V1 · Von Daten zu Funktionen

Übersicht

Inhalte

Aufgabe	Funktionstypen	Kommentare
	Klammer: abschließende Aufgabe	*Alle Aufgaben werden durch die abschließende Aufgabe verbunden, die möglichst die gesamte Kursarbeit begleiten sollte, auch wenn sie erst am Schluss des Themenbereichs fertig gestellt sein kann.*
1	lineare, quadratische Funktion (Wdh.)	Lineare Funktionen bieten sich oft als Näherung an. Frage, worauf ein Funktionsterm basiert, kann diskutiert werden.
2	lineare, quadratische, rationale Funktion (einfach), zusammengesetzte Funktionen	Einkommensteuergesetz: Funktion, die aus Bauteilen zusammengesetzt ist; Übergangsstellen sind interessant bei der Frage nach Steuergerechtigkeit (präformal stetig), ebenso die näherungsweise Grenzsteuer (Ableitungs-Aspekt). Dazu kann das Horner-Schema eingeführt werden, da es im Gesetzestext auftaucht.
3	Polynom 3. Grades, Polynome allgemein	Polynom 3. Grades als Modell zur Abnahme des Volumens einer Eisscholle als Grundlage zu Überlegungen von charakteristischen Eigenschaften von Polynomen.
4	Quadratwurzel (Wdh.), n-te Wurzel	Die Quadratwurzel wird in der Grundvorstellung „Quadrieren rückgängig machen“ am Beispiel der Varianz / Standardabweichung wiederholt.
5	Hyperbel (Wdh.), Exponentialfunktion (Wdh.)	Wachstumsmodell, Abgrenzung Hyperbel – Exponentialfunktion, Überlegungen zum konkreten Modell
6	rationale Funktion (einfach)	Extremwertaufgabe mit graphischer Lösung (Ablesen des Extremwertes am Graphen): Aspekt der Ableitung: Minimum.
7	rationale Funktion (einfach)	Allgemeine Überlegungen zu dieser Klasse von Funktionen über Experimente.
8	Logarithmus (Wdh.)	Weber-Fechnersches Gesetz. Interpretation der „Steigung“ (lokale Änderung) der Kurve im Sachkontext. Kann in V4 (Iteration) wieder aufgegriffen werden.
9	Sinus, Cosinus (Wdh.)	Hinführung auf die Ableitung (Ablesen von Minimum und Maximum am Graphen, ebenso lokale Änderungsraten)
10	lineare, quadratische Funktion	Funktionsgleichungen werden aus gegebenen Daten hergeleitet bzw. berechnet. Bestimmen von Nullstelle und Maximum (z.B. näherungsweise am Graphen).
11	Polynome, zusammengesetzte Funktion	Funktionsgleichungen werden aus gegebenen Daten hergeleitet bzw. berechnet (mithilfe CAS).
12	*kein Funktionsterm*	Graphen aus (diskreten) Daten hergestellt
13	*keine Funktionsterme*	Graphen von Funktionen deuten: Graphen von Änderungsraten
	abschließende Aufgabe	Übersicht mit Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten der verschiedenen Funktionsklassen, die von den Lernenden selbst erarbeitet werden sollte.

Dieser Themenbereich dient der systematischen Zusammenfassung von Funktionsklassen: Die bereits in der Mittelstufe behandelten Funktionen werden wiederholt, ganz rationale und einfache gebrochen rationale Funktionen werden eingeführt. Die Wiederholung geschieht über realitätsnahe Problemstellungen, z.T. auch die Einführung der neuen Funktionen.
Dabei wird in mehreren Aufgaben reflektiert, in wie weit die jeweilige Funktion als Modell für das behandelte Problem geeignet erscheint, in zwei Aufgaben wird der Funktionsterm aus gegebenen Daten entwickelt.
In vielen Aufgaben spielt auch die Änderungsrate eine Rolle, sodass verschiedene Aspekte des Ableitungsbegriffes im jeweiligen Aufgabenkontext angesprochen werden.
Die vorstehende Tabelle gibt einen Überblick über die Aufgaben dieser Handreichung und ihre Inhalte.

Methodische und didaktische Hinweise

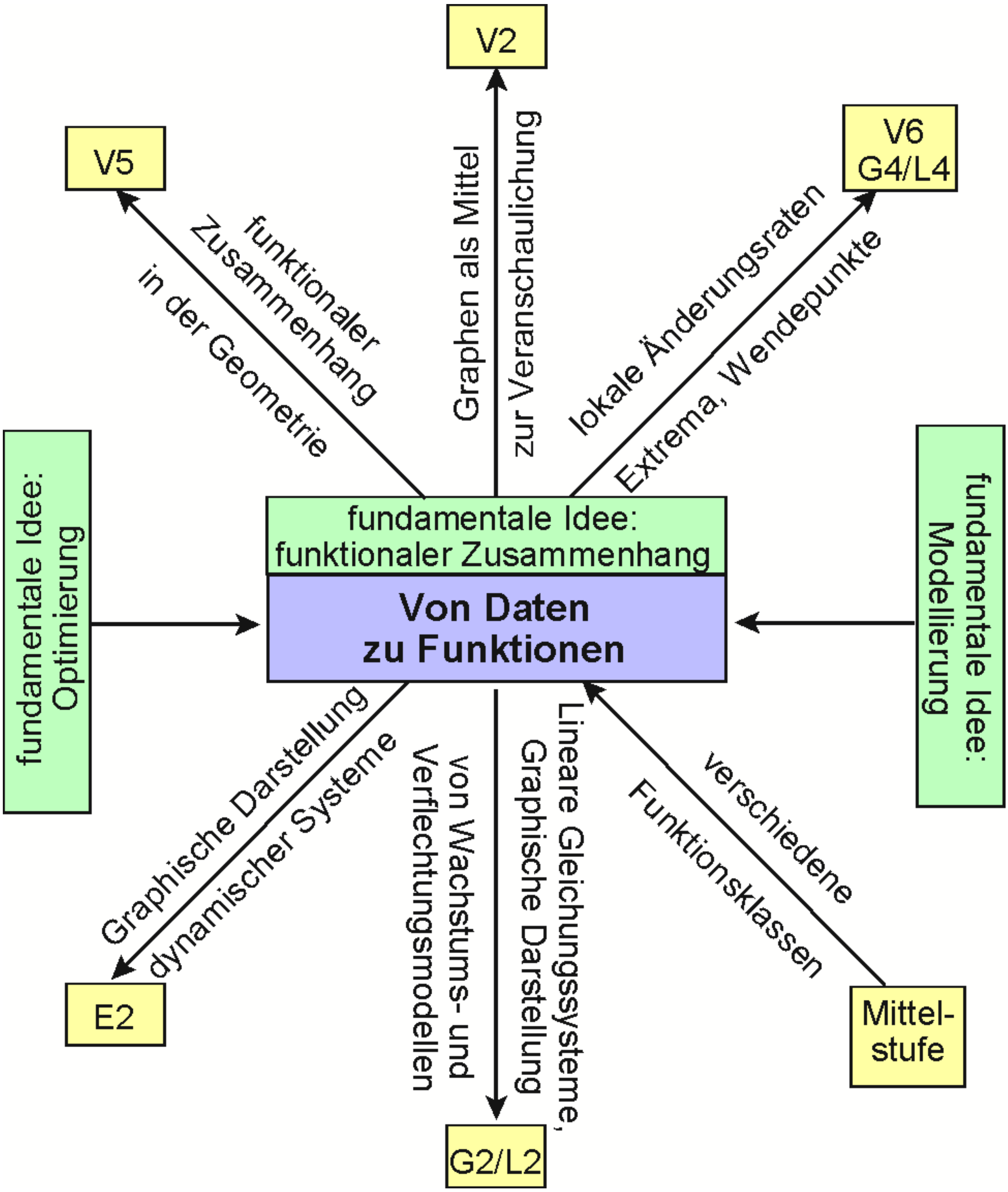
Obwohl zu den Aufgaben CAS-Dateien bzw. Dateien einer Tabellenkalkulation vorliegen, lassen sich einige Aufgaben auch ohne Computerhilfe lösen. Bei etlichen Aufgaben reicht auch ein Funktionsplotter aus. Es gibt zu allen Funktionsklassen reichlich Material, mit dem Schülerinnen und Schüler selbstständig üben können, z.B. bei Mathe-Online (siehe [5]): Im linken Beispiel etwa müssen den Graphen die richtigen Terme zugeordnet werden, was für verschiedene Funktionsklassen angeboten wird.

Es gibt dort diverse weitere Aufgaben und Informationen zum Thema Funktionen.

In den vorgeschlagenen Aufgaben ist in der Regel eine Funktion als Modell bereits gegeben, da ja bestimmte Funktionsklassen wiederholt bzw. eingeführt werden sollen. Bei vielen Aufgaben bietet es sich jedoch an, die gewählte Modellfunktion zu reflektieren. Bei manchen Aufgaben wird dabei z.B. deutlich, dass für einen Bereich der Definitionsmenge eine lineare Funktion eine gute Näherung ergäbe: Linearisierung ist auch ein Aspekt der Differentialrechnung. Viele weitere Aspekte der Ableitung werden in den Aufgaben angesprochen, verknüpft mit dem jeweiligen Sachkontext.
Die bewusst offenen Fragestellungen bei vielen Aufgaben sollen den Lernenden die Möglichkeit bieten, eigene Wege zu gehen. Dabei kann Gruppenarbeit hilfreich sein. Die Lösungsvorschläge zeigen oft nur einen möglichen Weg auf, manchmal gibt es auch weitere Lösungen.
Die „abschließende Aufgabe“ soll die vielen erarbeiteten Einzelaspekte in eine Gesamtübersicht einordnen. Die Aufgabe kann erst am Ende des Themenbereiches fertig gestellt sein, dennoch sollte der Gedanke des Ordnens der Einzelaspekte von Anfang an bei jeder Aufgabe schon im Bewusstsein der Lernenden sein. Daher liegt es nahe, diese Aufgabe zu Anfang des Themenbereiches als

Portfolio-Auftrag zu stellen, der am Ende des Themenbereiches abgearbeitet sein muss. Die vielen Zwischenüberlegungen, die sich im Laufe der Arbeit ergeben, sind Bestandteil des Portfolios. Sie zeigen den Lernenden Mathematik auch als Prozess, an dessen Ende ein hoffentlich brauchbares Produkt steht, brauchbar zunächst nur für den jeweiligen Lernenden.

Vernetzungen



Vorschläge für den Unterricht

Aufgabe 1

Amts-Mathematik

Bei Gruppentierhaltung muß für jedes Kalb in Abhängigkeit von der Widerristhöhe in Zentimetern eine frei verfügbare Mindestfläche in Quadratmetern gemäß nachstehender Formel vorhanden sein: (Mathematische Exponentenschreibweise) Mindestfläche cm (hoch) 2 gleich 0,40 x (hoch) 2 plus 70 x plus 2720“. (Aus dem neuen Entwurf des Bundes für eine Kälberhaltungsverordnung.) Den Landwirten diesen Entwurf zu verdolmetschen und amtlichen Beistand in Rechenhilfe zu leisten, hat der hessische CDU-Abgeordnete Dieter Weirich (Hanau) in Wiesbaden empfohlen. Man müsse sich fragen, meinte Weirich, ob die Bauern angesichts eines „solchen Mists aus den Amtsstuben“ überhaupt noch dazu kämen, ihren Stall auszumisten.

Braunschweiger Zeitung vom 26. Juni 1979

a) Geben Sie den Landwirten die geforderte Rechenhilfe.

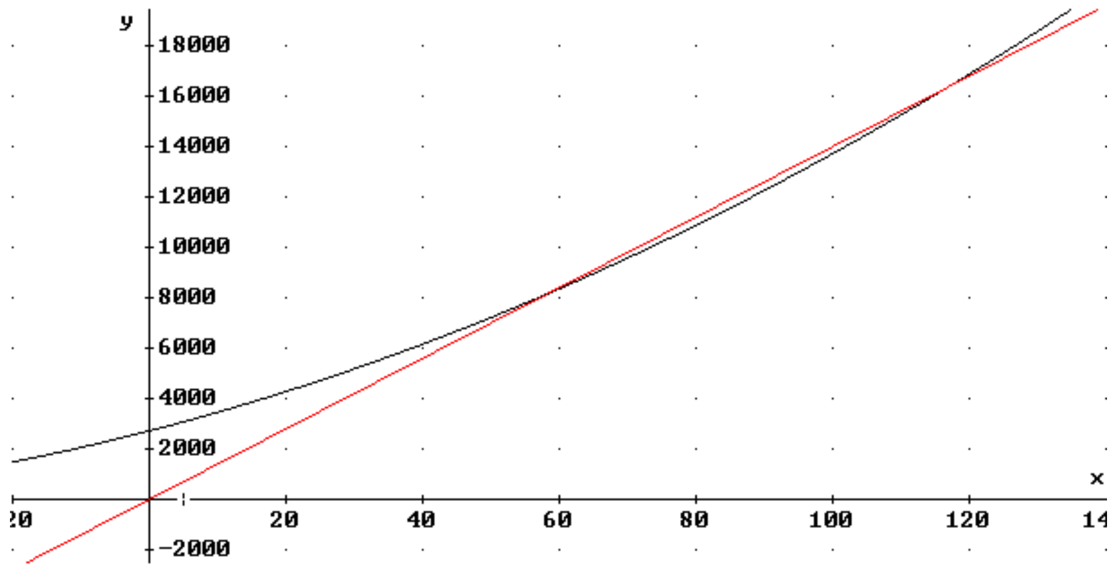
b) Versuchen Sie, diese Hilfe so einfach wie möglich zu gestalten.

Welche Vereinfachungen haben Sie vorgenommen und warum halten Sie diese für sinnvoll (bezogen auf den Sachkontext) und erlaubt (bezogen auf die Mathematik)?

Hinweise zur Lösung:

a) Als Funktionsgleichung ergibt sich $f(x) = 0{,}4\,x^2 + 70\,x + 2720$. Dabei ist $f(x)$ die Mindestfläche in cm^2 und x die Widerristhöhe in cm.
Die „Widerristhöhe“ ist hier bei Huftieren die Höhe vom Boden bis zum höchsten Punkt der Schulter.

b) Der Graph von f ist im relevanten Bereich der Widerristhöhe für Kälber (60 - 120 cm) relativ wenig gekrümmt und man könnte dort den Graphen mit einer Geraden annähern, z.B. mit einer Geraden durch den Nullpunkt: $g(x) = 140\,x$. Das Ergebnis kann sich „sehen“ lassen.



Berechnet man den Unterschied zur ursprünglichen Funktion, so liegen die Werte der Näherung im relevanten Bereich um weniger als 3% von denen der ursprünglichen Funktion entfernt.
Es sind weitere Ansätze für die Geradengleichung möglich (etwa Sekanten), die auch diskutiert werden sollten. Die Bearbeitung des obigen Problems ist auch eine Vorbereitung des Sekanten-Tangenten-Problems.
Es könnte auch die Frage diskutiert werden, wie die Formel wohl zu Stande gekommen ist (von Daten zu Funktionen?). Siehe dazu z.B. auch Richtlinie 97/2/EG des Rates vom 20. Januar 1997 (Material zu Aufgabe 1)

Aufgabe 2

Einkommensteuertarif (EStG §32 a)

(1) [1]Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. [2]Sie beträgt vorbehaltlich der §§ 32b, 34, 34b und 34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 7.664 Euro (Grundfreibetrag): 0;
2. von 7.665 Euro bis 12.739 Euro: $(793{,}10 \cdot y + 1.600) \cdot y$;
3. von 12.740 Euro bis 52.151 Euro: $(265{,}78 \cdot z + 2.405) \cdot z + 1.016$;
4. von 52.152 Euro an: $0{,}45 \cdot x - 8.845$.

[3] "y" ist ein Zehntausendstel des 7.664 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. [4] "z" ist ein Zehntausendstel des 12.739 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. [5] "x" ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. [6]Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

(2) Das zu versteuernde Einkommen ist auf den nächsten durch 36 ohne Rest teilbaren vollen Euro-Betrag abzurunden, wenn es nicht bereits durch 36 ohne Rest teilbar ist, und um 18 Euro zu erhöhen.

(3) [1]Die zur Berechnung der tariflichen Einkommensteuer erforderlichen Rechenschritte sind in der Reihenfolge auszuführen, die sich nach dem Horner-Schema ergibt. [2]Dabei sind die sich aus den Multiplikationen ergebenden Zwischenergebnisse für jeden weiteren Rechenschritt mit drei Dezimalstellen anzusetzen; die nachfolgenden Dezimalstellen sind fortzulassen. [3]Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

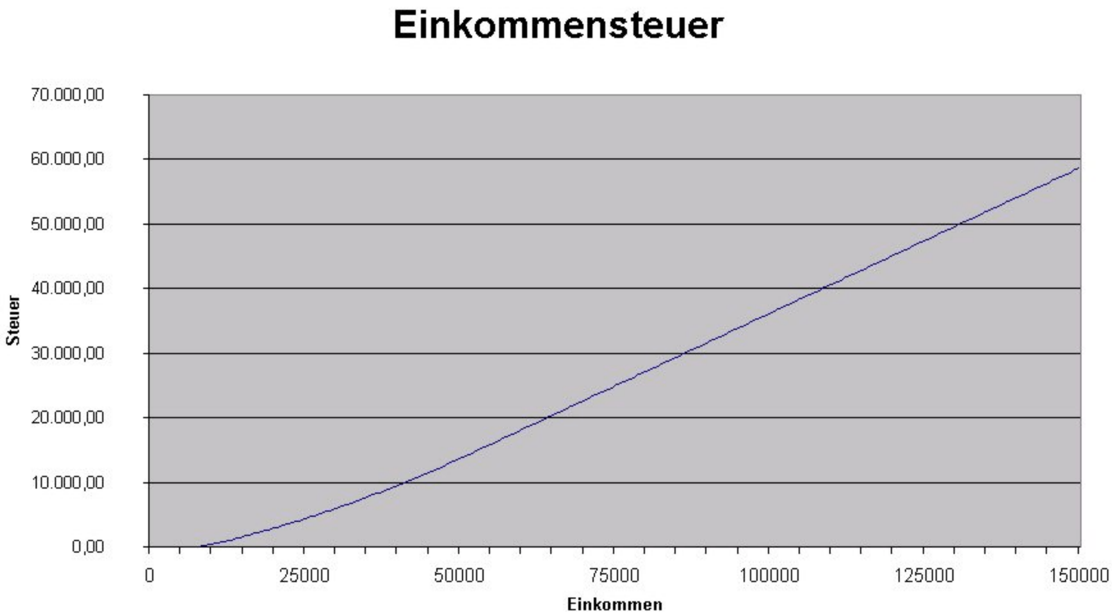
a) Erstellen Sie eine Steuertabelle und einen Graphen

b) Ist der oben stehende Steuertarif „gerecht“?

Hinweise zur Lösung:

Eine Internetadresse für den aktuellen Gesetzestext ist beim Material zu Aufgabe 2 genannt. Obiger Text ist nach dieser Internetadresse zitiert (Stand: August 2004).
Als Hilfsmittel zur Lösung der gestellten Fragen eignen sich sowohl Computeralgebrasysteme als auch Tabellenkalkulationsprogramme.
Interessant sind die Übergangsstellen zwischen den Bereichen 1, 2, 3 und 4. Mit einem CAS-Programm kann man leicht ausrechnen, dass die Übergangsstellen weitgehend sprungfrei sind. Die Übergänge wirken in der Skizze glatt.
Die Frage nach der Steuergerechtigkeit führt zudem auch zur Frage nach der Grenzsteuerfunktion. (Diese Funktion ist die Ableitung und gibt an, wie viel Steuern für den „letzten verdienten Cent“ zu bezahlen sind.) Natürlich soll an dieser Stelle die „Ableitung“ noch nicht eingeführt werden; sie

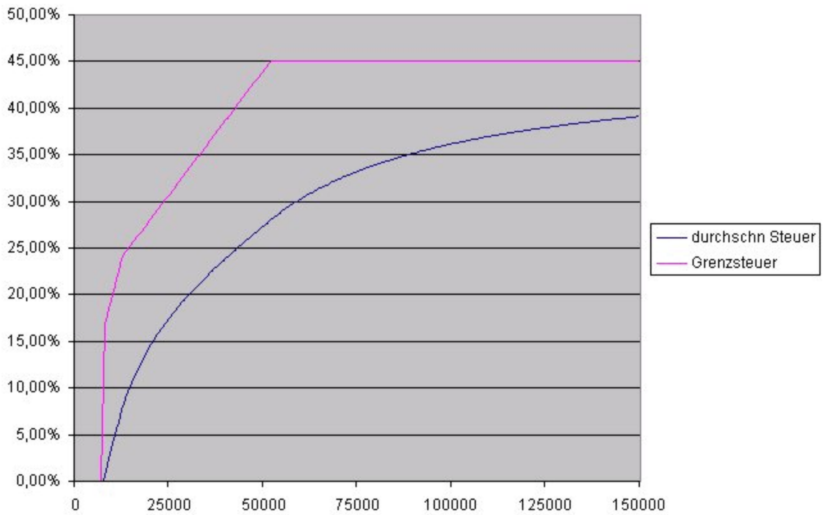
lässt sich aber durch näherungsweise Berechnungen vorbereiten. Wird das Beispiel im Themenbereich V6 wieder aufgenommen, kann die Grenzsteuerfunktion ermittelt werden.



Eine Diskussion darüber, ob der Steuertarif „gerecht" ist, kann eventuell durch gezielte Aufträge angeregt werden wie

b1) Wie hoch ist der Spitzensteuersatz, wie hoch der Eingangssteuersatz?
b2) Erstellen Sie für die durchschnittliche Steuer eine Tabelle und einen Graphen
b3) Skizzieren Sie den Graphen der Grenzsteuer.

Nebenstehende Skizze enthält je einen Graphen der durchschnittlichen Steuer und der Grenzsteuer. Sie zeigt z.B., dass er Spitzensteuersatz von 45% praktisch nie erreicht wird.
Die Grenzsteuer wurde in der Tabellenkalkulation über Sekanten berechnet, dabei wurde der Abstand von der erstellten Steuertabelle (500) übernommen.



Die Funktionsterme für die durchschnittliche Steuer können als (einfache) rationale Funktionen gedeutet werden, die bei der Arbeit mit einem CAS auch wirklich auftauchen.

Aufgabe 3

a) Von einem riesigen Eisberg bricht eine nahezu quaderförmige Scholle ab, die etwa 800m lang, 400m breit und 120m dick ist, und treibt in wärmere Gewässer, wo sie zu schmelzen beginnt.
Zur Berechnung des verbleibenden Volumens nimmt man an, dass sich pro Tag Länge, Breite und Dicke um jeweils 1 m vermindern.

a1) Berechnen Sie das Volumen nach 10 Tagen.

a2) Geben Sie eine Formel für die Größe des Volumens nach x Tagen an und testen Sie Ihre Formel für x = 10.

a3) Bei dieser „Formel" handelt es sich um einen Term. Wenn noch nicht geschehen, multiplizieren Sie ihn aus und nennen ihn V(x).
Zeichnen Sie den Graphen zu V(x) in ein Koordinatensystem.

a4) Wann wäre die Eisscholle völlig geschmolzen, wenn der Schmelzprozess immer weiter so verliefe wie oben beschrieben?
Wie beurteilen Sie das Modell für den Schmelzprozess?

b) Ein solcher Term, wie Sie ihn in Aufgabenteil a) berechnet haben, heißt *Polynom*. Und weil der höchste vorkommende Exponent der Variablen (hier x) 3 ist, sagt man zu V(x) *Polynom 3. Grades*.

b1) Ändern Sie den Maßstab Ihrer Zeichnung von a3) gegebenenfalls so, dass Sie mehr über den weiteren Verlauf von V sehen können.
Notieren Sie alle Eigenschaften des Graphen, die Ihnen wichtig erscheinen, eventuell auch im Unterschied zu Graphen, die Ihnen bisher begegnet sind.

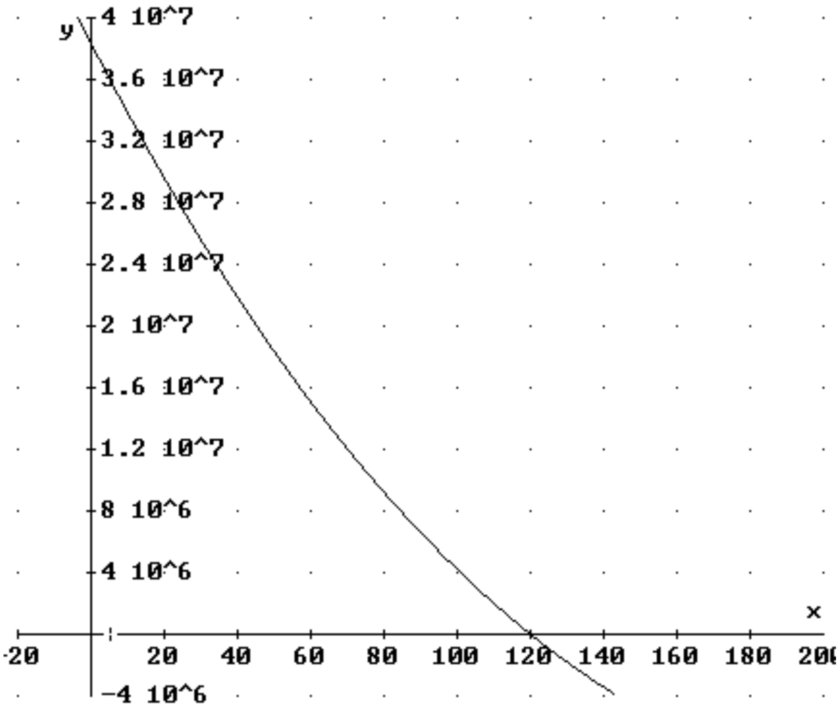
b2) Experimentieren Sie mit verschiedenen Polynomen verschiedenen Grades, um Aussagen über den prinzipiellen Verlauf der Graphen zu erhalten.
Versuchen Sie, Ihre Erkenntnisse geeignet zu ordnen und übersichtlich darzustellen.

Lösungsvorschläge:

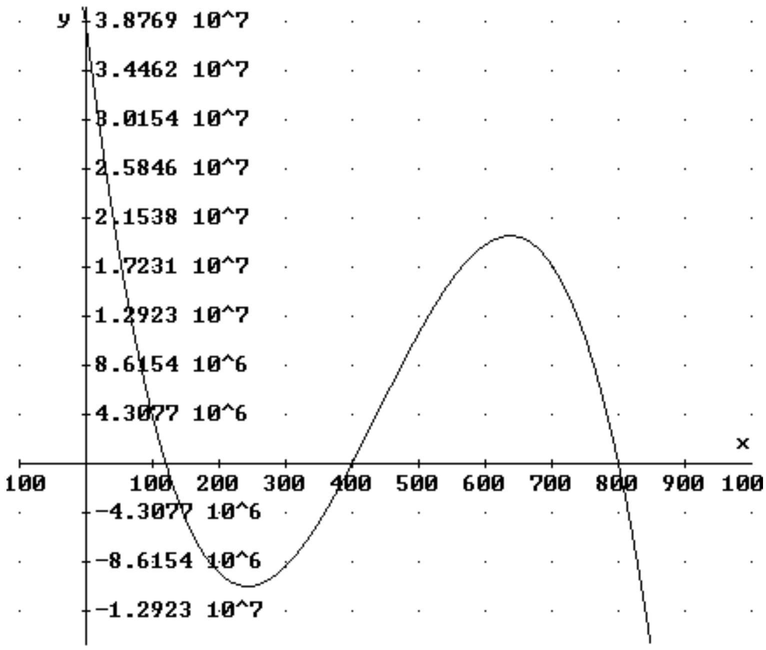
a1) Volumen nach 10 Tagen = $790 \cdot 390 \cdot 110\ \text{m}^3 = 33.891.000\ \text{m}^3$

a2) $V(x) = (800 - x) \cdot (400 - x) \cdot (120 - x) = -x^3 + 1.320 \cdot x^2 - 464.000 \cdot x + 38.400.000$

a3/a4) *Die Skizze bereitet wegen der ungewöhnlich großen Zahlen vielleicht Probleme, zunächst sollten die Schülerinnen und Schüler jedoch selbst experimentieren.*
Die 1. Nullstelle bei 120 ist gut zu sehen; hier bietet es sich eventuell an, über den Vorteil der Produktdarstellung von V zu reflektieren.
Das Modell ist wegen des Aufgabenkontexts nur für $x \in [0;120]$ gültig. Der Beginn und das Ende des Schmelzprozesses scheinen etwas zu „heftig“ modelliert zu sein: der Schmelzvorgang beginnt mit starkem Volumenverlust, der sich zum Ende hin nur ein wenig abgeschwächt hat.
Es fällt auf, dass die Kurve im gesamten Modellierungsbereich annähernd linear verläuft.



b)



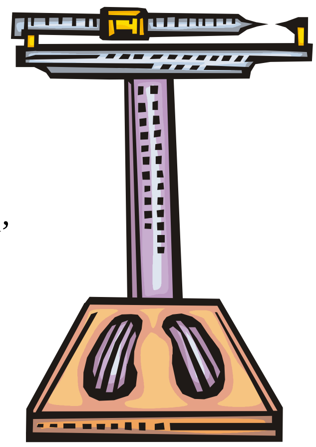
Für das Experimentieren der Lernenden sollte genügend Zeit eingeräumt werden, eventuell auch für eine Präsentation der Ergebnisse.

Aufgabe 4

Ein 25-jähriger Mann (Körpergröße 173 cm) muss sich aus gesundheitlichen Gründen an 60 aufeinander folgenden Tagen regelmäßig morgens vor dem Frühstück wiegen. Die Messergebnisse werden in der Wage gespeichert und dann auf den Computer übertragen.

Er erhielt dabei folgende Messreihe in kg:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 – 10	70,2	71,3	72,0	71,7	70,5	72,9	70,1	70,3	70,3	72,0
11 – 20	72,6	71,7	72,3	72,8	72,7	72,5	72,0	71,4	72,9	72,2
21 – 30	72,2	71,6	71,7	70,4	72,3	72,3	70,2	71,9	71,0	71,7
31 – 40	70,8	70,7	71,7	70,0	71,3	71,2	71,5	72,0	70,2	70,8
41 – 50	71,0	70,4	70,9	71,2	71,2	71,1	71,1	70,7	72,7	70,5
51 – 60	72,2	70,7	71,9	71,6	72,1	70,3	71,6	70,1	72,8	72,6



a) Wie schwer war er im Mittel?

b) Als Maße für die Streuung der Werte um den Mittelwert haben Sie vielleicht schon in der Mittelstufe die Varianz V und die Standardabweichung σ kennen gelernt. Dabei war $\sigma = \sqrt{V}$.
V berechnet sich aus n Messwerten (oben sind es n=60 Werte) a_1, a_2, ..., a_n und deren Mittelwert μ wie folgt:

$$\text{Varianz } V = \frac{1}{n} \cdot \left[(a_1 - \mu)^2 + (a_2 - \mu)^2 + \ldots + (a_n - \mu)^2 \right]$$

b1) Berechnen Sie die Varianz V und die Standardabweichung σ zu den obigen Daten und vergessen Sie diesmal nicht die Einheiten...

b2) Beschreiben Sie, was mit der Varianz berechnet wird, und überlegen Sie, warum man so scheinbar kompliziert rechnet. Wieso arbeitet man zumeist mit der Quadratwurzel von V (Standardabweichung σ)?
Überlegen Sie, welche Auswirkungen das Ziehen der Wurzel hat.

b3) Wie viele Ergebnisse der Messreihe liegen im Intervall $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$?
Stellen Sie den Sachverhalt mit einer Grafik dar und erläutern Sie damit das Streumaß σ.

c) Versuchen Sie, die Quadratwurzel-Funktion $w: x \longrightarrow \sqrt{x}$ in die Menge der Funktionen geeignet einzuordnen, und begründen Sie Ihr Vorgehen.
Wie sieht es mit anderen Wurzeln ($\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$, ..., $\sqrt[n]{x}$) aus?

Die Aufgabe bezieht sich zunächst auf die Grundvorstellung der Wurzel, vorangegangenes Quadrieren rückgängig zu machen. Bei der Berechnung der Varianz ergibt sich die wenig sinnvolle Einheit

kg^2, die zum Ziehen der Wurzel anregen sollte. Bei anderen Daten müsste darauf geachtet werden, dass sich gleichfalls nicht verwendete Einheiten ergeben.
Ob man sich intensiver mit dem Streumaß σ beschäftigen will, ist sicher situationsabhängig. So könnte man in b2) den Mittelwert der Abstände berechnen (anstelle der Quadrate der Differenzen) und dann mit σ vergleichen.
Bei der Überlegung, was das Radizieren bewirkt, spielt ja auch die Termart und die Art der Bestandteile eine Rolle (Wurzeln aus Summen ...). Hier ist eine Wiederholung der Binomischen Formeln denkbar. Vielleicht fällt das aber auch einer Schülerin oder einem Schüler auf, sodass dieses Thema aus der Lerngruppe selbst kommt.
Dass bei dieser Art von Daten alle 60 im Intervall $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ liegen, liegt auf der Hand. Daher wurde die Frage in der Aufgabe auch nicht gestellt.
Steht zur Lösung der Aufgabe kein Computer zur Verfügung, so kann die Datenmenge reduziert werden.

Lösungsvorschläge:

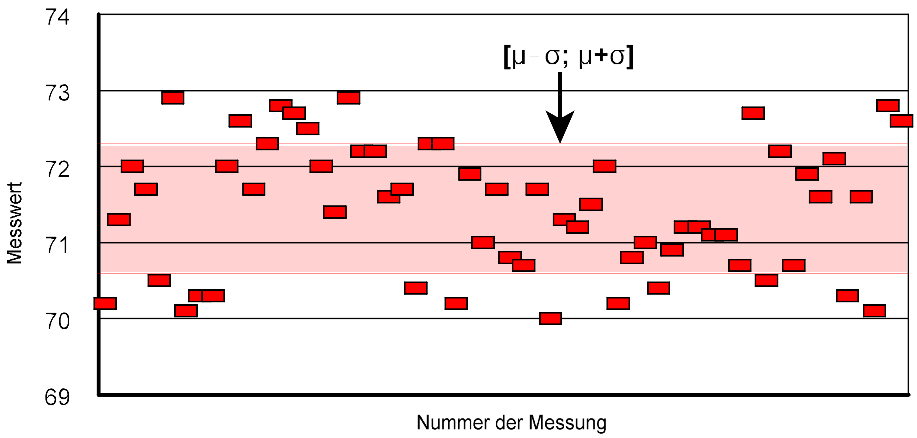
a) Gemeint ist das arithmetische Mittel $\mu = 71{,}44$ kg

b1) $V \approx 0{,}72$ (kg^2), $\sigma \approx 0{,}85$ (kg)

b2) Mögliche Antworten:
Es wird der Mittelwert der Quadrate der Differenzen aktueller Messwert, Mittelwert berechnet. Das Quadrat bewirkt, dass diese Differenzen positiv sind und große Abweichungen stark berücksichtigt werden, kleine weniger *(Quadrate von Zahlen im Intervall $]-1,1[$ werden kleiner, Quadrate außerhalb dieses Intervalls größer)*. Das Quadrieren hat aber den Nachteil, dass auch die Einheiten quadriert werden und sich so eine unsinnige Einheit ergeben kann (hier kg^2).
Das Radizieren macht diesen zuletzt genannten Punkt rückgängig, die Gewichtung der Abweichler bleibt jedoch in abgeschwächter Form erhalten. Die einzelnen Summanden erhält man ja beim Radizieren nicht wieder zurück.

Zum Mittelwert der Abstände (Beträge) siehe die Lösungsdateien.

b3) Es liegen gut 58% Prozent der Werte in dem Intervall. σ gibt daher den Abstand der Mehrzahl der Messwerte vom Mittelwert an.



c) *Der Begriff der Wurzelfunktion und ihr Zusammenhang mit der Quadratfunktion sollte aus der Mittelstufe noch erinnert werden, vielleicht hilft ja auch ein Graph der beiden Funktionen.*
Die entsprechenden Zusammenhänge mit höheren Exponenten lassen sich erraten und für konkrete Exponenten mithilfe eines Funktionsplotters auch (präformal) begründen.

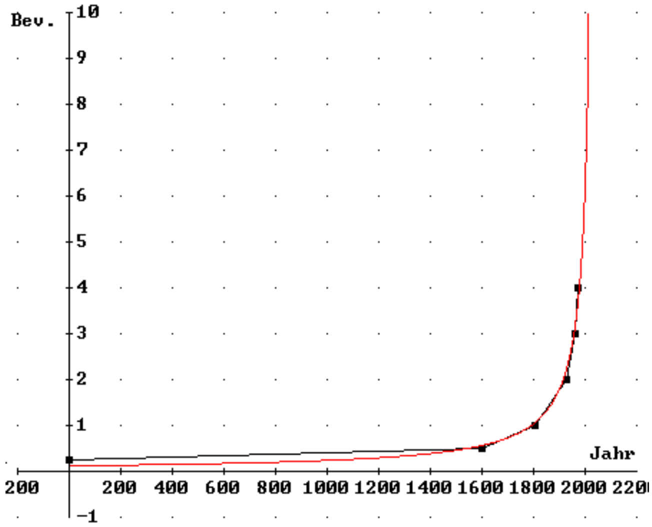
Aufgabe 5

1974 wurde eine Prognose für das Anwachsen der Weltbevölkerung anhand folgender Daten abgegeben:

Jahr	„0“	1600	1804	1927	1960	1974
Bevölkerung in Milliarden	0,25	0,5	1	2	3	4

Die Prognose basierte auf der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{249}{2040 - x}$.

Der Funktionsgraph zeigt, dass f die Werte in der Tabelle recht gut wiedergibt:



a1) Geben Sie damit eine Prognose ab, in welchem Jahr die Weltbevölkerung die 5 Milliarden erreicht und in welchem die 6 Milliarden.
Vergleichen Sie Ihre berechneten Werte mit den tatsächlichen Jahreszahlen und kommentieren Sie die Güte Ihrer Prognose.

a2) Besorgen Sie sich aktuelle Prognosen für das Anwachsen der Weltbevölkerung, erstellen Sie mithilfe von f ebenfalls Prognosen für die dort genannten Jahre und vergleichen Sie.
Was stellen Sie fest?
Kommentieren Sie und versuchen Sie zu erklären.

a3) Vor einigen Monaten haben Sie im Unterricht „exponentielles Wachstum“ betrachtet. Versuchen Sie, sich an die charakteristische Eigenschaft dieses Wachstumsmodells zu erinnern.
Das 1974 verwendete Modell beschreibt „hyperbolisches Wachstum“. Was erscheint Ihnen an diesem Modell charakteristisch zu sein, auch in Abgrenzung gegen das exponentielle Modell?

a4) Schlagen Sie selbst ein Modell vor, das 1974 eine recht gute Prognose ergeben hätte. Dabei ist es erlaubt, nicht alle Daten aus obiger Wertetabelle dem Modell zugrunde zu legen.

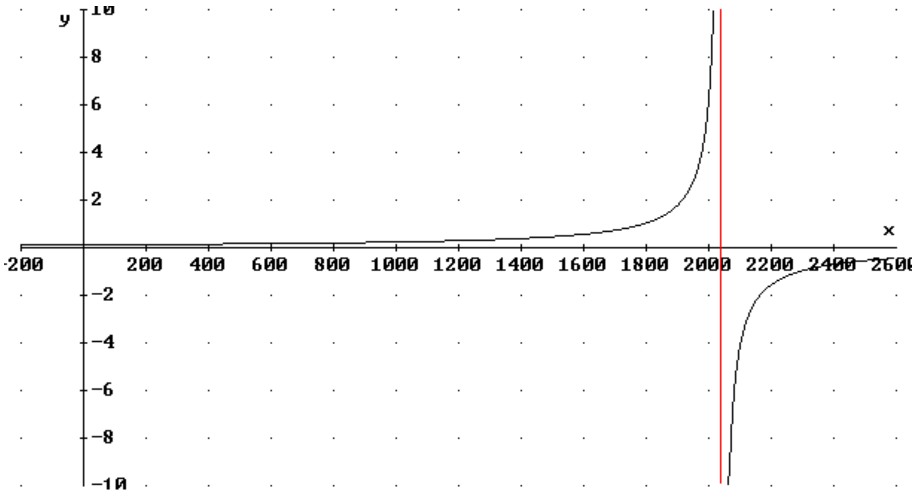
b1) Erstellen Sie einen Graphen von f, sodass deutlich wird, dass es sich bei f um eine Hyperbel handelt.
Benennen Sie am Graphen Eigenschaften von Hyperbeln allgemein, aber auch speziell der Hyperbel f (z.B. Bedeutung der Konstanten im Zähler, Lage der Polstelle).

b2) Experimentieren Sie mit dem Funktionsterm einer Hyperbel (Variable potenzieren, Konstante verändern). Versuchen Sie, Ihre Entdeckungen für andere verständlich darzustellen.

Lösungsvorschläge:

a1) Das Modell prognostiziert für das Jahr 1990 5 Milliarden Menschen, die wurden schon im Jahr 1987 erreicht. Die 6 Milliarden-Marke ist nach dem Modell 1998 erreicht, in Wirklichkeit wurde sie 1999 überschritten.
Das Modell basiert auf einer sehr kleinen Datenmenge. Im Vergleich dazu scheinen die Werte akzeptabel zu sein.

a2) Geschätzt wird derzeit, dass 2012 7 Milliarden Menschen auf der Erde leben werden und 2028 8 Milliarden.
Das Modell liefert für 2012 etwa 8,9 Milliarden und für 2028 sogar fast 21 Milliarden.
Schon die Werte zu a1) lassen ein schnelleres Wachstum im Modell erwarten als die aktuellen Werte und Schätzungen angeben.



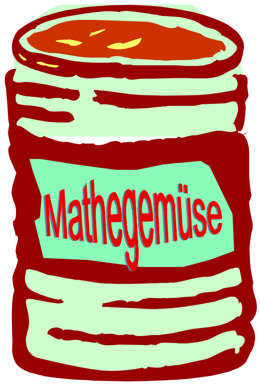
Die Nähe zur Polstelle der Hyperbel sollte als Grund sichtbar werden, wenn der Graph der Modell-Hyperbel geeignet skaliert wird, spätestens in b1).

a4) Einen Teilbereich kann man z.B. linear modellieren .

Zu a3) und b):
Die dort von den Schülerinnen und Schülern angestellten Überlegungen hängen natürlich von den aus der Mittelstufe verbliebenen Kenntnissen ab.
Zur Wiederholung der Exponentialfunktion und exponentiellen Wachstums eignet sich Mathe-Online (siehe [5]): Zunächst zur Seite „Mathematische Hintergründe“ und hier „Exponentialfunktion und Logarithmus“ auswählen.

Aufgabe 6

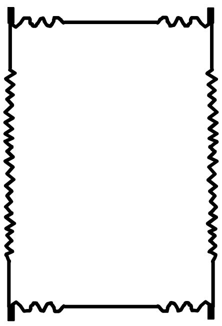
Viele Lebensmittel sind in zylinderförmigen Blechdosen abgepackt. In dieser Aufgabe soll untersucht werden, ob dabei auch auf einen möglichst geringen Verbrauch von Verpackungsmaterial, hier verzinktem Blech, geachtet wurde.



a) Besorgen Sie sich eine leere Standard-Blechdose vom „Typ 850“, d.h. mit einem Volumen von 850 cm^3 (= 850 ml).
Berechnen Sie das Volumen, indem Sie Ihre Dose ausmessen. Überprüfen Sie das Volumen auch durch Füllen mit Wasser und einem Messbecher.

Möglichst geringer Materialverbrauch bedeutet zunächst „Zylinder mit minimaler Oberfläche“ (das Volumen sei 850).
Überlegen Sie sich, wie Sie untersuchen können, ob Ihre reale Dose tatsächlich eine minimale Oberfläche (unter allen 850 ml - Dosen) aufweist, und führen Sie diese Untersuchung durch.

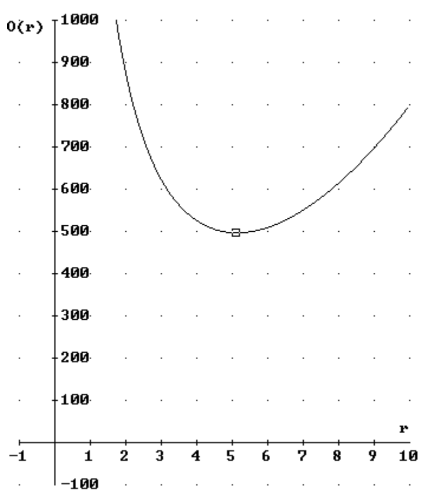
b) Schauen Sie sich Ihre Dose genauer an. Das erste Modell „Zylinder“ ist nur eine grobe Beschreibung der realen Dose. In Wirklichkeit benötigt man mehr Material, um eine Dose herzustellen (siehe linke Abbildung):



1. Sowohl die beiden Deckel als auch die Mantelfläche sind mit Rillen versehen, um die Stabilität der Dose zu erhöhen.
   Schneiden Sie aus einem Deckel und aus der Mantelfläche jeweils einen Streifen aus und klopfen ihn mit einem Hammer glatt, um den Materialverbrauch abschätzen zu können.
2. Die Deckel sind durch Umbördeln des Randes mit dem Rand der Mantelfläche vernietet und verlötet, wozu ein größerer Deckelradius benötigt wird.
   Schätzen Sie diese Vergrößerung sinnvoll ab.

Untersuchen Sie erneut, ob der Materialverbrauch bei Ihrer Dose minimiert ist.

Lösungsvorschläge:



a) Ansatz: Oberfläche (r,h) = $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$
Wir wissen: Volumen = 850 = $\pi r^2 \cdot h$
Auflösen nach h und in Oberfläche einsetzen:
$h = \dfrac{850}{\pi r^2} \Rightarrow$ Oberfläche = $O(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{1700}{r}$.
Darstellung als rationale Funktion: $O(r) = \dfrac{2\pi r^3 + 1700}{r}$
Die Skizze lässt ein Minimum bei etwa r = 5 vermuten:
Es ist O(5) = 497,0796326, O(5,1) = 496,7589831,
O(5,2) = 496,8204076.

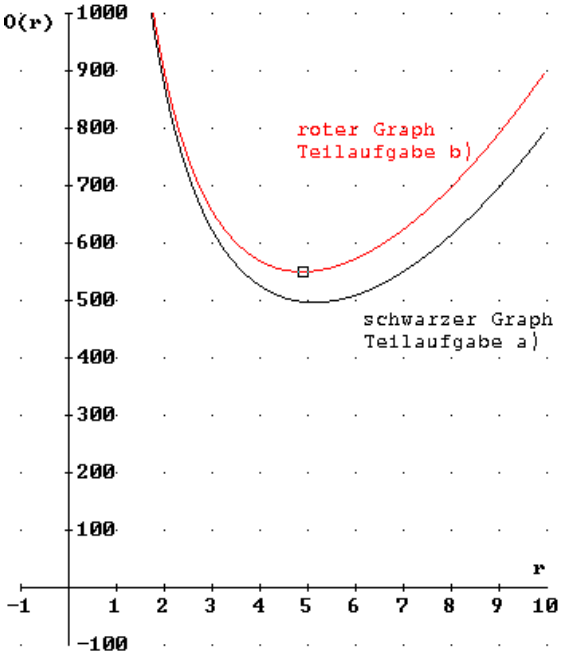
⇒ Minimum bei einem Radius von etwa 5,1 cm und einer Höhe von etwa 10,4 cm ist die Oberfläche minimal mit 496,76 cm^2.
In wie weit diese Werte der vorliegenden Dose entsprechen, muss geprüft werden.

b) *Die Überprüfung zu b1) kann von einigen wenigen Schülerinnen und Schülern zu Hause erledigt werden., ebenso b2).*

Annahmen für die folgende Beispielrechnung

- Glattklopfen: Deckelradius unverändert, Höhe des Mantels vergrößert sich um 2 mm.
- Aufdröseln Deckelbefestigung: Deckelradius vergrößert sich um 7 mm, Mantelfläche bleibt.

Damit ergibt sich die geänderte Oberfläche zu $O_2(r) = 2\cdot\pi\cdot(r+0{,}7)^2 + 2\cdot\pi\cdot r\cdot\left(\frac{850}{\pi r^2}+0{,}2\right)$ und diese Skizze:



Es scheint ein Minimum etwa bei $r \leq 5$ vorzuliegen. Eingrenzung:
O_2 (4,8) = 550,2648801, O_2 (4,9) = 550,1369883
O_2 (5,0) = 550,4238759
⇒ Minimum etwa bei einem Radius von 4,9 cm und einer Höhe von 11,3 cm bei einem Materialverbrauch von etwa 550,14 cm^2.
Darstellung als rationale Funktion:

$$O_2(r) = \frac{100\pi r^3 + 160\pi r^2 + 49\pi r + 85.000}{50r}$$

Vergleich mit realer 850 ml Dose.

Wie das Minimum angenähert wird und wie genau, hängt sicher von der konkreten Situation im Unterricht ab. Umsetzbare Vorschläge von Schülerinnen und Schülern sollten Priorität haben.

Aufgabe 7

In den Aufgaben 2 und 6 haben Sie Funktionsterme kennen gelernt, die aus einem Bruch bestanden, dessen Zähler und Nenner ein Polynom war. Funktionen, deren Term so beschrieben wird, heißen *rationale Funktionen*.

Versuchen Sie, falls noch nicht geschehen, am Graphen der in den Aufgaben 2 und 6 aufgetretenen rationalen Funktionen charakteristische Eigenschaften dieser Klasse von Funktionen zu finden.
Durch variieren des Zähler- und Nennerterms werden diese Eigenschaften bestätigt oder müssen revidiert oder gar verworfen werden.
Beschränken Sie sich bei den Variationen im Zähler auf Polynome maximal 4. Grades und im Nenner auf Polynome höchstens 2. Grades. Versuchen Sie nach Möglichkeit auch, die mit dem Graphen gefundenen Eigenschaften am Funktionsterm zu begründen.

Aufgabe 8

Beginnt eine Kerze in einem dunklen Raum zu leuchten, so empfindet man einen deutlichen Zuwachs an Helligkeit. Zündet man bei Sonnenschein auf der Terrasse eine Kerze an, so ist der Zuwachs an Helligkeit für unsere Sinne nicht wahrzunehmen. Der Zuwachs der Helligkeit durch die Kerze ist im Vergleich zur Helligkeit bei Sonnenlicht zu gering, als dass wir ihn wahrnehmen können, im Vergleich zur „Helligkeit" in einem dunklen Raum jedoch groß. Ob wir einen Unterschied wahrnehmen können, hängt von der Größe der Reizänderung ΔR im Verhältnis zum vorliegenden Reiz R ab: Wichtig ist also für unsere Wahrnehmung die relative Reizzunahme $\frac{\Delta R}{R}$. Ernst Heinrich Weber (1795 - 1878) stellte in vielen Versuchen fest, dass diese konstant ist; für Helligkeit ist die Weber-Konstante z.B. 0,08. Gustav Theodor Fechner (1801 - 1887) gelang es schließlich, die von Weber gefundenen Daten mathematisch zu beschreiben. Daher heißt diese Beschreibung heute das ***Weber-Fechnersche Gesetz****.*

Der kleinste noch wahrnehmbare Reiz sei R_0, der größte gerade noch erträgliche Reiz sein R_1.
Die zugehörigen Empfindungen bezeichnen wir mit E_0 und E_1.
Fechner konnte zeigen, dass die Funktion

$$E(R) = (E_1 - E_0) \cdot \frac{\lg \frac{R}{R_0}}{\lg \frac{R_1}{R_0}} + E_0$$

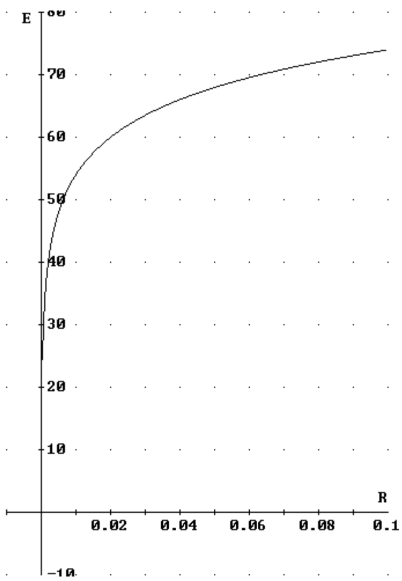
den Zusammenhang zwischen R *(Reiz)* und E *(Empfindung)* wiedergibt.

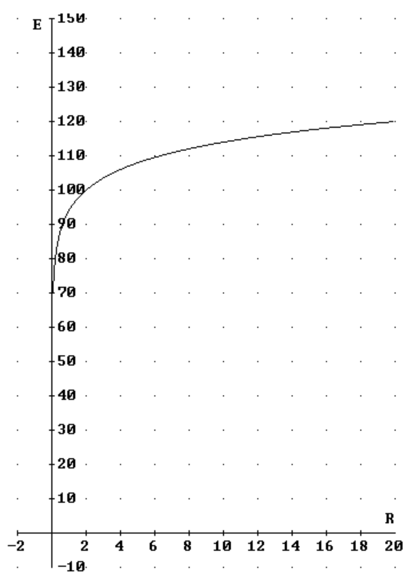
a) Das Gehör nimmt den Druck p der Schallwelle wahr, und zwar gilt $E_0 = 0$ dB, $E_1 = 120$ dB *(dB = Dezibel)* und $R_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa, $R_1 = 20$ Pa *(Pa = Pascal)*.
Geben Sie hierfür den Term E(R) an und skizzieren Sie die Funktion in ein Koordinatensystem.
Beschreiben Sie, wie sich im gesamten Definitionsbereich die Empfindung in Abhängigkeit zu den Reizen entwickelt.

b) Zeigen Sie mit der (allgemeinen) Funktion, dass die Reizsteigerung um einen **Faktor** k eine Empfindungssteigerung um einen bestimmten **Betrag** bringt.

Lösungsvorschläge:

a) $E(R) = 20 \cdot \lg(5 \cdot 10^4 \cdot R)$
Definitionsbereich:
$[2 \cdot 10^{-5} ; 20]$
Zunächst nimmt die Empfindung bei sehr kleinen Reizänderungen stark zu (linke Abbildung).
Die Kurve flacht schnell ab, sodass eine Zunahme der Empfindung immer größerer Reizänderungen bedarf (rechte Abbildung).



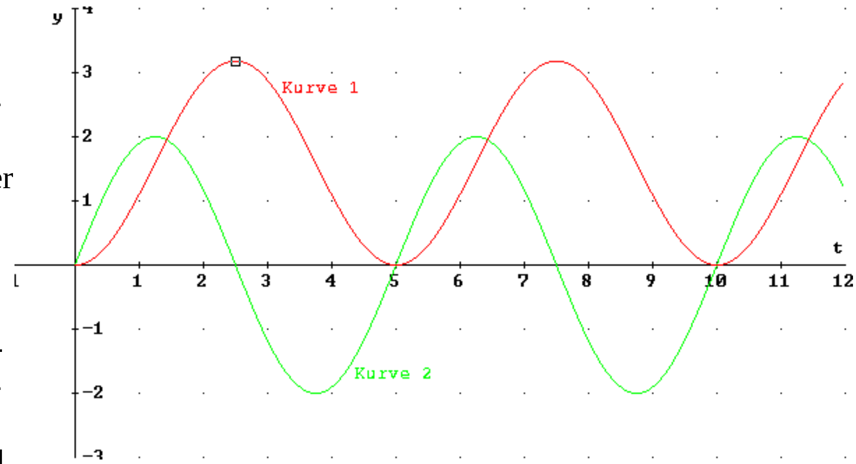


b) $E(k \cdot R) = E(R) + C$?
Es gilt $\lg (k \cdot R) = \lg k + \lg R = \lg R + \text{Konstante}$. Eingesetzt in die obige Formel ergibt sich die Behauptung *(reicht eigentlich als Begründung aus)*.
Zur einfacheren Rechnung ist es günstig, die Konstanten der Formel mit je einem Buchstaben zu „codieren“, also etwa $E_1 - E_2 =: c_1$, $\lg (R_1 / R_0) =: c_2$, $\lg R_0 =: c_3$, $\lg k =: c_4$.

$$E(k\,R) = c_1 \cdot \frac{\lg(k \cdot R) - c_3}{c_2} + E_0 = \frac{c_1}{c_2} \cdot (\lg R + c_4 - c_3) + E_0 = \frac{c_1}{c_2} \cdot (\lg R - c_3) + E_0 + \frac{c_1}{c_2} \cdot c_4 =$$
$$= E(R) + C.$$

Aufgabe 9

a) Das nebenstehende Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge und den zeitlichen Verlauf der Änderungsrate des Luftvolumens.



a1) Welche der beiden Kurven beschreibt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge? Begründen Sie Ihre Wahl im Sachkontext der Aufgabenstellung.

a2) Die Terme zu den beiden Kurven lauten

$f(t) = 2 \cdot \sin (0{,}4\pi \cdot t)$ und $g(t) = \frac{5}{\pi} \cdot (1 - \cos (0{,}4\pi \cdot t))$;

t ist die Zeit in Sekunden und der Funktionswert Liter bzw. Liter pro Sekunde.
Welcher Term gehört zu welcher Kurve? Begründen Sie Ihre Wahl.

a3) Ermitteln Sie das maximale und das minimale Luftvolumen in der Lunge.
Bestimmen Sie Zeitpunkte, zu denen die Lunge jeweils die Hälft des maximalen Luftvolumens enthält.

b) Entgegen obiger Annahme bleibt immer Luft in der Lunge. Vereinfachend nehmen wir an, dass diese minimale Luftmenge in der Lunge konstant 0,8 Liter sei. Der Atemvorgang laufe ansonsten wie in Aufgabenteil a) ab.

Welche Änderungen ergeben sich in den Kurven 1 und 2 (siehe Abbildung)?
Wie wirken sich die Änderungen auf die beiden Funktionsterme aus?

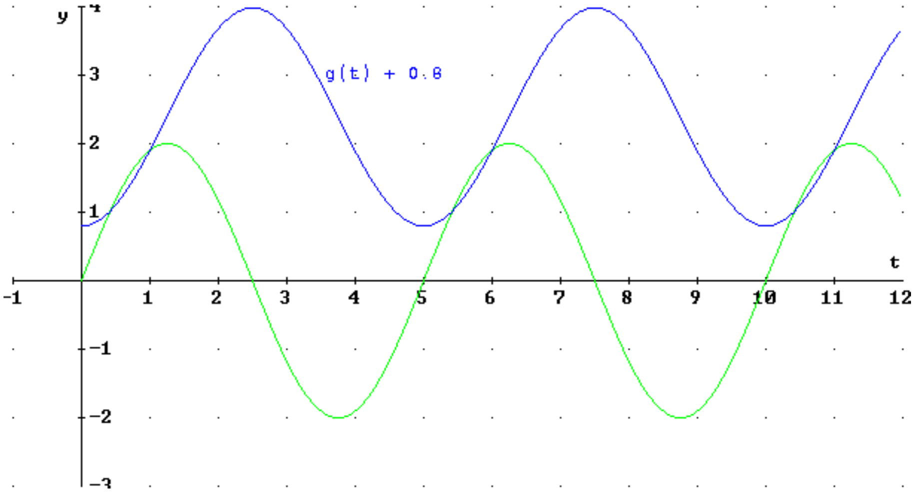
Lösungsvorschläge:

a1) Das Luftvolumen in der Lunge kann nicht negativ sein. Daher kommt nur Kurve 1 in Frage.

a2) f(t) kann negativ werden, g(t) nicht, daher gehört g(t) zur Kurve 1, f(t) also zur Kurve 2.

a3) *Das maximale Luftvolumen kann mithilfe des Graphen ermittelt werden, es ergibt sich aber auch einfach aus Symmetriegründen.*
Für $t_0 = 2{,}5$; $t_1 = 5 + 2{,}5$; $t_i = 5 \cdot i + 2{,}5$ ist das Luftvolumen im Modell der Aufgabe maximal, nämlich $10/\pi$ Liter, also etwa 3,18 Liter.
Das minimale Luftvolumen ist 0 (die Lunge ist völlig leer) und das tritt ein für $t \in \{0, 5, 10, ...\}$.
Die Hälfte des maximalen Luftvolumens wird ebenfalls aus Symmetriegründen erreicht für $t \in \{1{,}25; 3{,}75; 6{,}25; 8{,}75; ...\}$

b) Die Kurve für das Luftvolumen verschiebt sich in y-Richtung um 0,8 Einheiten. Die Änderungsrate des Luftvolumens bleibt davon unberührt.
Daher bleibt f(t) ebenfalls unverändert.
Der neue Term für das Luftvolumen lautet $h(t) = g(t) + 0{,}8$.



Spätestens in dieser Teilaufgabe muss über die Kurve 2 (Änderungsrate des Luftvolumens) nachgedacht werden. Dabei ist auch die Bedeutung der Nullstellen interessant. Deren Berechnung kann wiederholt werden.
Fragen zur Modellierung anderer Atemzyklen (anderer Lungenvolumina) bieten sich an.

Aufgabe 10

In einem Monopolbetrieb ergibt sich die Abhängigkeit des Erlöses E und der Gesamtkosten K von der Stückzahl x nach folgender Tabelle *(Erlös und Kosten in Geldeinheiten GE)*:

Stückzahl x	Stückpreis p	Erlös E	Gesamtkosten K
0	-	-	4.000
100	35	3.500	4.100
200	30	6.000	4.200
300	25	7.500	4.300
400	20	8.000	4.400

a) Ermitteln Sie je eine Funktionsgleichung, die die Gesamtkosten K, den Preis p und den Gewinn G beschreibt *(unter der Annahme, dass sich Stückpreis, Erlös und Kosten in Abhängigkeit von x kontinuierlich entwickeln)* und begründen Sie Ihr Vorgehen.

b) Wie groß müssen die Produktionszahlen sein, damit der Betrieb mit Gewinn arbeitet. Für welche Stückzahl ist der Gewinn maximal und wie groß sind dann der Gewinn und der Stückpreis?

Lösungsvorschläge:

a) Es ist wegen des Sachkontexts der Aufgabe $x \geq 0$.

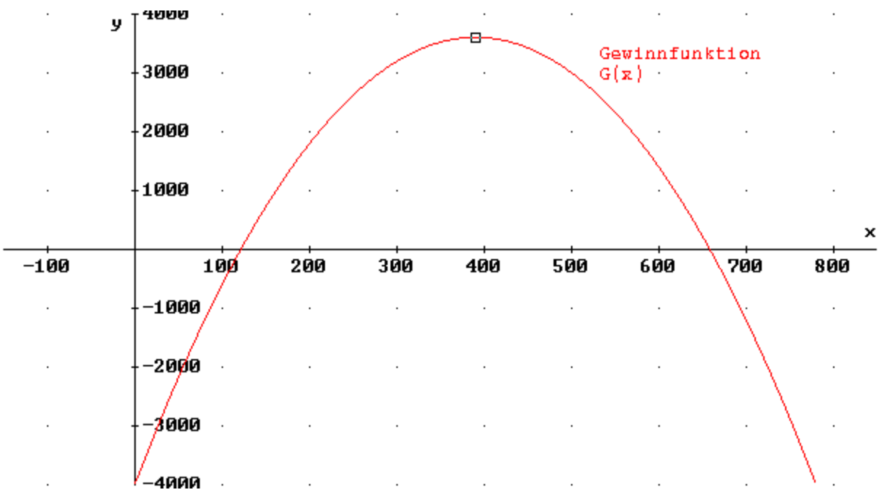
$K(x) = 4000 + x$
Aus der Tabelle ergibt sich, dass es Festkosten in Höhe von 4.000 GE gibt und pro Stück 1 GE hinzu kommt.

$p(x) = -0{,}05\,x + 40$
Es geht um die Rate des Absenkens beim Preis *(negative Steigung!)*, die 5% beträgt, und die Addition einer Konstanten, damit der Anfangspreis stimmt.

$E(x) = -0{,}05\,x^2 + 40\,x$, denn Erlös = Preis · verkaufte Stück

$G(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 39\,x - 4000$, denn Gewinn = Erlös − Kosten

b) *Überlegungen mit näherungsweisen Lösungen sind für die Nullstelle und das Maximum durchaus sinnvoll, da nur ganzzahlige Stückzahlen produziert werden können. Es kann aber auch der exakte Wert berechnet werden.*



Wo beginnt die Gewinnzone?
Auf dem Graphen wird ein Wert von etwa 121 angezeigt.
Probe: $G(121) < 0$, aber $G(122) > 0$.
Daher macht die Firma ab einer Produktion von 122 Stück Gewinn *(bis weit über 600)*.
Eine Berechnung ergibt für die linke Nullstelle etwa 121,49.

Maximaler Gewinn *(aus der Graphik ermittelt)*:
Maximum des Gewinns liegt ca. bei $x = 390$, also einer Produktion von 390 Stück, der Gewinn beträgt dann 3.605, der Stückpreis 20,5 Geldeinheiten, denn $G(390) = 3.605$ und $p(390) = 20{,}5$.
Eine Berechnung des Scheitelpunktes der Parabel wäre hier natürlich auch möglich. In diesem Fall ist der abgelesene Wert sogar exakt, der Scheitelpunkt der Parabel liegt bei (390 | 3.605).

Aufgabe 11

Für die Gesamtkosten eines Betriebes liegen folgende Kenntnisse vor:

Stückzahl in 1.000	1	2	3	4	5	6	8	10
Kosten in 1.000 €	7,5	10,0	11,3	12,0	12,7	14,0	20,8	37,2

a) Übertragen Sie die obigen Werte in ein Koordinatensystem.

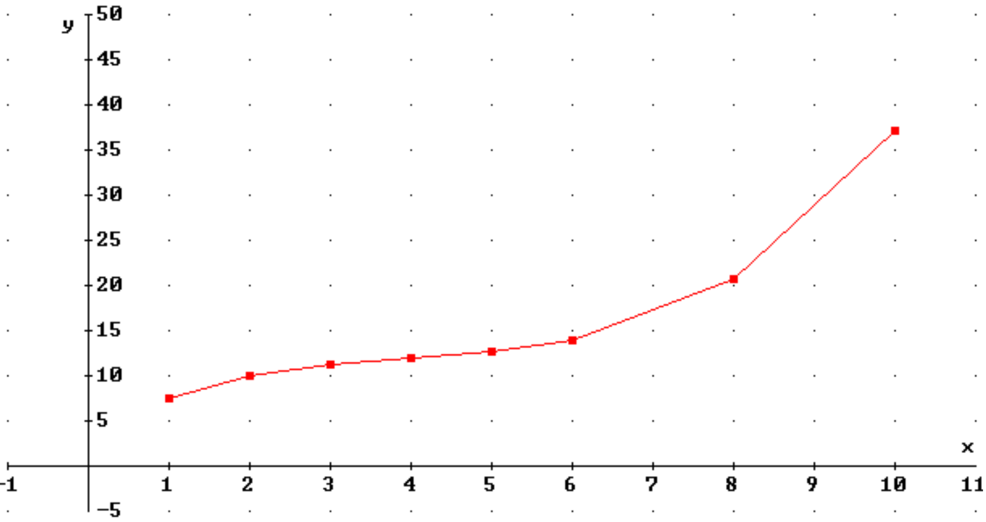
b) Bestimmen Sie eine Funktion, welche die oben gegebene Wertetabelle erfüllt und daher als ein Modell für die Kostenfunktion gesehen werden kann, und erstellen Sie einen Graphen.
Kommentieren Sie die Qualität Ihrer Lösung.
Warum haben Kostenfunktionen oft einen vergleichbaren Verlauf?
In welchen Bereichen lohnt es sich, die Stückzahl zu erhöhen *(„Kostenzunahme unterproportional“)*, in welchen Bereichen wird eine Erhöhung der Stückzahl unverhältnismäßig teuer *(„Kostenzunahme überproportional“)*?

Man unterscheidet in der Wirtschaft
- *fixe Kosten, z.B. Mietzahlungen*
- *rein proportionale Kostenzunahme, z.B. Materialkosten*
- *unterproportionale (degressive) Kostenzunahme, z.B. Fertigungslohn*
- *überproportionale (progressive) Kostenzunahme, z.B. Wartungskosten durch Überbeanspruchung der Anlagen oder Investitionskosten für neue Anlagen.*

c) Die Erlösfunktion sei gegeben durch e(x) = 2x + 5.
Welche Stückzahlen kann der Betrieb produzieren, um Gewinne zu machen, bei welchen Stückzahlen ist der Gewinn maximal?

Lösungsvorschläge:

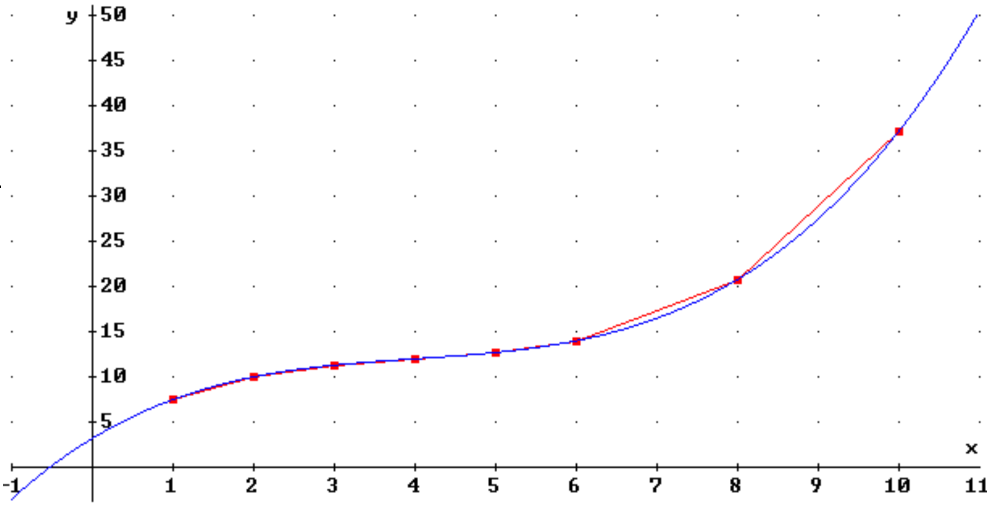
a) Verbindet man die Punkte, erhält man eine recht gute visuelle Vorstellung vom Verlauf der Kosten (x = Stückzahl, y = Kosten). *Eine Antwort auf die letzte Frage von b) wäre schon hier möglich.*



b) 1. Ansatz (geschlossener Term):
8 Punkte vorgegeben ⇒ Polynom höchstens 7. Grades

(Lösung mit CAS, Ansatz kann aber in jedem Fall erstellt werden)
Die Lösung ist hier ein Polynom 3. Grades: $f(x) = 0{,}1\,x^3 - 1{,}2\,x^2 + 5{,}4\,x + 3{,}2$, da die Koeffizienten für die restlichen x-Potenzen verschwinden.

Kommentar zur Qualität der Näherung



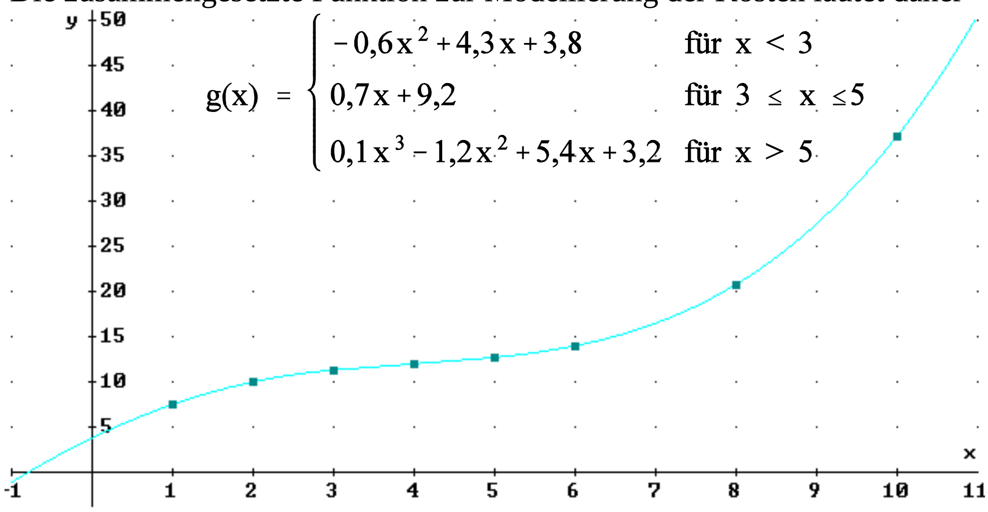
Mit einer solchen Funktion lassen sich Kosten zwischen den angegebenen Punkten und auch bedingt außerhalb des Bereiches der Tabelle modellieren, bedingt, weil der Funktionsterm auf den gegebenen Punkten basiert und für den Bereich außerhalb keine Informationen vorliegen. Aber auch Funktionswerte zwischen gegebenen x-Koordinaten bleiben Modelle bzw. Prognosen.

2. Ansatz (zusammengesetzte Funktion):
Mit den ersten 3 Punkten ermitteln wir eine quadratische Funktion, die nächsten 3 Punkte könnten auf einer linearen Funktion liegen (Modellannahme!) mit der Steigung 0,7 und mit den letzten 4 Punkten berechnen wir ein Polynom höchstens 3. Grades:

$g_1(x) = a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$ und $g_1(1) = 7{,}5 \wedge g_1(2) = 10 \wedge g_1(3) = 11{,}3$
$g_2(x) = 0{,}7\,x + n$ und z.B. $g_2(4) = 2{,}8 + n = 12 \Rightarrow n = 9{,}2$
$g_3(x) = b_3\,x^3 + b_2\,x^2 + b_1\,x + b_0$ und $g_3(5) = 12{,}7 \wedge g_3(6) = 14 \wedge g_3(8) = 20{,}8 \wedge g_3(10) = 37{,}2$

Die Berechnungen sollten ergeben:
$g_1(x) = -0{,}6\,x^2 + 4{,}3\,x + 3{,}8$ $g_2(x) = 0{,}7\,x + 9{,}2$ *(s.o.)*
$g_3(x) = 0{,}1\,x^3 - 1{,}2\,x^2 + 5{,}4\,x + 3{,}2$ *(der Term des 1. Ansatzes).*
Die zusammengesetzte Funktion zur Modellierung der Kosten lautet daher

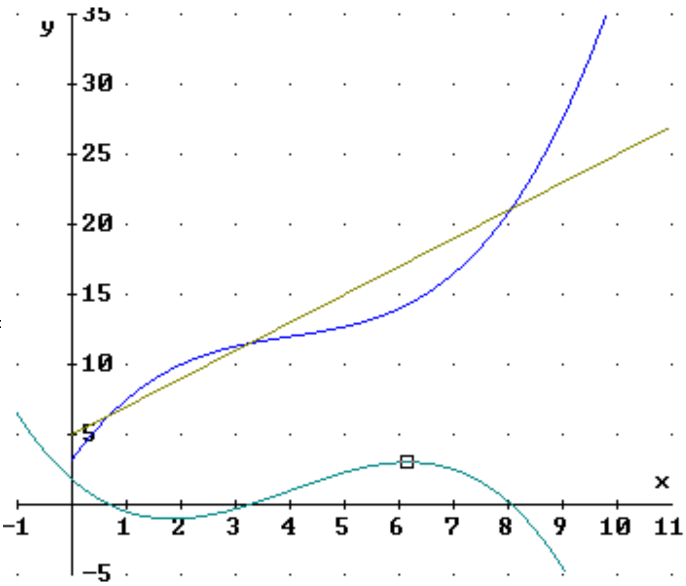
$$g(x) = \begin{cases} -0{,}6x^2 + 4{,}3x + 3{,}8 & \text{für } x < 3 \\ 0{,}7x + 9{,}2 & \text{für } 3 \le x \le 5 \\ 0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5{,}4x + 3{,}2 & \text{für } x > 5 \end{cases}$$



Da ohnehin wegen des Sachkontextes der Aufgabe $x \geq 0$ gelten muss, ist der sichtbare Unterschied zur 1 Näherung lediglich der Schnittpunkt mit der y-Achse:
$f(0) = 3{,}2$ und $g(0) = 3{,}8$. Daher steigt der Graph der 2. Näherung dort auch weniger an.
Leicht kann man überlegen, dass die drei Terme lückenlos aneinander passen und das offenbar relativ „glatt", ohne dass letzteres präzisiert werden könnte. Vergleicht man die Lösungen der beiden Ansätze, so wird deutlich, dass die gegebenen Punkte (1/7,5), (2/10), (3/11,3), (4/12) und (5/12,7) sämtlich auf der Lösungsfunktion f aus dem 1. Ansatz bzw. g_3 liegen, weshalb sich trotz der gegebenen 8 Punkte „nur" ein Polynom 3. Grades ergibt.

Die Form des Graphen / Einteilung der Bereiche:
Wegen der normalerweise vorhandenen Fixkosten liegt der Schnittpunkt mit der y-Achse oberhalb der x-Achse (f(0) > 0).
Der Graph steigt zunächst an, weil die Kosten bei einer Steigerung der Stückzahl noch wachsen, bis eine gute Auslastung der Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter sowie der Maschinen des Unternehmens erreicht ist. Das bedeutet für den Graphen, dass die Steigung zunehmend geringer wird (*unterproportionale Kostenzunahme)*. Es lohnt sich also in diesem Bereich, die Fertigungszahlen zu erhöhen, weil die damit verbundene Steigerung der Kosten abnimmt.
Im folgenden Bereich steigen die Kosten scheinbar proportional, bis eine Steigerung der Stückzahl an die Grenzen der vorhandenen Ressourcen führt und irgendwann nicht mehr möglich ist. Das bedeutet entweder starke Kostensteigerung *(überproportional)* z.B. wegen Investitionen oder aber auch das Ende des Definitionsbereichs der Kostenfunktion.

Der Begriff „Steigung" muss hier nicht präzisiert werden. Wenn man auf dem Graphen entlang fährt (DERIVE nennt das „Spur-Modus"), wird der Sachverhalt gut deutlich.
Der eigentlich gesuchte Wendepunkt, an dem die Kostenkurve „kippt", ist hier an einer Stelle mit ziemlich gleichmäßiger Steigung, sodass ein Ablesen nicht genau möglich ist (Überlegung nur bei Modell 1).
Es sollte einigen Schülerinnen und Schülern auffallen, dass dieses Polynom 3. Grades vergleichsweise „geglättet" verläuft, also keinen Hoch- und keinen Tiefpunkt hat und daher auch nur eine Nullstelle.

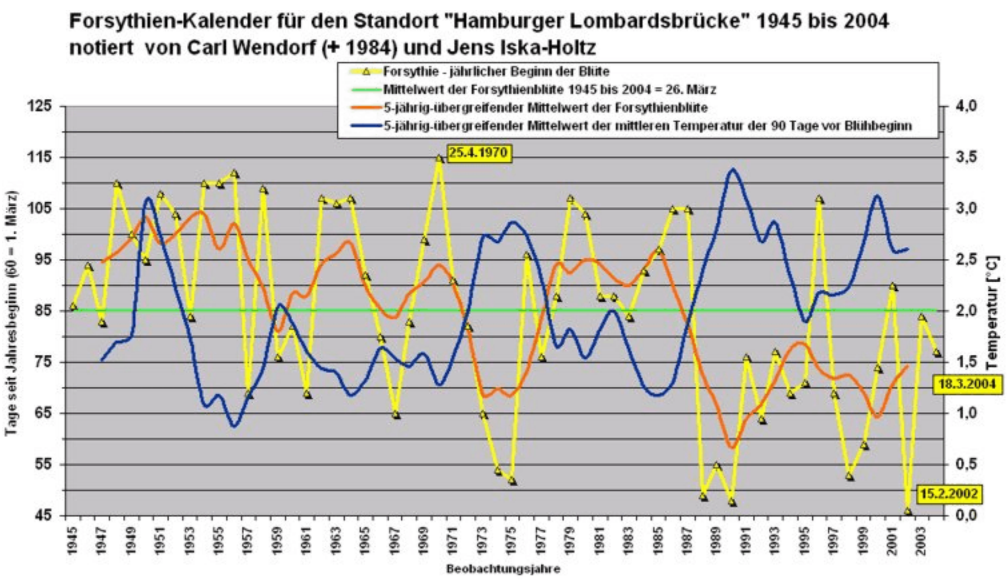


c) *Gesucht sind zur Beantwortung der Frage die Schnittpunkte der Geraden e mit der Kostenfunktion f bzw. die Nullstellen der Differenzfunktion e − f. Die Ermittlung erfolgt näherungsweise, im Idealfall nach den Vorstellungen der Lernenden.*
Es ergeben sich etwa die Lösungen $x_1 = 3.3$ und $x_2 = 8{,}05$.
Werden Stückzahlen von 3.300 bis 8.050 produziert, bleibt der Betrieb in der Gewinnzone.
Maximaler Gewinn wird näherungsweise bei $x_E = 6{,}16$ erzielt, also bei einer Stückzahl von 6.160. Die Höhe des Gewinns liegt etwa bei 3.000 € *(nicht gefragt).*
Um die Rechnungen einfach zu halten, ist als Erlösfunktion eine Gerade gewählt worden. Es kann diskutiert werden, warum eine Gerade zumeist kein gutes Modell dafür ist.

Aufgabe 12

Stellen Sie Überlegungen an, welcher Art der funktionale Zusammenhang nebenstehender Abbildung sein könnte:

- Worauf basiert die Graphik vermutlich?
- Gibt es jeweils einen Funktionsterm für die vier Graphen?



In welchen Kontexten tauchen ähnliche Graphiken auf?

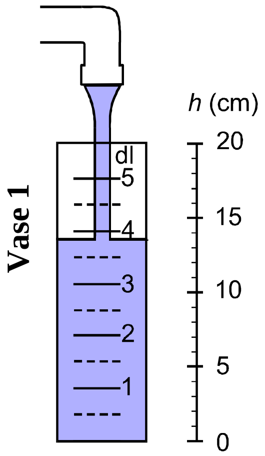
Lösungsvorschläge:

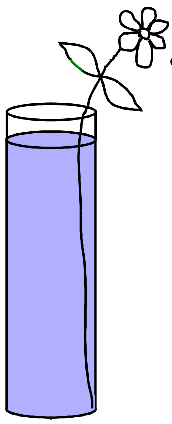
Es handelt sich um diskrete Daten, die durch Beobachtungen gewonnen wurden und für die kein Funktionsterm existiert (Beginn der Blüte). Die Datenpunkte sind offenbar zur besseren Beurteilung der Graphik mit Streckenzügen verbunden. Der mittlere Blütenbeginn (1945 - 2004) ist als Gerade parallel zur Jahresachse eingezeichnet.

Ähnliche Graphen tauchen z.B. bei Aktien auf (Aktiencharts).

Aufgabe 13

Die folgenden Fragen betreffen fünf verschiedene Glasvasen, die jeweils 20 cm hoch sind und maximal 5,6 dl (= 560 ml) Wasser fassen können.

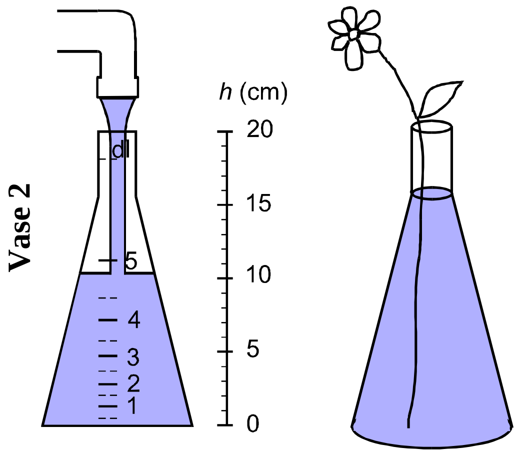


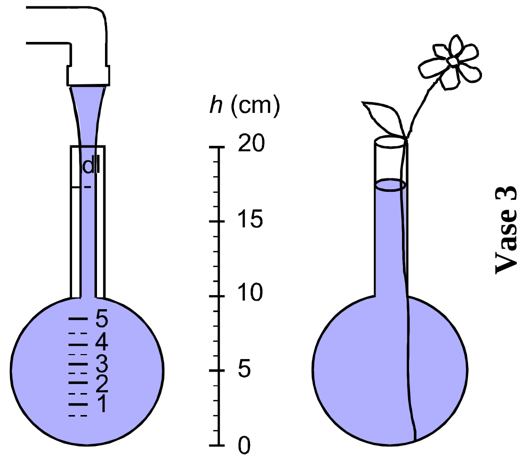


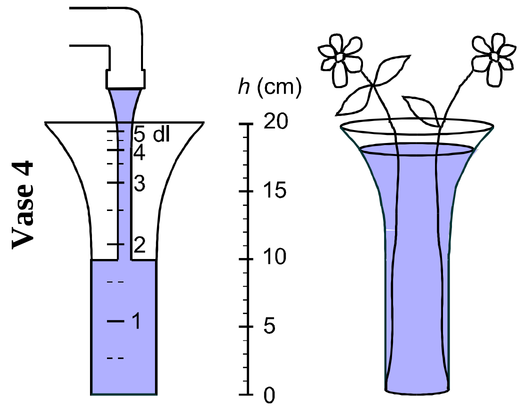
a) Eine zylinderförmige Vase wird mit Wasser gefüllt, so wie in der Abbildung gezeigt. Die Höhe h (in cm) des Wassers, vom Boden der Vase aus gemessen, ist eine Funktion des Volumens x (in dl) des Wassers, das in die Vase geflossen ist.

Überlegen Sie, wie sich die Höhe des Wassers bei einer kleinen Zunahme des Volumens verhält. Notieren Sie Ihre Überlegungen.

b) Die unten stehenden Abbildungen zeigen, wie in drei weitere Vasen Wasser eingefüllt wird.



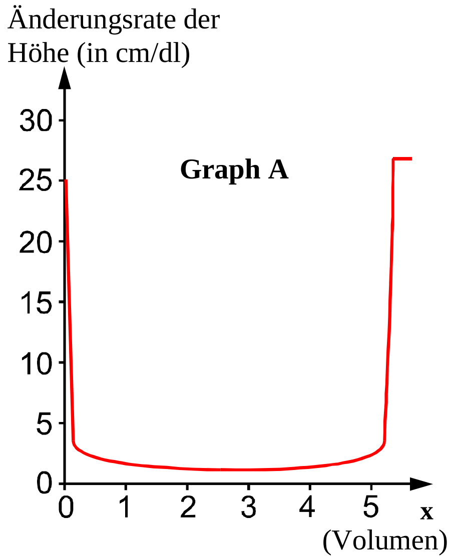


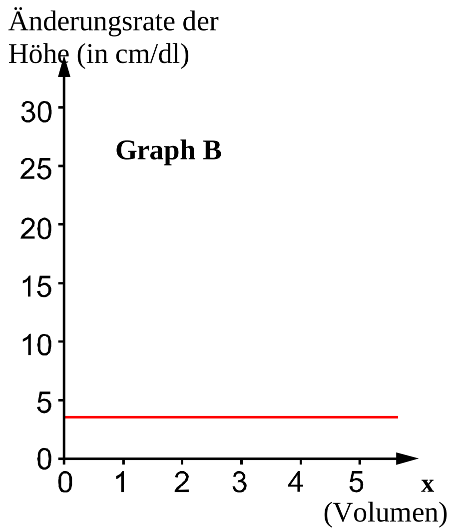


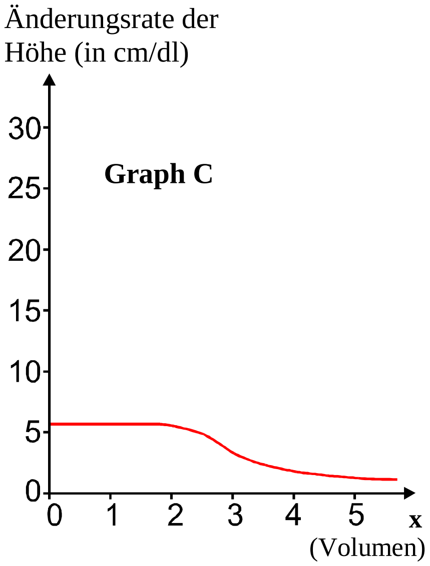
Wieder ist die Höhe h (in cm) des Wassers, vom Boden der Vase aus gemessen, eine Funktion des Volumens x (in dl) des Wassers, das in die Vase geflossen ist.

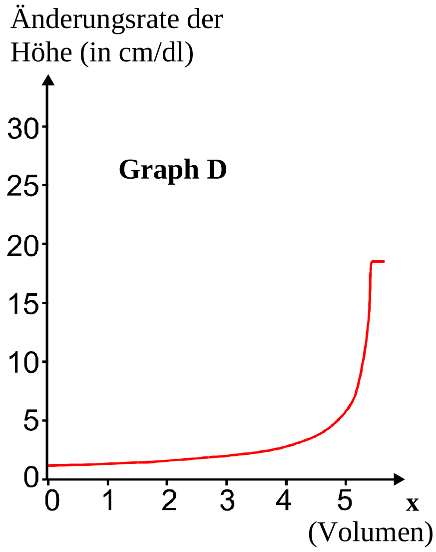
Die Graphen A, B, C und D auf dieser und der folgenden Seite zeigen jeweils die (lokale) Änderungsrate der Höhe in Abhängigkeit vom Volumen. Sie gehören jeweils zu einer der Vasen 1, 2, 3 und 4.

Geben Sie an, welcher Graph zu welcher Vase gehört, und begründen Sie ihre Wahl.



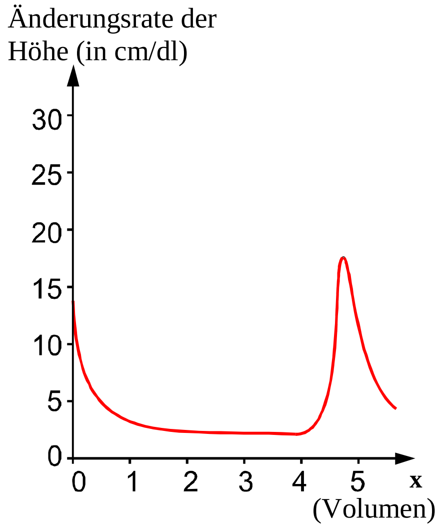






c) Wie könnte die Vase zu nebenstehendem Graphen aussehen?

Zeichnen Sie eine Skizze der Vase und begründen Sie die Form der Vase.

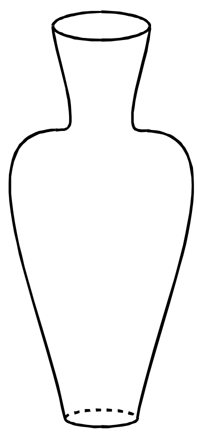


Lösungsvorschläge:

Obwohl die Art Aufgabenstellung für die Schülerinnen und Schüler neu und ungewohnt sein dürfte, sollte man Ihnen eigene Lösungsversuche ermöglichen.

a) *Vermutlich erkennen einige der Lernenden, dass die Änderungsrate konstant ist, da der Zufluss linear ist. Den zugehörigen Wert erhält man z.B. näherungsweise durch Ablesen:*
h = 7 cm entspricht V = 2 dl, h = 9 cm entspricht V = 2,5 dl. Daher ist die Änderungsrate der Höhe in Abhängigkeit vom Volumen etwa 4 cm/dl.
Die Probe ($5{,}6 \cdot 4 > 20$) zeigt: schlecht gemessen. Spätestens hier kommt auch die Idee, den Wert direkt auszurechnen: 20 cm /5,6 dl ≈ 3,6 cm/dl.

b) 1|B, 2|D, 3|A, 4|C.
Es bietet sich hier auch an, die in der Aufgabe erwähnte Funktion h(x) in den jeweiligen Graphen einzuzeichnen (andere Maßeinheit für y-Achse) und die beiden Graphen zu vergleichen.



c) Die Vase könnte etwa so aussehen, da sich die Zunahme der Höhe beim gleichmäßigen Einfüllen deutlich verlangsamt, da mit wachsender Höhe der Durchmesser wächst. Dieser verjüngt sich oben schnell, um im Ausguss der Vase wieder zuzunehmen.

Abschließende Aufgabe

Sie haben Funktionsklassen aus der Mittelstufe an Beispielen wiederholt und neue Funktionsklassen kennen gelernt.

a) Versuchen Sie, eine Übersicht aller bisher behandelten Funktionsklassen zu erstellen, in der charakteristische Eigenschaften vermerkt sind, Gemeinsamkeiten und Unterschiede, aber auch, in welchen realitätsbezogenen Anwendungen diese Funktionsklasse nach Ihrer Einschätzung vorkommen könnte.

b) Beim Modellieren mit einer Funktion muss man diese manchmal verschieben (in x- oder y-Richtung) oder auch stauchen oder strecken.
Notieren Sie, wie dabei jeweils der Funktionsterm zu ändern ist.

Diese Aufgabe eignet sich besonders als Portfolio-Auftrag (oder auch als Auftrag für ein Lerntagebuch), der am Beginn des Themenbereiches gestellt wird und bis zum Abschluss des Themenbereiches bearbeitet wird. Entwürfe, die zwischenzeitlich entstehen, gehören zum Portfolio. Positiv wäre z.B. zu werten, wenn ein Lernender über die Realitätsbezüge der Beispiele hinaus weitere und/oder allgemeinere angeben könnte.

Eine Lösung für b) könnte z.B. so aussehen:

verschieben + (plus)		**stauchen / strecken** · (mal)	
a+f(x)	in y-Richtung a > 0: nach oben a < 0: nach unten	**a · f(x)**	in y-Richtung |a| > 1: strecken |a| < 1: stauchen *a < 0: zusätzlich spiegeln an der x-Achse*
f(a+x)	in x-Richtung a > 0: nach links a < 0: nach rechts	**f(a · x)**	in x-Richtung |a| > 1: stauchen |a| < 1: strecken *a < 0: zusätzlich spiegeln an der y-Achse*

Literatur

Quellen, Material:

Aufgabe 1: [2], S. 11ff, *Richtlinie 97/2/EG:* http://europa.eu.int/comm/food/fs/aw/aw_legislation/calves/97-2-ec_de.pdf

Aufgabe 2: *EStG:* http://bundesrecht.juris.de/bundesrecht/estg/__32a.html

Aufgabe 3: ROSS BRODIE / STEPHEN SWIFT · QMaths 11b, S. 426
Moreton Bay Publishing, Melburn 1999

Aufgabe 6: HANS-WOLFGANG HENN · Realitätsnaher Mathematikunterricht mit DERIVE
Dümmler, Bonn 1997, S. 29ff · *leider vergriffen*

Aufgabe 8: WERNER SCHMIDT · Mathematik Aufgaben 7−10 · Klett, Stuttgart 1989, S. 62
leider vergriffen und KLETT-MAGAZIN Mathematik/Physik Nr. 12, III/2003, S.10 ff.
Hier wird über eine Rekursionsformel der Weg Fechners zum Weber-Fechnerschen Gesetz gezeigt. Dies könnte in V4 (Iteration) aufgegriffen werden.

Aufgabe 9: EPA Mathematik

Aufgabe 12: Quelle der Grafik und inhaltliche Informationen über die „Phänologie“ auf den Internetseiten des Deutschen Wetterdienstes:
http://www.dwd.de/de/FundE/Klima/KLIS/daten/nkdz/fachdatenbank/datenkollektive/phaenologie/index.htm

Aufgabe 13: National Test in Mathematics Course C, Spring 2002 · Schweden, Aufgabe 15
http://www.umu.se/edmeas/np/np-prov/C-eng-vt02.pdf

Bücher:

[1] WILFRIED HERGET / THOMAS JAHNKE /WOLFGANG KROLL · Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I · Cornelsen, Berlin 2001
z.B. Funktionen und Graphen, S. 91 ff

[2] WILFRIED HERGET / DIETMAR SCHOLZ · Die etwas andere Aufgabe – aus der Zeitung
Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze 1998

[3] THOMAS JAHNKE / HANS WUTTKE · Mathematik, 11. Schuljahr · Cornelsen, Berlin 2000
Dieses Buch bietet viele Anregungen auch zum Thema Funktionen

[4] DIETER VOLK · Hantieren mit Funktionen
in: Schriftenreihe der ISTRON -Gruppe, Band 4, S. 130ff · Franzbecker, Hildesheim 1997

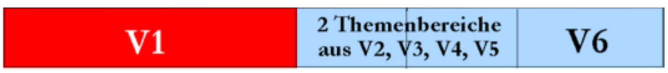
Internet-Adresse:

[5] www.mathe-online.at
mathe online
Hier wird eine Fülle von Informations- und Übungsmaterial geboten, mit dem Schülerinnen und Schüler selbstständig arbeiten können.

www.geonext.de
GEONExT
Freie Geometriesoftware, die auch erstaunlich viel Algebra kann. Das Java-Programm läuft neben Windows auf etlichen anderen Plattformen.

Autoren: Winfried Euba · Jens Weitendorf
Lizenzgeber für das verwendete Foto und die Clipart-Bilder: Corel® (WordPerfect® Office)

Zeitvorschlag: 40 Stunden (von 90)



Zugehörige Dateien zum Download:

- Aufgaben *V1-Aufgaben.doc · V1-Aufgaben.pdf · V1-Aufgaben.wpd*
- Lösungsvorschläge (komplett als ZIP-Datei):

1	Lösung *(V1-01.dfw)*	**Derive**
2	Teillösung: Term und Graph für Einkommensteuer und durchschnittliche Steuer, dazu Bauteile der durchschnittlichen Steuer (rationale Funktionen) *(V1-02.dfw)*; Arbeitsblatt *(V1-02A.xls)*, Lösung *(V1-02.xls)* Arbeitsblatt *(V1-02A.qpw)*, Lösung *(V1-02.qpw)*	 **Derive** **Excel** **Quattro Pro**
3	Lösung a) und b1) *(V1-03.dfw)* Lösung a) und b1) *(V1-03.xls)*	**Derive** **Excel**
4	Arbeitsblatt mit den Daten *(V1-04A.xls)* und Lösung a) und b) *(V1-04.xls)* Arbeitsblatt mit den Daten *(V1-04A.qpw)* und Lösung a) und b) *(V1-04.qpw)*	**Excel** **Quattro Pro**
5	Lösung *(V1-05.dfw)* Lösungsvorschläge 5a4) mit zwei verschiedenen Modellen *(V1-05a.xls)* Lösungsvorschläge 5a4) mit zwei verschiedenen Modellen *(V1-05a.qpw)*	**Derive** **Excel** **Quattro Pro**
6	Lösung *(V1-06.dfw)* Lösung *(V1-06.xls)*	**Derive** **Excel**
8	Lösung 8 a) *(V1 –08a.dfw)* Lösung *(V1-08.xls)*	**Derive** **Excel**
9	Lösung *(V1-09.dfw)*	**Derive**
10	Lösung *(V1-10.dfw)*	**Derive**
11	Lösung *(V1-11.dfw)* Lösung 11c) *(V1-11c.xls)*	**Derive** **Excel**
	Zu allen behandelten Funktionen gibt es ein Set von Arbeitsblättern als HTML-Seiten, das Bezug nimmt auf die Aufgaben 2 – 6, 8 und 9 und damit Aufgabe 7 enthält.	**Geonext**

Hinweise zu Geonext: *Die Geonext-Dateien laufen unter folgenden Bedingungen:*
Im Geonext-Ordner ist die Datei ***geonext.jar*** *vorhanden, Ihr System verfügt über das JAVA Runtime Enviroment und im Browser ist das Ausführen von Java-Applets erlaubt.*
Das Java Runtime Enviroment erhalten Sie auf Wunsch auch direkt auf den Geonext-Seiten.

- Alle angegebenen Links sind auf der Downloadseite