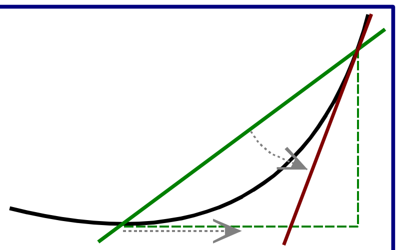
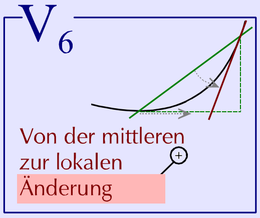
V_6



Von der mittleren
zur lokalen
Änderung

Lernheft



Kompetenzen

(1) Sie erkennen, dass es inner- und außermathematische Fragestellungen gibt, für die nicht nur die Funktionswerte sondern auch deren Änderungen eine Bedeutung haben, die sie als Grenzprozess erfahren:

- im geeigneten Sachkontext der Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate *(Durchschnittsgeschwindigkeit → (Momentan-) Geschwindigkeit, durchschnittlicher Steuersatz → Grenzsteuer, etc.)*
- bei innermathematischen Problemstellungen auch die Tangente als Grenzlage einer geeigneten Folge von Sekanten.

(2) Sie abstrahieren auf der Basis der Kenntnisse von (1) von einzelnen lokalen Änderungsraten bzw. Tangentensteigungen zur Ableitung als Funktion.

(3) Sie berechnen die Ableitungen ganzrationaler Funktionen mit Hilfe der Summen- und Faktorregel und lösen so elementare Optimierungsprobleme auch rechnerisch.

(4) Sie bestimmen Grenzwerte auf anschaulicher Ebene.

(5) Sie zeichnen zu einem gegebenen Funktionsgraphen den prinzipiellen Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion.

Worum geht es eigentlich?

In Aufgaben zum Themenbereich V1 haben Sie schon mehrfach Änderungsraten betrachtet und dabei haben Sie vermutlich zumeist die lokale Änderungsrate gesucht, die Sie mit Hilfe der mittleren angenähert haben.

Wichtig sind lokale Änderungsraten bei vielen Optimierungsproblemen, aber auch bei vielen anderen Fragestellungen wie z.B. Bewegungsvorgängen (wie schnell beschleunigt das Auto?) oder wirtschaftlichen Problemen (bei welcher Produktionsmenge steigen die Kosten am wenigsten, wann steigen sie stark?).

Solche Fragen werden in diesem Themenbereich zunächst wieder aufgegriffen.

Dabei sehen Sie, dass Änderungsraten geometrisch betrachtet beim Graphen der betreffenden Funktion Steigungen von Sekanten bzw. Tangenten sind.

Im zweiten Teil des Themenbereiches lernen Sie eine Berechnungsmethode für die Steigung von Tangenten kennen: die Ableitung, allerdings vorerst nur für ganzrationale Funktionen. Diese Methode ermöglicht es auch, Kriterien zur Beantwortung obiger Fragen aufzustellen und damit etwa den Punkt zu berechnen, an dem die Kostenkurve am wenigsten ansteigt – sofern es ihn gibt.

Insgesamt sollen Sie die nebenstehenden Kompetenzen erwerben.

Inhalt:

Autoren: Winfried Euba · Dr. Jens Weitendorf
Version 2.2 (Januar 2008)

I. Bewegungsvorgänge

Aufgabe 1

Applet 01

Nachfolgende Abbildung zeigt einen dreiecksförmigen Segelkurs für einen Wettbewerb. Die Punkte A und B kennzeichnen die Wendemarken, der Punkt S im Ursprung Start/Ziel.
Der Kurs wird in Pfeilrichtung befahren.
1 LE in der Zeichnung entspricht 1 km.

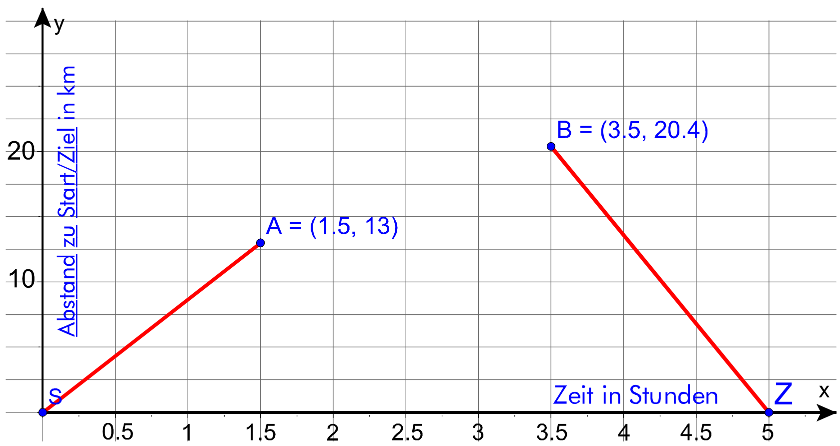
Eine teilnehmende Yacht legt die Strecke von S nach A in 1½ Stunden zurück, von A nach B in 2 Stunden und von B zurück zum Start/Ziel wieder in 1½ Stunden. Die Geschwindigkeit der Yacht sei in jedem der Abschnitte jeweils annähernd konstant.

a) Skizzieren Sie den Sachverhalt in einem Weg/Zeit-Diagramm (x-Achse: Zeit in Stunden, y-Achse: zurückgelegter Weg in km).

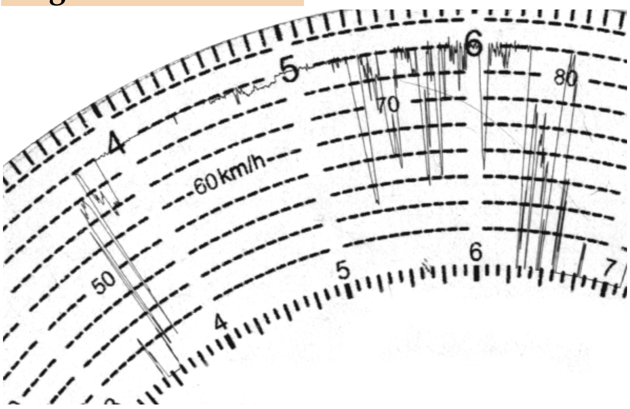
b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Yacht für jedes Teilstück.

<u>Zusatzaufgabe:</u>
Das folgende Weg/Zeit-Diagramm unterscheidet sich von einem „normalen“ hinsichtlich der y-Achse: hier wird der Abstand zum Start/Ziel aufgetragen, normalerweise der seit dem Start zurückgelegte Weg.

Beschreiben Sie für nebenstehende Abbildung, wie die Bewegung der Yacht zwischen den Wendemarken A und B dargestellt werden müsste.



Aufgabe 2



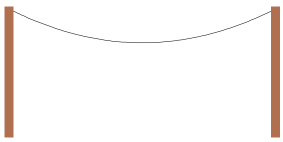
Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt einer von einem Fahrtenschreiber erzeugten Scheibe, wie sie z.B. für LKW üblich sind. Automatisch wird vom Fahrtenschreiber in Abhängigkeit von der Uhrzeit (siehe Randbeschriftung) die Geschwindigkeit des Fahrzeugs aufgezeichnet, sodass z.B. auch vorgeschriebene Ruhezeiten dokumentiert bzw. überprüft werden können.

a) Beschreiben Sie den Fahrtverlauf für den abgebildeten Ausschnitt oder erfinden Sie eine Geschichte passend zum Fahrtverlauf.

b) Welche Bedeutung hat die Beschleunigung in einem Zeit/Geschwindigkeit-Graphen?

Aufgabe 3

Applet 02

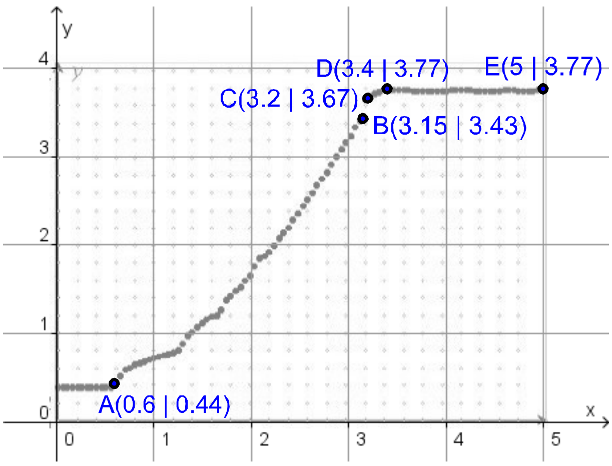


An zwei Masten, die 50m voneinander entfernt stehen, ist ein Kabel aufgehängt.

Bestimmen Sie den Winkel zwischen Mast und Kabel, wenn das Kabel in der Mitte 8m durchhängt.

Als Modell für das Kabel ist eine Parabel geeignet.
Wenn Sie das Koordinatensystem günstig legen, vereinfacht sich das Problem erheblich.

Aufgabe 4a)



Nebenstehende Abbildung gibt einen Weg/Zeit-Zusammenhang wieder, gemessen mit einem Bewegungssensor: Eine Person bewegt sich von dem Messgerät weg.

- Die Entfernung ist auf der y-Achse in Meter aufgetragen,
- die zugehörige Zeit auf der x-Achse in Sekunden.

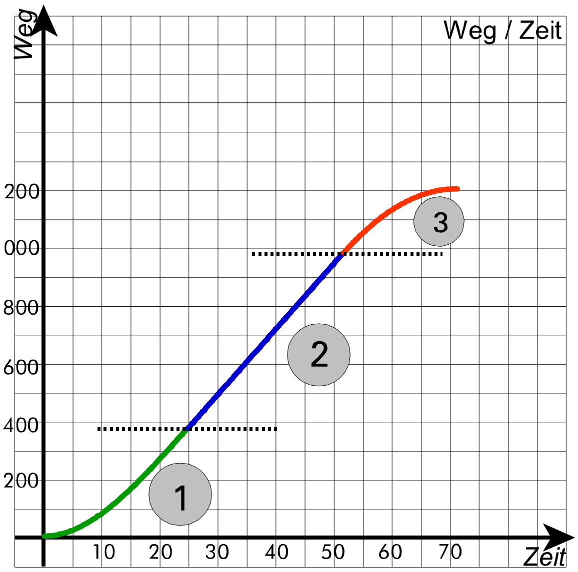
Der gesamte Vorgang dauert 5 Sekunden.

„Höchstgeschwindigkeit“?

Unterteilen Sie den Bewegungsablauf geeignet und beschreiben Sie alle Informationen, die Sie aus dem Graphen folgern können. Begründen Sie Ihre Schlussfolgerungen.

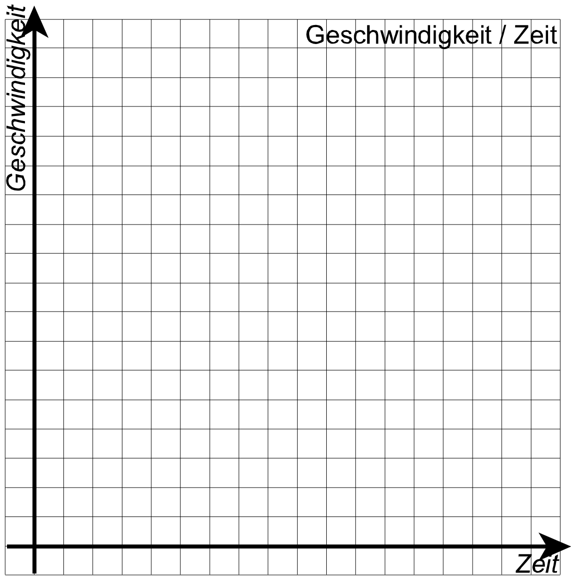
Aufgabe 4 b)

Applet 03

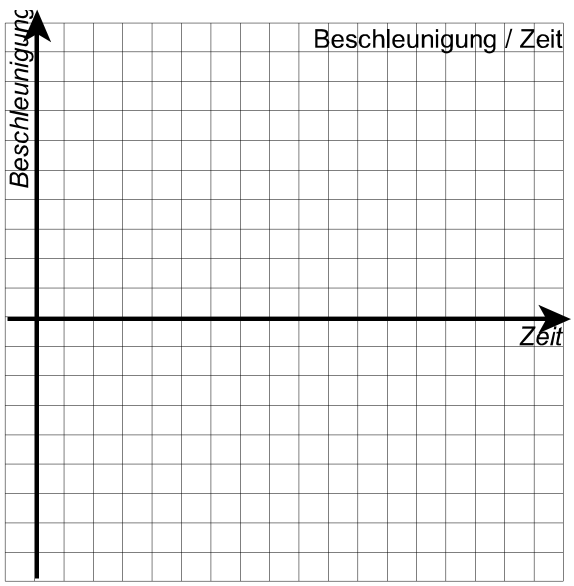


Nebenstehendes Weg-Zeit-Diagramm beschreibt die Fahrt eines U-Bahn-Zuges der Linie U1 von der Station „Richtweg“ nach „Norderstedt“.
Auf der x-Achse ist die Zeit in Sekunden angegeben, auf der y-Achse der zurückgelegte Weg in Meter.

- Ziehen Sie wie oben so viele Schlussfolgerungen wie möglich aus dem Verlauf des Graphen (in den Teilbereichen ①, ② und ③).



- Skizzieren Sie im nebenan abgebildeten Koordinatensystem die zum obigen Bewegungsvorgang gehörende Geschwindigkeit. Skalieren Sie die y-Achse (Weg/Zeit) geeignet. Die x-Achse bleibt so wie im 1. Diagramm.



- Skizzieren Sie im rechts abgebildeten Koordinatensystem die zur obigen U-Bahn-Fahrt gehörige Beschleunigung. Beschriften Sie die y-Achse (Weg/Zeit^2) geeignet.

Zusammenfassung

Applet 04

In den vorangegangenen Aufgaben haben Sie sich mit Änderungsraten beschäftigt.

1. Manchmal kann man lokale Änderung sehen, oft aber ist eine Berechnung wünschenswert: die momentane (lokale) Änderungsrate kann als Grenzlage von bestimmten Sekantensteigungen berechnet werden.

   lokale Änderungsrate ←→ Steigung der Tangente

2. Bei einigen Aufgaben zeigte sich, dass lokale Änderungsraten nur ermittelt werden können, wenn der zur Funktion gehörende Graph weder einen Sprung noch einen Knick aufweist.

   Gelegentlich haben Sie nach maximalen (oder minimalen) Werten gesucht. An diesen Stellen ist die Steigung der Tangente 0.

Erläutern Sie die Punkte 1. und 2. an konkreten Beispielen.
Verwenden Sie dazu vorangegangene Aufgaben oder überlegen Sie sich eigene Beispiele.

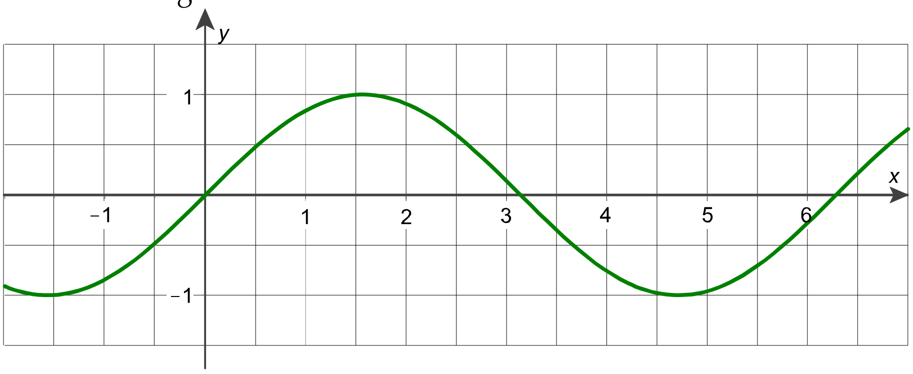
II. Ableitungsfunktion

Aufgabe 5

Applet 05

Die Ableitungsfunktion gibt für jedes x aus ihrem Definitionsbereich die Steigung der Tangente bzw. die lokale Änderungsrate an dieser Stelle an.

a) Zeichnen Sie in unten stehende Abbildung den Graphen der Ableitungsfunktion zu f.



b) Wie lautet die Ableitungsfunktion zu f mit $f(x) = b \cdot x$ ($b \in \mathbb{R}$ sei beliebige Konstante)?

Differenzenquotient
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

c) Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion zu
- g_1 mit $g_1(x) = x^2$
- g_2 mit $g_2(x) = 5x^2$.

Überlegen Sie, was aus dem Differenzenquotienten wird, wenn h gegen 0 geht.

$$\frac{(x+0{,}001)^3 - x^3}{0{,}001}$$

Seite 06

d) Stellen Sie eine Vermutung über die Ableitungsfunktion zu k mit $k(x) = x^3$ auf. Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle für den Differenzenquotienten mit kleinem h (z.B. $h = 0{,}001$).

Ableitungsfunktion · Ableitung

Sie haben zu einer gegebenen einfachen Funktion f die Funktion der Steigungen von f hergestellt.
Diese Funktion heißt **Ableitungsfunktion von f** und wird mit **f′** bezeichnet,
der zugehörige Term heißt **Ableitung von f** und wird mit **f′(x)** bezeichnet.

Eine Funktion f heißt **differenzierbar**, wenn die Berechnung der Ableitung möglich ist.
Ganzrationale Funktionen sind differenzierbar, wie aus nachfolgender Aufgabe folgt.

Aufgabe 6

a) Leiten Sie die Ableitung von $f(x) = x^n$ (für $n \in \mathbb{N}$) her und tragen Sie das Ergebnis in unten stehende Tabelle ein.
Diese Regel heißt **Potenzregel**.

Notieren Sie auch die Ableitung von $a \cdot f(x)$ (a konstant). Diese Regel heißt auch **Faktorregel**.

Potenzregel
$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) =$

Faktorregel
$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$

b) Polynome bestehen aus den Bauteilen $a \cdot x^n$, aus denen eine Summe gebildet wird. Beispiel:

$$p(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - x + 3.$$

Zeigen Sie wieder über den Differenzenquotienten, dass $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ gilt, also die Summanden einzeln abgeleitet und dann addiert werden.
Diese Regel heißt **Summenregel**.

Summenregel
Ableitung einer Summe = Summe der Ableitungen der Summanden:
$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

c) Berechnen Sie die Ableitung $p'(x)$ zu obigem Polynom $p(x)$.
Welche Regeln verwenden Sie?

Anwendung

Ableitungsregeln

Potenzregel	$f(x) = x^n$ *($n \in \mathbb{N}$)*	$f'(x) =$
Faktorregel	$g(x) = a \cdot f(x)$ *($a \in \mathbb{R}$, f differenzierbar)*	$(a \cdot f(x))' =$
Summenregel	$h(x) = f(x) + g(x)$ *(f und g differenzierbar)*	$h'(x) = (f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ *Ableitung einer Summe ist Summe der Ableitungen der einzelnen Summanden*

Aufgabe 7
Applet 07
2. Ableitung von f

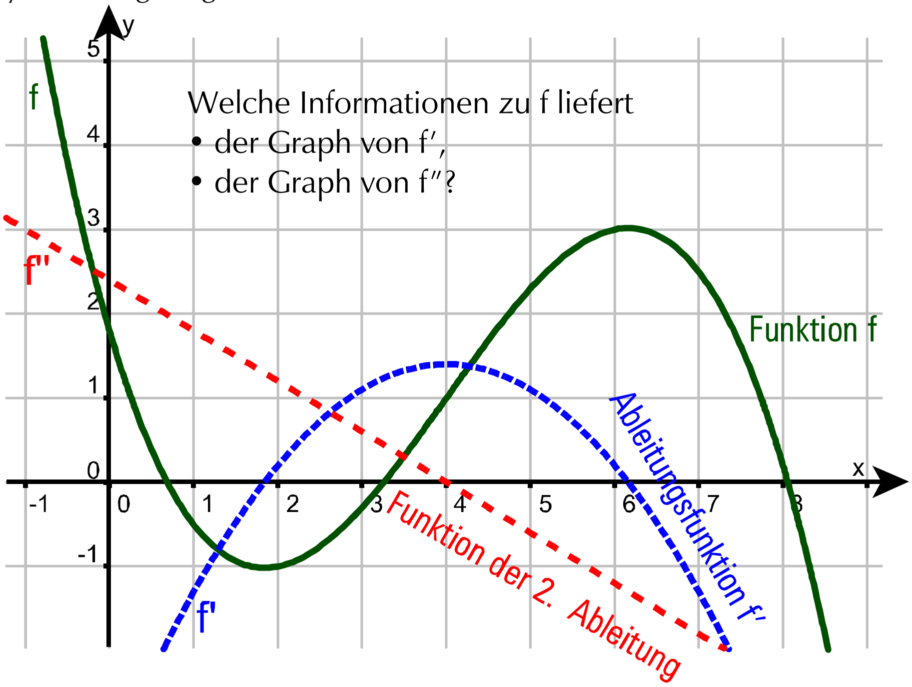
Berechnet man von der Ableitung einer Funktion f, also von f′(x), die Ableitung, so nennt man diese Funktion **zweite Ableitung von f** und bezeichnet sie mit **f″(x)**.

f′(x) =

f″(x) =

Berechnen Sie zu $f(x) = -0{,}1\,x^3 + 1{,}2\,x^2 - 3{,}4\,x + 1{,}8$ die erste und zweite Ableitung.
Die Graphen zu f, f′ und f″ sind in das nachfolgende Koordinatensystem eingetragen:

Zusammenhang der Ableitungen



Ergänzungen in Applet 08

Aufgabe 8

In der Projektaufgabe 1 von V1 haben Sie aus vorhandenen Daten die Kostenfunktion K hergeleitet. Es ergab sich:

$$K(x) = 0{,}1\,x^3 - 1{,}2\,x^2 + 5{,}4\,x + 3{,}2$$
(x ist Stückzahl in ME, K(x) in GE).

Aus der gegebenen Erlösfunktion E mit $E(x) = -0{,}5x^2 + 7x$ sollten Sie die Gewinnfunktion G durch $G(x) = E(x) - K(x)$ ermitteln und schließlich näherungsweise den maximalen Gewinn.

a) Ermitteln Sie jetzt, bei welcher Stückzahl der Gewinn maximal ist. Berechnen Sie den maximalen Gewinn und welchen Preis das Unternehmen dann erzielt.
Zeichnen Sie dazu die Graphen zu G, G′ und G″ gemeinsam in ein geeignetes Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie jetzt den Punkt, an dem die Kostensteigerung am geringsten ist, und berechnen Sie die Kostensteigerung.

c) Auch in der Aufgabe 9 von V1 (S. 11) ging es um ein einfaches wirtschaftliches Modell: so wurde die Produktionsmenge gesucht, bei welcher der Gewinn maximal wird.

- Begründen Sie, warum zur Lösung dieser Aufgabe keine Ableitung notwendig ist.
- Lösen Sie die Aufgabe mit der Differenzialrechnung.

Für die Gewinnfunktion G gilt: $G(x) = -0{,}05x^2 + 39x - 4000$

d) In Aufgabe 6 von V1 (S. 8) wurde ein Minimum einer Zylinder-Oberfläche O einer 850 ml Dose gesucht, das näherungsweise bestimmt wurde. Es galt

$$O(x) = 2\pi\, x^2 + 1700 \cdot \frac{1}{x} \quad (x = \textit{Radius der Dose}).$$

Differenzenquotient: $\frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right)$

- Begründen Sie, dass die Ableitung $O'(x)$ mit den bisherigen Regeln bestimmt werden könnte, wenn die Ableitung von $f_2(x) = \frac{1}{x}$ bekannt wäre.
- Bestimmen Sie $f_2{}'(x)$.

Aufgabe 9

Die Firma Borghaus KG vertreibt unter anderem ein Reinigungssystem für Möbel, Polster, Türen und Fenster, das sie in einer Kombinationspackung für 16 € verkauft. Der monatliche Absatz beträgt 8000 Stück.
Eine Marktuntersuchung hat nun zum Ergebnis, dass eine Preisänderung pro 1 € zu einer entsprechenden Absatzänderung von jeweils 800 Stück führt.
Das bedeutet z.B., dass eine Preiserhöhung von 2 € zu einer Verminderung des Absatzes um $2 \cdot 800 = 1.600$ Stück führt, eine Preissenkung von 1,50 € zu einer Erhöhung des Absatzes um $1{,}5 \cdot 800 = 1.200$ Stück.

a) Bei welcher Preisänderung erzielt die Firma den größten Umsatz?

Umsatz = Erlös = Stückzahl · Verkaufspreis

b) Bei welcher Preisänderung ergibt sich der maximale Gewinn, wenn die direkten Kosten pro Packung 6 € und die Fixkosten 40.000 € pro Monat betragen?

Gewinn = Erlös – Kosten

III. Übersicht

Ü1 Mit der Differentialrechnung (Ableitung) können die x-Koordinaten bestimmter wichtiger Punkte einer Funktion berechnet werden: **Extremwerte** und **Wendepunkte**.

Vervollständigen Sie die beiden Übersichten.

Extremwert bei x_E (für eine Funktion f)

- Was muss gelten, damit es einen Extremwert (an der Stelle x_E) überhaupt geben kann?

- Aus welchen Eigenschaften der Funktion f folgt, dass bei x_E ein Maximum / Minimum vorliegt, und wie berechnet sich dann die zugehörige y-Koordinate y_E ?

- Was könnte man tun, wenn die 1. Bedingung erfüllt ist, die 2. aber nicht?
  Geben Sie mindestens ein Beispiel an.

- Welche Eigenschaften hat ein Punkt $E(x_E|y_E)$ des Graphen von f, der Maximum / Minimum genannt wird?

Wendepunkt bei x_W (für eine Funktion f)

- Was muss gelten, damit es einen Wendepunkt (an der Stelle x_w) überhaupt geben kann?

- Aus welchen Eigenschaften der Funktion f folgt, dass bei x_W ein Wendepunkt vorliegt, und wie berechnet sich dann die zugehörige y-Koordinate y_W ?

- Was könnte man tun, wenn die 1. Bedingung erfüllt ist, die 2. aber nicht? Geben Sie mindestens ein Beispiel an.

- Welche Eigenschaften hat ein Punkt $W(x_W|y_W)$ des Graphen von f, der Wendepunkt genannt wird?

Ü2 Wozu kann man Ableitungen eigentlich einsetzen?
Es folgen Beispiele aus verschiedenen Sachkontexten.
Vervollständigen Sie nachfolgende Tabelle.
In die letzte Zeile können Sie ein selbst gewähltes Beispiel eintragen.

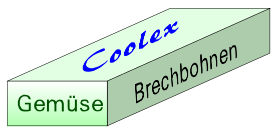
Bedeutet f(x)	**dann bedeutet f′(x)**
	die **Geschwindigkeit** zum Zeitpunkt x.
die **Geschwindigkeit** zum Zeitpunkt x,	
die **Einkommensteuer** bei zu versteuerndem Einkommen x,	
die **Kosten** (Gesamtkosten) bei einer Produktion von x Mengeneinheiten,	
die vom Anfangspunkt bis zur Wegstelle x verrichtete **Arbeit**,	
	der **Umfang** des Kreises mit dem Radius x.
das **Volumen** der Kugel vom Radius x,	

Ü3 Erläutern Sie die Bedeutung des Wortteils „rate“ in Änderungsrate:

IV. Anwendungsaufgaben

Aufgabe 10

Das Unternehmen „Coolex“ hat sich auf die Herstellung von Tiefkühlkost spezialisiert. Bei der Einführung eines neuen Produktes nimmt der Absatz zunächst langsam, dann schneller, dann wieder langsamer zu, und schließlich sinkt er.



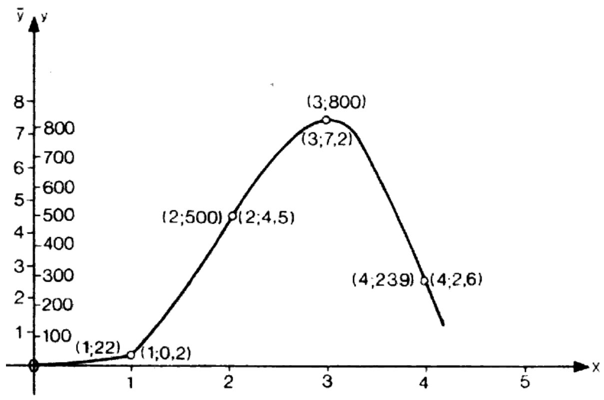
Man hat durch jahrelange Beobachtung gefunden, dass sich die Absatzkurve von gefrorenen Spezialitäten eines fremden Landes für die ersten Jahre in Form einer mathematischen Funktion (in Abhängigkeit von der Zeit) beschreiben lässt. Man geht dabei von folgenden Daten aus:

Nach zwei Jahren erreicht ein solches Produkt im Durchschnitt einen Absatz von 500 Stück pro Tag, nach drei Jahren seinen größten Absatz von 800 Stück pro Tag.

a) Berechnen Sie die zugehörige Funktion, und skizzieren Sie deren Verlauf!

b) Der Aufgabenteil a) stammt aus einem Buch. Dort ist nebenstehender Funktionsgraph abgebildet.

Vergleichen Sie ihn mit Ihrem Graphen. Überlegen Sie, wo Ihr Modell aus Teilaufgabe a) gültig ist bzw. sein könnte und wo nicht.



Aufgabe 11

Ein Unternehmen benötigt von einem Produkt 10 000 Stück pro Jahr, der Preis beträgt 10 € pro Stück.
Je Bestellung (mit jeweils gleicher Stückzahl) und Einlagerung treten einmalige Kosten in Höhe von 60 € auf.
Die Kosten der Lagerung betragen für das eingelagerte Produkt 12% des am Lager gebundenen Kapitals pro Jahr.

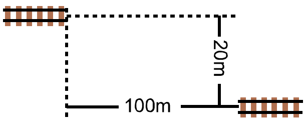
Wie viele Stück soll das Unternehmen jeweils bestellen, um die Kosten möglichst gering zu halten?

Hinweis: $(x^{-1})' = -x^{-2}$

Kosten =
durchschn. Lagerbestand · Stückpreis ·Zinssatz/100
+ Bestellkosten · Anzahl der Bestellungen
+ Verbrauch · Stückpreis

dabei ist durchschnittlicher Lagerbestand = ½ · Stückzahl je Bestellung

Aufgabe 12



Durch die Anlage einer neuen Hochgeschwindigkeitsstrecke müssen zwei im betrachteten Bereich parallel verlaufende eingleisige Strecken geeignet miteinander verbunden werden.

Entwerfen Sie eine Lösung, indem Sie die gesuchte Verbindung als Teil des Graphen einer gesuchten Funktion sehen.

Aufgabe 13

Applet 09

Der Erlös ergibt sich aus Preis mal abgesetzte Menge:
$E(x) = p \cdot x$.

Gewinn macht die Firma nur, wenn die Kosten geringer sind als die Einnahmen:
$G(x) = E(x) - K(x)$.

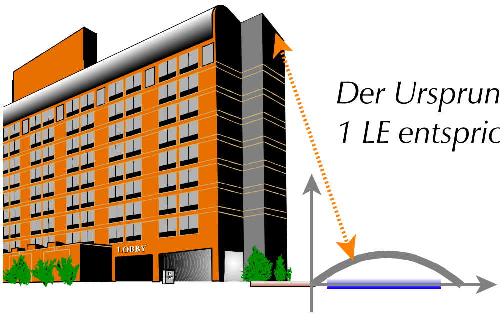
Gegeben ist eine Kostenfunktion K durch folgende Gleichung

$$K(x) = 0{,}03\,x^3 - 1{,}2\,x^2 + 142\,x + 8000$$

Dabei ist x die produzierte Menge in ME, K(x) sind die Kosten in GE.

Der Preis sei unabhängig von der abgesetzten Menge, also konstant. Ermitteln Sie unter dieser Voraussetzung den minimalen Preis, bei dem verlustfrei produziert werden kann.

Aufgabe 14



Der Bogen der abgebildeten Brücke wird beschrieben durch den Graphen der Funktion b mit

$$b(x) = \frac{-x^2 + 6x}{18}\,.$$

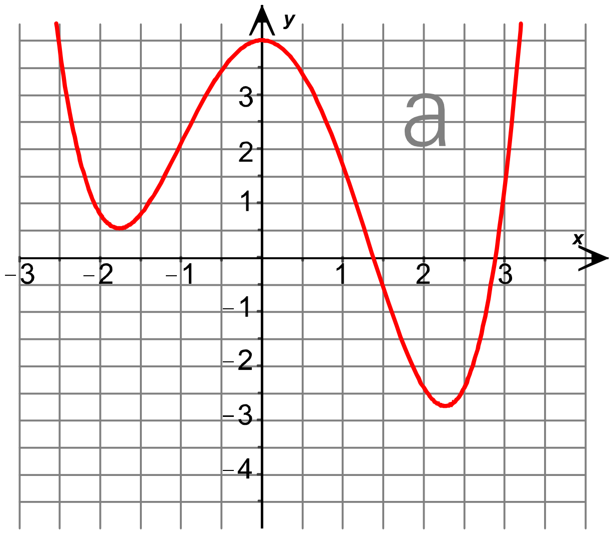
Der Ursprung des Koordinatensystems ist eingezeichnet, 1 LE entspricht dabei 1 m.

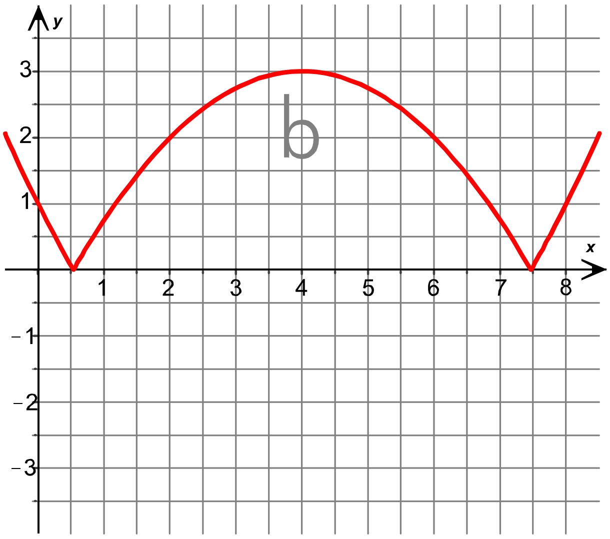
a) Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Geraden durch den Punkt $(2\,|\,b(2))$, die senkrecht auf dem Bogen steht.
Eine solche Gerade wird “Normale“ genannt.

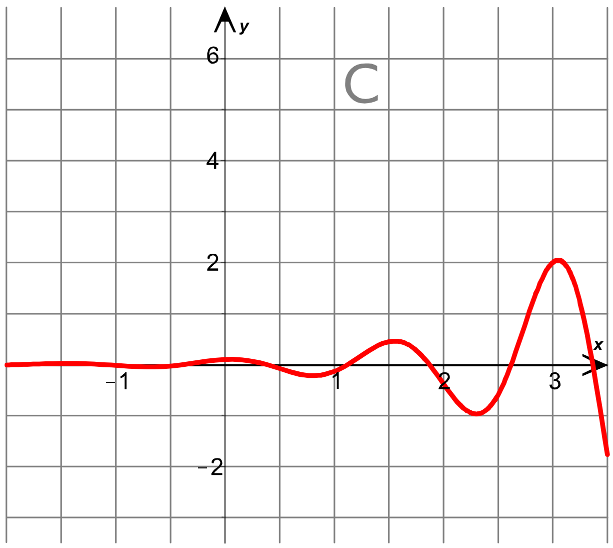
b) Die Normale beschreibt einen Lichtstrahl, der von der Brücke zur Oberkante eines Gebäudes verläuft und dort zurückreflektiert wird. Die Gebäudekante ist 2 m von der Brücke entfernt. Ermitteln Sie aus diesem Wissen die Höhe des Gebäudes.

Aufgabe 15

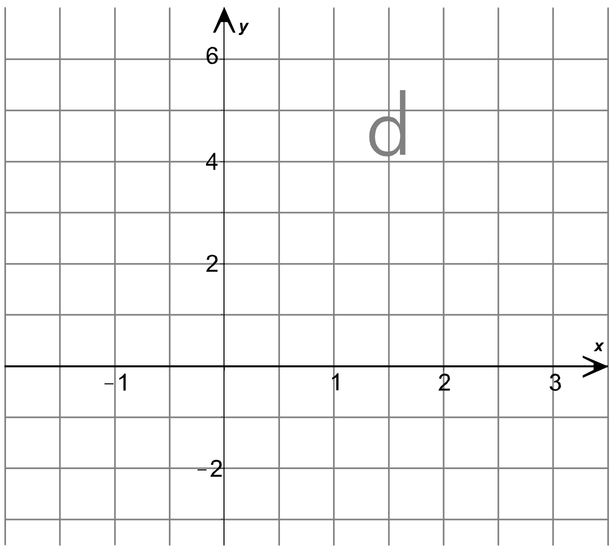
- Zeichnen Sie in die Koordinatensysteme a, b und c jeweils den Graphen der Ableitungsfunktion ein und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.
  Eine der drei Funktionen ist nicht in jedem Punkt differenzierbar.
  Um welche Funktion handelt es sich und warum gilt die Einschränkung?







- Zeichnen Sie in das Koordinatensystem d den Graphen einer Funktion ein, die ebenfalls nicht überall differenzierbar ist. Der Grund dafür muss sich aber von dem oben gegebenen unterscheiden. Geben Sie an, warum diese Funktion nicht differenzierbar ist.



Aufgabe 16

Applet 10

In dieser Aufgabe geht darum, Verständnis für den Begriff *Grenzkosten* zu entwickeln.

Eine Firma baut komplexe Industrie-Motoren. Bei einer Produktion von x Motoren in einer Zeiteinheit ergeben sich Gesamtkosten von

$$K \text{ mit } K(x) = 0{,}02\,x^3 - 18\,x^2 + 6000\,x + 500000 \text{ (in €)}.$$

Mit *Grenzkosten* bezeichnet man die Kostenzunahme bei geringfügiger Produktionserhöhung, z.B. entstehen bei einer Produktion von 100 Motoren für die Produktion eines zusätzlichen Motors weitere Kosten von 3000 €.

Die Berechnung über die Ableitung ist also ein Modell für diesen Sachverhalt, die sich ergebenden Werte weichen (zumeist leicht) von den tatsächlichen ab.

- Testen Sie den Umfang der Abweichung mit einer Wertetabelle.
- Bestimmen Sie, bei welchen Produktionsmengen sich eine Produktionssteigerung lohnt und bei welchen nicht.

Man berechnet die Grenzkosten normalerweise mithilfe der Ableitung (Änderungsrate!) , also für obiges Beispiel

$$K'(100) = 3000.$$

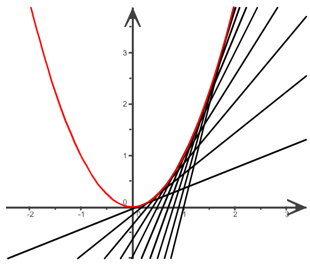
Die tatsächliche Kostenerhöhung wird berechnet mit

$$K(z+1) - K(z).$$

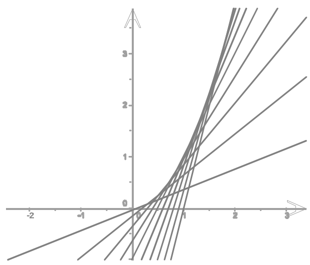
Ein analoger Begriff ist Grenzsteuer

Aufgabe 17

Zeichnen Sie mit einem CAS den Graphen der Normalparabel f mit $f(x) = x^2$ und zeichnen Sie z.B. im Intervall $[-2,2]$ möglichst viele Tangenten an f.
Für das Intervall]0,2] siehe Abbildung rechts.



In der 2. Abbildung rechts wurde der Graph von f weggelassen, dennoch könnte er über die Tangenten rekonstruiert werden. Graphisch erscheint es also möglich, von Blick auf Details (Ableitung, Tangenten, lokale Änderungsrate) zurück zum Globalen zu kommen.
Dass dies in einfachen Fällen auch rechnerisch möglich ist, beweisen die folgenden Teilaufgaben:



a) f' sei bekannt mit $f'(x) = 5\,x^3$.
Ermitteln Sie f(x). Gibt es nur eine Lösung?

b) g' sei bekannt mit $g'(x) = 5\,x^3 - 2x + 8$.
Ermitteln Sie g(x).

c) h' sei bekannt mit $h'(x) = \sin x$.
Ermitteln Sie h(x).

Ableiten rückwärts, manchmal auch aufleiten.

V. Projektaufgaben

Projektaufgabe 1 · U-Bahn

In dieser Aufgabe sollen Sie die Fahrt eines U-Bahn-Zuges zwischen zwei Haltestellen modellieren. Die sich ergebende Funktion darf aus mehreren Termen zusammengesetzt sein (muss es aber natürlich nicht).

Für eine Fahrt zwischen zwei Haltestellen wird eine Funktion f gesucht, sodass der zurückgelegte Weg f(x) eine Funktion der Zeit x ist
(Weg in m, Zeit in s).

Es geht um eine Fahrtstrecke der Hamburger Hochbahn AG, nämlich die letzte Strecke der U1 von der Haltestelle „Richtweg" zur Haltestelle „Norderstedt Mitte", die ca. 1200 m lang ist. Die DT4-Züge (die neuesten Züge, die in Hamburg eingesetzt werden) dürfen dort die Höchstgeschwindigkeit von 80 km/h fahren.

Verwenden Sie für Ihre Modellierung die rechts stehenden Daten der Hamburger Züge.

- Dokumentieren und analysieren Sie Ihre Modellierung
  (z.B. Skizze des Graphen, Beschreibung der Bewegung Zuordnung der Terme auf Situationen der Zugfahrt ...)
- Haben Sie irgendwelche zusätzliche Annahmen gemacht, um Ihr Modell zu realisieren?
- Welche Fahrtzeit ergibt sich in Ihrem Modell? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Fahrplan.

DT 4 — **Technische Daten**

Motorleistung:	8 x 125 KW
Höchstgeschwindigkeit:	80 km/h
Anfahrtzeit	0 – 80 km/h in 25 s
Bremszeit	80 – 0 km/h in 20 s

Ändern Sie Ihr Modell gegebenenfalls ab.

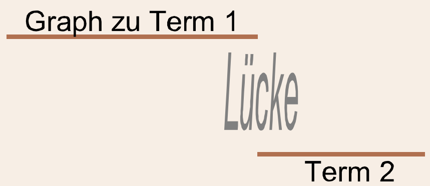
Projektaufgabe 2

Mehrfach sind Funktionen aufgetaucht, die aus verschiedenen Termen zusammengesetzt werden müssen.

- *Da ist zum Beispiel die Steuerfunktion, deren Term je nach Einkommen variiert.*
- *In Aufgabe 12 wird eine Funktion gesucht, die in einem vorgegebenen Intervall die Verbindung zweier Eisenbahnstrecken beschreibt.*
- *In Aufgabe 4 und in der Projektaufgabe 1 kommen Bewegungsabläufe vor, zu deren Beschreibung auch mehrere Terme nötig sind, die zu einer Funktion zusammengefügt werden.*

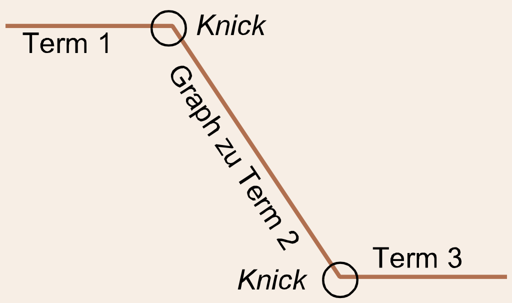
Interessant sind hierbei die Übergänge zwischen den Termen bzw. die Randbedingungen, die oft mit der Ableitung zu tun haben:

(1) Zumeist darf bei der Verbindung von benachbarten Bauteilen keine Lücke entstehen.



Beschreiben Sie diese Situation mathematisch.
Geben Sie eine reale Situation an, in der Bauteile unverbunden sind.

(2) Es darf bei der Verbindung von benachbarten Bauteilen zumeist kein „Knick“ entstehen.



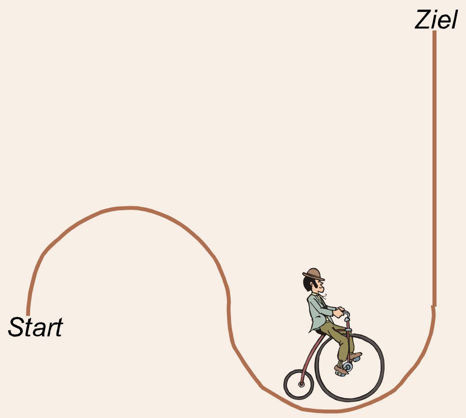
Wie soll etwa auf einer solchen Trasse ein Zug fahren? Ein Auto könnte abhängig von der Straßenbreite dort fahren, noch leichter ein Fahrrad.

Beschreiben Sie diese Situation mathematisch.

(3) ➜

Projektaufgabe 2 · Fortsetzung

(3) Die folgende Situation hat Ähnlichkeiten mit dem „Knick", ist aber am Graphen der Funktion kaum ablesbar.



Stellen Sie sich vor, die nebenstehende Figur, bestehend aus zwei Halbkreisen und eines Geradenabschnitts wird auf den Schulhof gezeichnet. Sie soll eine Länge von etwa 80 – 100 m aufweisen.

Ein Radfahrer (es darf natürlich auch ein ganz normales Rad sein) versucht, mit dem Vorderrad immer genau auf der gezeichneten Linie zu fahren.

Beschreiben Sie, wie er dabei seine Lenkstange bewegen müsste.

Bauen Sie diese Figur mit Kreis-Elementen und geraden Schienen nach, wird es an bestimmten Stellen leichter zu Entgleisungen kommen.

Geben Sie die problematischen Stellen an und versuchen Sie, die auftretenden Schwierigkeiten mathematisch zu belegen.

Das auftretende Phänomen wird allgemein als **Krümmungsruck** bezeichnet.

VI. Hilfsmittel

Polynomdivision
als wiederholte Subtraktion

$(\mathbf{2x^3} - 4x^2 - 10x + 12):(\mathbf{2x^2} + 2x - 4) = ??$

(i) *wie oft passt $2x^2$ in $2x^3$, oder $2x^2$ mal was ist $\mathbf{2x^3}$?*

(ii) *Antwort x hinter das Gleichheitszeichen schreiben, mit Divisor multipliziert, links unter den Dividenden schreiben und subtrahieren*

$$\begin{array}{l} (2x^3 - 4x^2 - 10x + 12):(2x^2 + 2x - 4) = x \\ \underline{-\ (2x^3 + 2x^2 - 4x)} \\ \quad ./. \quad -\mathbf{6x^2} - 6x + 12 \end{array}$$

Vielfaches des Divisors wird vom Dividenden subtrahiert.

Ziel: höchster Exponent des Dividenden verschwindet.

(iii) *wie oft passt $2x^2$ in $-\mathbf{6x^2}$?*

(iv) *Antwort -3 mal, zum bisherigen Ergebnis hinzufügen, mit Divisor multiplizieren, passend unter das augenblickliche Ende der Rechnung schreiben und subtrahieren.*

$$\begin{array}{l} (2x^3 - 4x^2 - 10x + 12):(\mathbf{2x^2} + 2x - 4) = x - 3 \\ \underline{-\ (2x^3 + 2x^2 - 4x)} \\ \quad ./. \quad -\mathbf{6x^2} - 6x + 12 \\ \quad\quad \underline{-(-6x^2 - 6x + 12)} \\ \quad\quad\quad ./. \quad ./. \quad ./. \end{array}$$

Vielfaches des Divisors wird vom Rest des Dividenden subtrahiert.

Ziel: zweithöchster Exponent des Dividenden verschwindet.

Das Verfahren wird fortgesetzt, so lange der Grad des Divisors ≤ Grad des aktuellen Restes ist.

Die Division ist aufgegangen, was nicht immer der Fall ist.

Rekapitulation:

1. $x \cdot (2x^2 + 2x - 4)$ wird vom Ausgangsterm abgezogen.
2. Vom Rest wird $-3 \cdot (2x^2 + 2x - 4)$ subtrahiert.
3. Es bleibt nichts übrig

Mathematisch: $2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 - x \cdot (2x^2 + 2x - 4) + 3 \cdot (2x^2 + 2x - 4) = 0$

umgeformt: $2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 - (x - 3) \cdot (2x^2 + 2x - 4) = 0$

$2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = (x - 3) \cdot (2x^2 + 2x - 4)$.

Diese Gleichung kann auf zwei Arten als Divisionsaufgabe gesehen werden:

1. Form: $(2x^3 - 4x^2 - 10x + 12) : (2x^2 + 2x - 4) = (x - 3)$

2. Form: $(2x^3 - 4x^2 - 10x + 12) : (x - 3) = 2x^2 + 2x - 4$.

Information	$2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 =$	$(x - 3) \cdot$	$(2x^2 + 2x - 4)$
	bedeutet	3 ist Nullstelle	dazu die Lösung(en) der quadratischen Gleichung

Beispiel 1 · *Nullstellensuche, Faktorisierung*

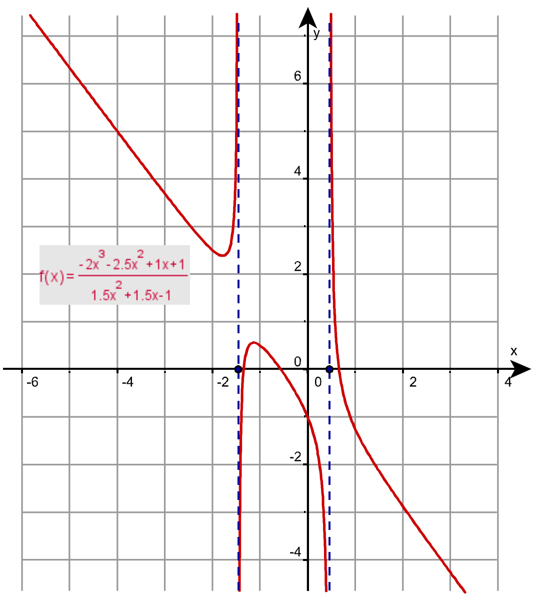
Gegeben ist das Polynom $p(x) = 2x^3 - 13x^2 + 22x - 8$. Sie haben die Nullstelle $x_{N1} = 2$ durch Ausprobieren ermittelt: $p(2) = 2 \cdot 8 - 13 \cdot 4 + 22 \cdot 2 - 8 = 16 + 44 - 52 - 8 = 0$.

Nullstelle = 2 bedeutet, p(x) enthält den Faktor (x − 2). Polynomdivision liefert den Rest:

$(2x^3 - 13x^2 + 22x - 8) : (x - 2) = 2x^2 - 9x + 4$
$\underline{-(2x^3 - 4x^2)}$
./. $-9x^2 + 22x - 8$
$\underline{-(-9x^2 + 18x)}$
./. $4x - 8$
$-(4x - 8)$ ← die Division geht auf, daher ist das Polynom zerlegbar in:
$p(x) = 2x^3 - 13x^2 + 22x - 8 = (x - 2) \cdot (2x^2 - 9x + 4)$.

Falls die quadratische Gleichung $\mathbf{2x^2 - 9x + 4 = 0}$ Lösungen besitzt, sind das weitere Nullstellen für die Polynomfunktion p. Hier sind das $x_{N2} = \frac{1}{2}$ und $x_{N3} = 4$.
Damit ist $2x^2 - 9x + 4 = 2 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x - 4)$, was angewendet auf p(x) bedeutet:
$p(x) = 2 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$. Diese Darstellung heißt auch Faktorisierung von p.
Diese Darstellungsform des Terms kann im Zusammenhang mit Nullstellen vorteilhaft sein.

Beispiel 2 · *Randverhalten bei gebrochenrationalen Funktionen*



Der links abgebildete Graph scheint sich für betragsmäßig größere x-Koordinaten an eine Gerade anzuschmiegen. Informationen aus dem Term kann man mit der Polynomdivision ziehen:

$(-2x^3 - 2{,}5x^2 + x + 1) : (1{,}5x^2 + 1{,}5x - 1) = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3} + r(x)$
$\underline{(2x^3 + 2x^2 - \frac{4}{3}x)}$
./. $-0{,}5x^2 - \frac{1}{3}x + 1$
$\underline{0{,}5x^2 + 0{,}5x - \frac{1}{3}}$
./. $-\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$ ← Zähler des Rests r(x)

Vor dem Rest steht oben der Term für die Asymptote:
$a(x) = -\frac{1}{3} \cdot (4x + 1)$.

Zerlegung von f mit Polynomdivision:

$$f(x) = \frac{-2x^3 - 2{,}5x^2 + x + 1}{1{,}5x^2 + 1{,}5x - 1} = -\tfrac{1}{3} \cdot (4x + 1) + r(x) \text{ und } r(x) = \frac{-\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}}{1{,}5x^2 + 1{,}5x - 1}$$

mit den Teilen	Asymptote a Hilfslinie für |x| „groß“	und	Rest r wobei für |x| „groß“ gilt r(x) → 0, weil Grad Zähler < Grad Nenner.

- Zeichnen Sie die Gerade a mit $a(x) = -\frac{1}{3} \cdot (4x + 1)$ in obiges Koordinatensystem ein.
  Was stellen Sie fest?

VII. Rückschau

Überblick-Grafik

Versuchen Sie, einen Überblick über die Inhalte dieses Themenbereichs zu gewinnen. Überlegen Sie dabei auch, was Ihnen dabei wichtig erschien.

Stellen Sie das nach Ihrer Meinung Zentrale in nebenstehendem Kasten dar und verwenden Sie dazu graphische Elemente (z.B. Mind Map, Concept Map, eine Grafik, ...). Wichtig ist, dass Sie diese Übersicht selbst gestalten und nicht irgendwo kopieren.

V6 · Von der mittleren zur lokalen Änderung

Überblick-Text

Wenn Sie möchten, können Sie hier maximal drei Punkte nennen, die Ihre obige Darstellung ergänzen oder erläutern.

Vernetzungen

Welche Verbindungen zu früheren Themenbereichen sehen Sie? Sind Ihnen Inhalte und/oder Methoden aus diesem Themenbereich schon außerhalb des Mathematikunterrichts begegnet und wenn ja, wo?

Im Rückblick sollten Sie sich auch fragen, ob Sie die am Anfang des Heftes stehenden Kompetenzen erworben haben. Schätzen Sie sich selbst ein und kreuzen Sie in der Tabelle jeweils die am ehesten zutreffende Antwort an:

Kompetenzen	ja	ein wenig	eher nicht	nein
Ich weiß, dass es inner- und außermathematische Fragestellungen gibt, für die nicht nur die Funktionswerte sondern auch deren Änderungen eine Bedeutung haben, die ich als Grenzprozess erfahren habe: • im geeigneten Sachkontext der Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate *(Durchschnittsgeschwindigkeit ➔ Momentan-) Geschwindigkeit, durchschnittlicher Steuersatz ➔ Grenzsteuer, etc.)* • bei innermathematischen Problemstellungen auch die Tangente als Grenzlage einer geeigneten Folge von Sekanten				
Auf Basis der obigen Kenntnisse weiß ich, dass die Ableitungsfunktion für jedes x die lokale Änderungsrate bzw. Tangentensteigung als Funktionswert zurückgibt.				
Ich berechne die Ableitungen ganzrationaler Funktionen mit Hilfe der Summen- und Faktorregel und löse so elementare Optimierungsprobleme auch rechnerisch				
Ich bestimme Grenzwerte auf anschaulicher Ebene				
Ich kann zu einem gegebenen Funktionsgraphen den prinzipiellen Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion einzeichnen.				

Haben Sie Kompetenzen nicht erworben oder nicht so, wie Sie es sich erhofft hatten, notieren Sie sich, woran es gelegen haben könnte. Überlegen Sie zugleich, ob Sie in Ihrem eigenen Verantwortungsbereich Möglichkeiten sehen, den Erwerb von Kompetenzen zu verbessern.

✎

V 6

Von der mittleren
zur lokalen
Änderung

Übersicht zu den GeoGebra-Applets

Nr.	Inhalt
01	Zusatzaufgabe zu Aufgabe 1 Vergleich von zwei verschiedenen Weg/Zeit-Diagrammen
02	Aufgabe 3 · Lösungshilfe
03	Aufgabe 4b) · Visualisierung des Bewegungsvorganges
04	Zusammenfassung, S. 6: Visualisierung des Übergangs von der mittleren zur lokalen Änderungsrate
05	Aufgabe 5a) · Ableitung von sin(x) durch Spurpunkt
06	Aufgabe 5d) · Kein Applet. Die allgemein hergeleitete Ableitung von x^3 (also Bruchrechnung)
07	Aufgabe 7 · Zusammenhang der Ableitungen und deren Bedeutung, auch in Hinblick auf den Sachkontext.
08	Ergänzungen zu Applet 7
09	Aufgabe 13 · Visualisierung
10	Aufgabe 16 · Grenzkosten: Visualisierung für Modell durch Ableitung im Vergleich mit tatsächlichen Werten.

Hergestellt mit GeoGebra: www.geogebra.org