r^3 + 1700}{r}$
Die Skizze lässt ein Minimum bei etwa r = 5 vermuten:
Es ist O(5) = 497,0796326, O(5,1) = 496,7589831, O(5,2) = 496,8204076.
⇒ Minimum bei einem Radius von etwa 5,1 cm und einer Höhe von etwa 10,4 cm ist die Oberfläche minimal mit 496,76 cm^2 ≈ 500 cm^2.
In wie weit diese Werte der vorliegenden Dose entsprechen, muss geprüft werden.

b) Geht x gegen 0 bei x > 0, wird der Kehrbruch von x entsprechend sehr groß, also $f_2(x)$. x^2 ist dagegen noch kleiner als x.
Wird x sehr groß, wird x^2 noch deutlich größer, also $f_1(x)$. Dagegen liegt $f_2(x)$ nahe bei der Null.

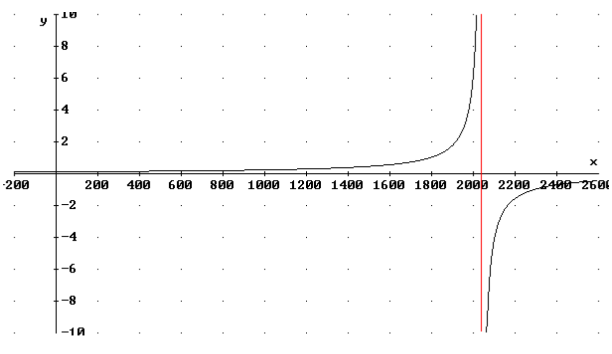
c) Annahmen für die folgende Beispielrechnung
Glattklopfen: Deckelradius unverändert, Höhe des Mantels vergrößert sich um 2 mm.
Aufdröseln Deckelbefestigung:
Deckelradius vergrößert sich um 7 mm, Mantelfläche bleibt.
$O_2(r) = 2\cdot\pi\cdot(r+0{,}7)^2 + 2\cdot\pi\cdot r\cdot\left(\frac{850}{\pi r^2} + 0{,}2\right)$
Es scheint laut Skizze ein Minimum etwa bei r ≤ 5 vorzuliegen. Eingrenzung: $O_2(4{,}8) = 550{,}2648801$, $O_2(4{,}9) = 550{,}1369883$, $O_2(5{,}0) = 550{,}4238759$
⇒ Minimum etwa bei einem Radius von 4,9 cm und einer Höhe von 11,3 cm bei einem Materialverbrauch von etwa 550,14 cm^2.
Darstellung als rationale Funktion:
$O_2(r) = \frac{100\pi r^3 + 160\pi r^2 + 49\pi r + 85.000}{50r}$
Vergleich mit realer 850 ml Dose.

Aufgabe 8

a) Modell: 1990 5 Milliarden Menschen, wurden schon im Jahr 1987 erreicht. Die 6 Milliarden-Marke ist nach dem Modell 1998 erreicht, in Wirklichkeit wurde sie 1999 überschritten.
Das Modell basiert auf einer sehr kleinen Datenmenge. Im Vergleich dazu scheinen die Werte akzeptabel zu sein.

b) Geschätzt wird derzeit, dass 2012 7 Milliarden Menschen auf der Erde leben werden und 2028 8 Milliarden.
Modell liefert für 2012 etwa 8,9 Milliarden und für 2028 sogar fast 21 Milliarden.
Schon die Werte zu a) lassen ein schnelleres Wachstum im Modell erwarten als die aktuellen Werte und Schätzungen angeben.

d) Einen Teilbereich kann man z.B. linear modellieren.



Aufgabe 9

b) $f(x) = (a-x)(b-x)(c-x) \Rightarrow x_{N1} = a$, $x_{N2} = b$ und $x_{N3} = c$ sind die einzigen Nullstellen von f.
$g(x) = a(x\text{-}b)^2+c$ heißt auch *Scheitelpunktsform*, dessen Koordinaten S(b|c) lauten.

Aufgabe 10

a)

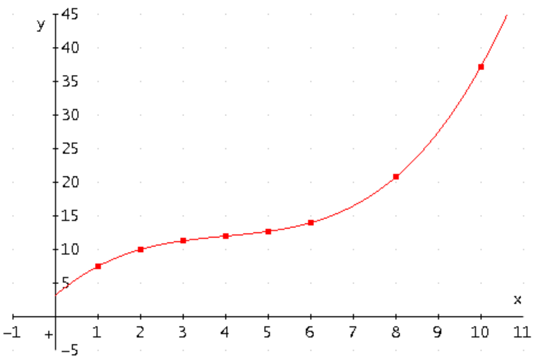
ME x	Preis p (x)	Erlös E(x)	Kosten K(x)
0	40	0	4.000
100	35	3.500	4.100
200	30	6.000	4.200
300	25	7.500	4.300
400	20	8.000	4.400
500	*15*	*7.500*	*4.500*
600	*10*	*6.000*	*4.600*
700	*5*	*3.500*	*4.700*

b) Es ist wegen des Sachkontexts der Aufgabe $x \geq 0$.
Aus der Tabelle ergibt sich, dass es Festkosten in Höhe von 4.000 GE gibt und pro Stück 1 GE hinzu kommt, also $K(x) = 4000 + x$
Die Rate des Absenkens beim Preis *(negative Steigung!)*, beträgt 5%. Addition einer Konstanten, damit der Anfangspreis stimmt: $p(x) = -0{,}05\,x + 40$
$E(x) = -0{,}05\,x^2 + 40\,x$,(Erlös = Preis ·verkaufte Stück)
$G(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 39\,x - 4000$, (Gewinn = Erlös − Kosten)

c) Gewinnzone beginnt ab 1. Nullstelle von G (121,49), also ab 122 Stück.
Maximaler Gewinn im Scheitelpunkt von G bei 390 Stück und 3605 GE, Stückpreis 20,5 GE.

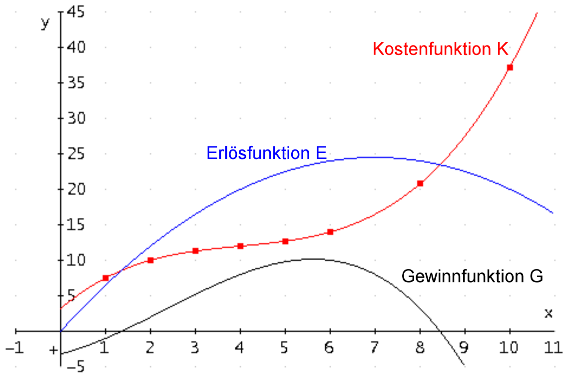
Aufgabe 11

b) Ansatz geschlossener Term:
8 Punkte vorgegeben ⇒ Polynom höchstens 7. Grades *(Lösung mit CAS, Ansatz kann aber in jedem Fall erstellt werden)*. Die Lösung ist hier ein Polynom 3. Grades
$K(x) = 0{,}1\,x^3 - 1{,}2\,x^2 + 5{,}4\,x + 3{,}2$, da die Koeffizienten für die restlichen x-Potenzen verschwinden.
Mit einer solchen Funktion lassen sich Kosten zwischen den angegebenen Punkten und auch bedingt außerhalb des Bereiches der Tabelle modellieren, bedingt, weil der Funktionsterm auf den gegebenen Punkten basiert und für den Bereich außerhalb keine Informationen vorliegen. Aber auch Funktionswerte zwischen gegebenen x-Koordinaten bleiben Modelle bzw. Prognosen.



Wegen der normalerweise vorhandenen Fixkosten liegt der Schnittpunkt mit der y-Achse oberhalb der x-Achse ($K(0) > 0$).
Der Graph steigt zunächst an, weil die Kosten bei einer Steigerung der Stückzahl noch wachsen, bis eine gute Auslastung der Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter sowie der Maschinen des Unternehmens erreicht ist. Das bedeutet für den Graphen, dass die Steigung zunehmend geringer wird (*unterproportionale Kostenzunahme*). Es lohnt sich also in diesem Bereich, die Fertigungszahlen zu erhöhen, weil die damit verbundene Steigerung der Kosten abnimmt. Im folgenden Bereich steigen die Kosten scheinbar proportional, bis eine Steigerung der Stückzahl an die Grenzen der vorhandenen Ressourcen führt und irgendwann nicht mehr möglich ist. Das bedeutet entweder starke Kostensteigerung *(überproportional)* z.B. wegen Investitionen oder aber auch das Ende des Definitionsbereichs der Kostenfunktion.

c)



Gesucht sind zur Beantwortung der Frage die Schnittpunkte der Erlösfunktion E mit der Kostenfunktion K bzw. die Nullstellen der Gewinnfunktion E − K. Die Ermittlung erfolgt näherungsweise, auch mit Hilfe der Graphen.
Es ergeben sich etwa die Lösungen
$x_1 = 1{,}355$ und $x_2 = 8{,}455$.
Bei einer Produktion von 1,355 bis zu 8,455 ME, ist der Betrieb in der Gewinnzone.
Maximaler Gewinn wird näherungsweise bei einer Produktion von 5,6 ME erzielt. Die Höhe des Gewinns liegt etwa bei 10,2 GE *(nicht gefragt)*.
Der erzielte Preis beträgt 4,2 GE pro Mengeneinheit:
$p(x) = -0{,}5x + 7$ (hergeleitet aus Erlösfunktion E) und damit $p(5{,}6) = 4{,}2$.

Aufgabe 12

a) Das Luftvolumen in der Lunge kann nicht negativ sein. Daher kommt nur Kurve 1 in Frage.

b) f(t) kann negativ werden, g(t) nicht, daher gehört g(t) zur Kurve 1, f(t) also zur Kurve 2.

c) *Das maximale Luftvolumen kann mit Hilfe des Graphen ermittelt werden, es ergibt sich aber auch einfach aus Symmetriegründen.*
Für $t_0 = 2{,}5$; $t_1 = 5 + 2{,}5$; $t_i = 5 \cdot i + 2{,}5$ ist das Luftvolumen im Modell der Aufgabe maximal, nämlich $10/\pi$ Liter, also etwa 3,18 Liter.
Das minimale Luftvolumen ist 0 (die Lunge ist völlig leer) und das tritt ein für $t \in \{0, 5, 10, ...\}$.
Die Hälfte des maximalen Luftvolumens wird ebenfalls aus Symmetriegründen erreicht für $t \in \{1{,}25; 3{,}75; 6{,}25; 8{,}75; ...\}$

d) Da das minimale Luftvolumen auf 0,8 Liter festgelegt ist, wird Kurve 1um 0,8 Einheiten nach oben geschoben. Da das maximale Luftvolumen bleibt, wird sie gestaucht. Die Periodenlänge bleibt. Damit wird auch Kurve 2 gestaucht.

„Stauchungsfaktor“ Kurve 1: $\frac{25-2\pi}{25}$. Das ergibt den

Term für Kurve 1: $\left(\frac{5}{\pi}-\frac{2}{5}\right)\cdot(1-\cos(0{,}4\pi\cdot t))+0{,}8$.

Kurve 2 wird mit demselben Faktor gestaucht. Warum?

Aufgabe 13

b) tan x = sin x/cos x   c) cot x = 1/tan x

Aufgabe 14

a) $E(R) = 20 \cdot \lg(5 \cdot 10^4 \cdot R)$

Definitionsbereich: $[2 \cdot 10^{-5}; 20]$

Zunächst nimmt die Empfindung bei sehr kleinen Reizänderungen stark zu. Die Kurve flacht aber schnell ab, sodass eine Zunahme der Empfindung immer größerer Reizänderungen bedarf.

b) $E(k \cdot R) = E(R) + C$?

Es gilt $\lg(k \cdot R) = \lg k + \lg R = \lg R + \text{Konstante}$. Eingesetzt in die obige Formel ergibt sich die Behauptung:

Zur Vereinfachung heiße die Konstante $\frac{(E_1-E_0)}{\lg\frac{R_1}{R_0}} = a$.

$$\begin{aligned}\text{So ist } E(k \cdot R) &= a \cdot (\lg(k \cdot R) - \lg R_0) + E_0 = \\ &= a \cdot (\lg k + \lg R - \lg R_0) + E_0 = \\ &= a \cdot \lg k + a \cdot (\lg R - \lg R_0) + E_0 = \\ &= \text{Konstante} + E(R).\end{aligned}$$

Aufgabe 15

a) $\frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot 5730} \Leftrightarrow -\lambda \cdot 5730 = \ln 0{,}5$

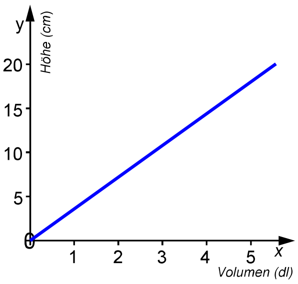
$\Rightarrow \lambda = 0{,}00012096.. \approx 0{,}000121\ \text{Jahr}^{-1}$

b) $N(36.000) = 3 \cdot 10^{-10} \cdot e^{-0{,}000121 \cdot 36.000} \approx 3{,}85 \cdot 10^{-10}\ \%$.

$N(7470) \approx 1{,}215 \cdot 10^{-8}\ \%$.

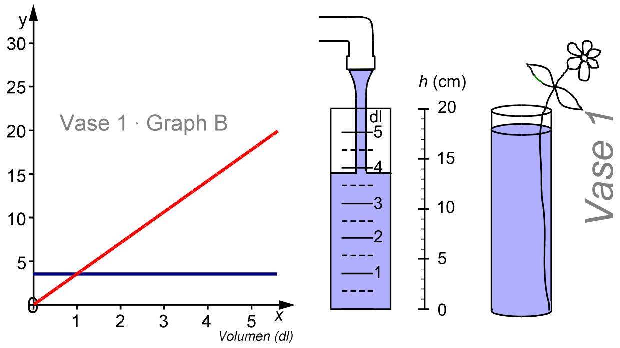
Aufgabe 17

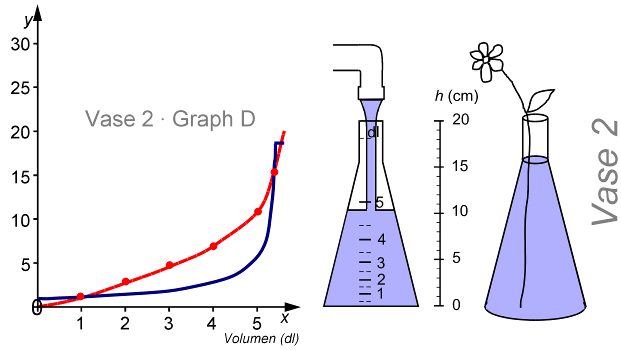
a) Füllungsgraph (linear wegen der „Gleichmäßigkeit“ des Gefäßes). Änderung ist konstant 3,6 cm pro dl (berechnet aus 20/5,6)

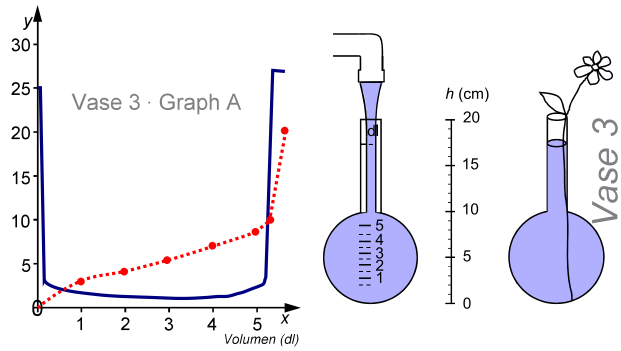


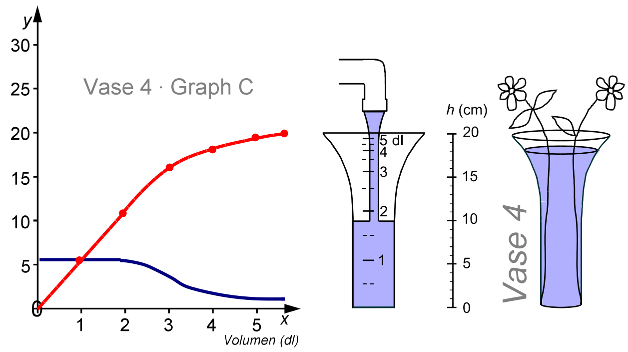
b) 1|B, 2|D, 3|A, 4|C

c) Die Füllgraphen sind durch Ablesen an den Vasenbildern entstanden









d) Die Vase könnte etwa so aussehen, da sich die Zunahme der Höhe beim gleichmäßigen Einfüllen deutlich verlangsamt, weil mit wachsender Höhe der Durchmesser wächst. Dieser bleibt dann etwa konstant, verjüngt sich oben schnell, um im Ausguss der Vase wieder zuzunehmen.