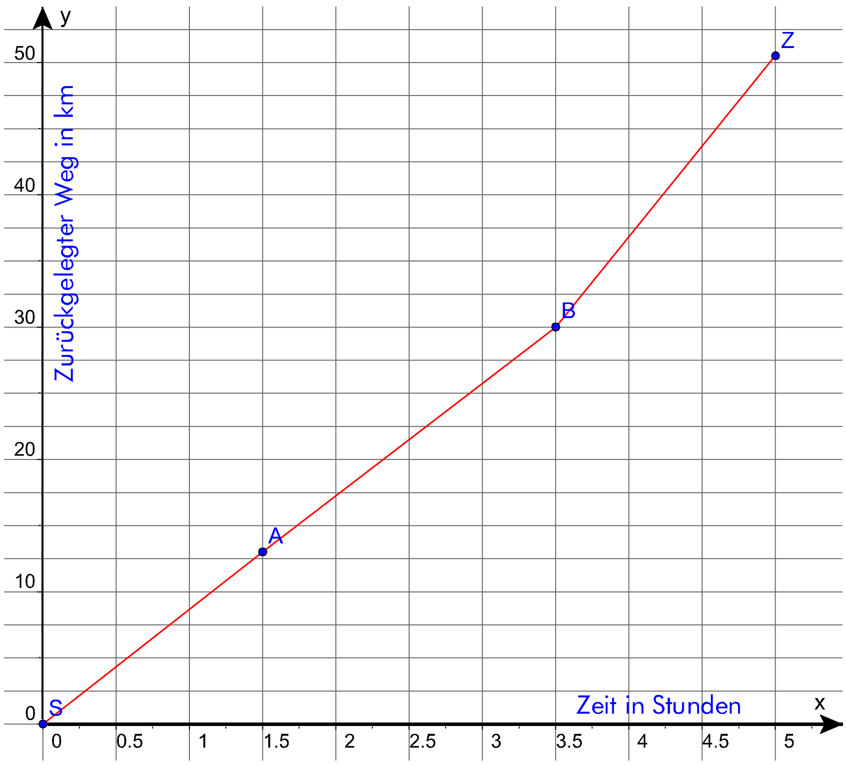
V6 · Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

Die Aufgabe ist ein einfaches, nicht so ganz realistisches Beispiel für lokale Änderungsrate, die bei Weg/Zeit-Zusammenhängen die Geschwindigkeit beschreibt. Es kommen drei verschiedene graphische Darstellungsformen vor, die bestimmte Aspekte gut veranschaulichen, andere jedoch nicht. Der Satz des Pythagoras wird mehrfach verwendet (und vielleicht bemerken einige Lernende die pythagoräischen Zahlentripel).
Die Zusatzaufgabe dient eher der Binnendifferenzierung, sie kann auch später wieder aufgegriffen werden.

Streckenlängen:
$|SA|^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2 \quad \Rightarrow |SA| = 13,$
$|AB|^2 = 8^2 + 15^2 = 289 = 17^2 \quad \Rightarrow |AB| = 17$ und
$|BS|^2 = 4^2 + 20^2 = 416 \quad \Rightarrow |BS| \approx 20{,}4.$



Möglicher Weg zur Skizze:
Überlegt man sich die Koordinaten eines beliebigen Punktes D auf der Strecke AB im Lageplan in Abhängigkeit von der Zeit, so ist |D| der gesuchte Abstand und damit die y-Koordinate der Yacht zwischen den Punkten A und B im vorliegenden Weg/Zeit-Diagramm.

$$D(t) = A + \frac{8{,}5 \cdot t}{|B - A|} \cdot (B - A)\,,$$

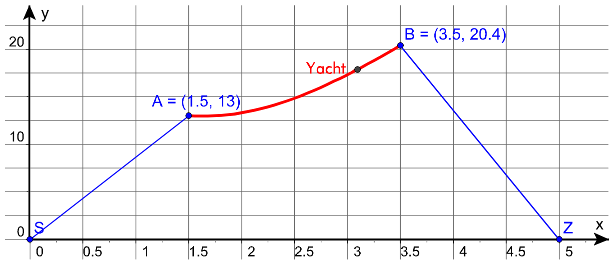
$t \in [0{,}2] \Rightarrow$

Yacht = $(t+1{,}5\ ;\ |D(t)|)$.

Damit bleibt S = (0|0), A wird zu (1,5|13),
B zu (3,5|30) und Ziel ≈ (5|50,4), siehe obige Abb.

Geschwindigkeit
zwischen S und A: 13/1,5 km/h ≈ 8,7 km/h,
zwischen A und B: 17/2 km/h = 8,5 km/h,
zwischen B und Z (Ziel): 20,4/1,5 km/h = 13,6 km/h.
Das sind die Steigungen der jeweiligen Geradenabschnitte in obiger Abbildung.

<u>Zusatzaufgabe:</u>
Aus dem gegebenen Lageplan kann mit Hilfe eines Geodreiecks geschlossen werden, dass das Lot von S auf die Seite AB innerhalb des Dreiecks liegt. Die Yacht nähert sich zunächst ein wenig dem Start/Zielpunkt (die minimale Entfernung von etwa 12,94 km wird in einem Punkt C auf der Strecke AB erreicht, der nahe bei A liegt: C ≈ (6,09|11,42) – ermittelt mit DGS), um sich danach weiter von Start/Ziel zu entfernen.
⇒ Der Bewegungsvorgang kann unter dem gegebenen Aspekt nicht linear sein.



Aufgabe 2

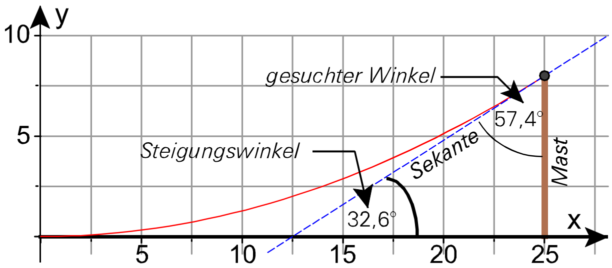
a) Kurze Fahrt um 3:25 Uhr, maximal 25 km/h, dann 3:35 Uhr Fahrt mit wechselndem Tempo bis kurz vor 4 Uhr, dann relativ konstante Geschwindigkeit von ca. 90 km/h, zwischen 5:15 und 6:20 Uhr wechselt die Geschwindigkeit sehr stark. Dann folgen mehrere Stops, Geschwindigkeit dazwischen um die 60 km/h, gegen 6:30 Uhr noch einmal für wenige Minuten 90 km/h, 6:35 Uhr Halt, unterbrochen von kurzer langsamer Fahrt gegen 6:47 Uhr.

   Geschichte z.B.
   LKW fährt um 3:25 Uhr auf dem Betriebshof zur

Tanksäule und tankt. Er fährt danach gegen 3:35 Uhr auf einer z.T. engen Strecke zur Autobahn, die er gegen 3:55 Uhr erreicht. Gegen 5:15 Uhr verlässt er die Autobahn und fährt weiter auf einer gut ausgebauten Landstraße, die aber an vielen Stellen Steigungen und auch starke Kurven aufweist. Gegen 5:50 Uhr erreicht er wieder ebeneres Gelände und fährt über die Schnellstraße in die Stadt, die er gegen 6:20 Uhr erreicht. Er verlässt sie gegen 6:30 Uhr und erreicht wenig später sein Ziel, wo er nach 10 Minuten schließlich zur Laderampe vorfahren kann.

b) Das Beschleunigen (oder Bremsen) ist die lokale Änderungsrate der Geschwindigkeit.
(Das ist die lokale Änderungsrate der lokalen Änderungsrate des zurückgelegten Weges.)

Aufgabe 3



Die Parabel kann beispielsweise so ins Koordinatensystem gelegt werden, dass der Scheitelpunkt im Nullpunkt liegt. Dann stehen die Masten bei $x = -25$ und bei $x = 25$, also 50 Einheiten auseinander.
Als Parabel muss dann eine gestauchte Normalparabel p gewählt werden mit $p(x) = a \cdot x^2$, sodass gilt $p(25) = 8$, also $a = 8/25^2 = 0{,}0128$.

Damit hat die Funktion p die Gleichung
$p(x) = 0{,}0128\, x^2$.

Zur Bestimmung des Winkels benötigt man bei x=25 die Steigung der Tangente bzw. einer Sekante mit ganz nahe bei einander liegenden Schnittpunkten, der eine bei $x = 25$, also z.B. $\dfrac{p(x)-p(x-h)}{h}$ für $x = 25$ und $h = 1/100$. Der Quotient ergibt näherungsweise 0,639872 und die Steigung ist ja der Tangens des Winkels, den die betreffende Gerade mit der x-Achse einschließt, hier etwa 32,6°. Der Winkel zwischen Seil und Mast ist dann
$90° - 32{,}6° = 57{,}4°$.

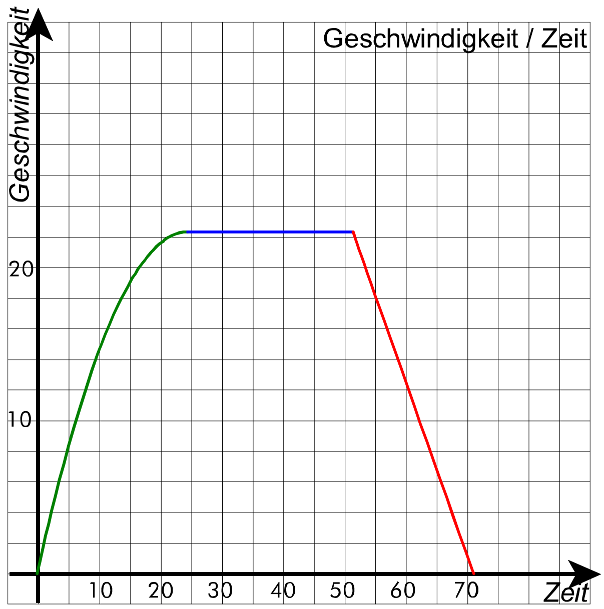
Aufgabe 4a)

Bis A: Keine Bewegung, Entfernung zum Messgerät konstant.
A bis B: nach Startschwierigkeiten linearer Bewegungsablauf.
B bis C: Sprungstelle
C bis D: Vermindern der Geschwindigkeit, linear,
D bis E: Ruhezustend.

Aufgabe 4b)

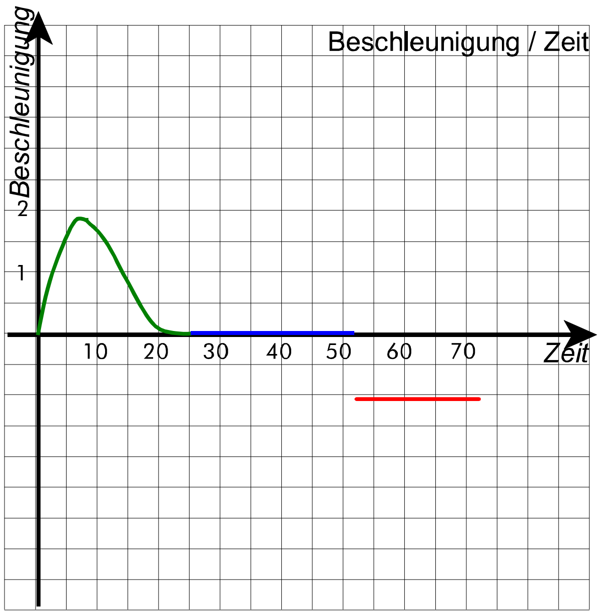
Oberes Koordinatensystem
Phase ①: U-Bahn beschleunigt 25 Sekunden lang aus dem Stand. Die Bahn legt dabei knapp 400 m zurück.
Phase ②: von der 25. bis ca. zur 52. Sekunde, also etwa 27 Sekunden lang behält die Bahn ihre Geschwindigkeit bei und legt dabei ungefähr 600 m zurück, das ist eine Geschwindigkeit von 22,22 m/s oder fast 80 km/h
Phase ③: Der Bremsvorgang schließt sich an mit einer Dauer von etwa 20 Sekunden. Die U-Bahn hält in der ca. 1200 m entfernten Haltestelle.
Der Bremsvorgang kann als negative Beschleunigung interpretiert werden.

Geschwindigkeit in m/s



Der Verlauf der Geschwindigkeit während des Anfahr- und Bremsvorgangs ist geschätzt.

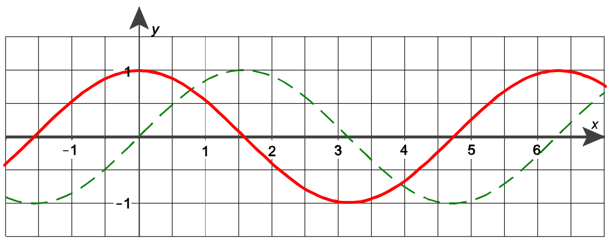
Beschleunigung in m/s²



Der Verlauf der Beschleunigung folgt aus dem Verlauf der Geschwindigkeit (linke Abbildung).

Aufgabe 5

a) Dargestellt ist der Graph der Sinus-Funktion. Als Ableitungsfunktion ergibt sich anscheinend die Cosinus-Funktion. Dafür spricht neben dem sich ergebenden Graphen:
- die Steigung der Sinus-Funktion im Nullpunkt ist 1 (kann man ablesen)
- die Steigung bei $x = \pi/2$ ist sicher 0
- die Steigung bei π ist -1...



b) Die Ableitung gibt in jedem Punkt die Steigung der Tangente an die Kurve an. Da es sich hier um eine lineare Funktion handelt, fallen Tangente und Funktionsgraph zusammen<<.
$f(x) = b\,x \Rightarrow f'(x) = b$ *(die Steigung dieser Geraden ist b).*

c) $g_1(x) = x^2$ Steigung mit Differenzenquotient:

$$\frac{g_1(x+h)-g_1(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h.$$

$2x+h \to 2x$ für $h \to 0$.
Also gilt: $g_1(x) = x^2 \Rightarrow g_1'(x) = 2x$.

$g_2(x) = 5x^2$ kann auch als $5\,g_1(x)$ angesehen werden. Damit lautet der Differenzenquotient

$$\frac{5\cdot g_1(x+h) - 5\cdot g_1(x)}{h} = 5\cdot\frac{g_1(x+h)-g_1(x)}{h}.$$

Wird der Bruch wie oben umgeformt, ergibt sich $g_2(x) = 5x^2$ $g_2'(x) = 5\cdot 2x = 10x$.

d) $k(x) = x^3 \Rightarrow k'(x) = 3x^2$:
direkter allgemeiner Nachweis:

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} =$$

$$\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = 3x^2+3xh+h^2 \to 3x^2 \ (h\to 0)$$

Es ist auch möglich, eine Wertetabelle des Differenzenquotienten zu erstellen und aus dem Verlauf des Graphen auf den Term zu schließen.

Aufgabe 6

Potenzregel: $f(x) = x^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow$ $f'(x) = n\cdot x^{n-1}$.

Das kann man vermuten, basierend auf obigen Ausführungen für n = 2 und für n = 3.
Es kann aber auch direkt gezeigt werden, wenn man weiß, dass
$(x+h)^n = x^n + n\cdot x^{n-1}\cdot h + \ldots h^2\ldots$ *Daraus folgt*
$(x+h)^n - x^n = n\cdot x^{n-1}\cdot h + \ldots h^2\ldots$ *geteilt durch h*
$n\cdot x^{n-1} + \ldots h\ldots + \ldots h^2\ldots \to \boldsymbol{n\cdot x^{n-1}}$ ***für*** $\boldsymbol{h \to 0}$.

Faktorregel: $(a\cdot f(x))' = a\cdot f'(x)$ *(a konstant)*
An einem Beispiel in 4c) gezeigt (g_2). *Allgemein:*

Für den Differenzenquotienten gilt

$$\frac{a\cdot f(x+h) - a\cdot f(x)}{h} = a\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Daraus folgt $(a\cdot f(x))' = a\cdot f'(x)$ für die Grenzwerte.

Summenregel: $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Differenzenquotient für die Funktion (f+g), dessen Grenzwert für $h \to 0$ $(f+g)'(x) = (f(x)+g(x))'$ lautet:

$$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} =$$

$$\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$

Nun wird der untere Bruch geeignet sortiert und in zwei Brüche aufgeteilt:

$$\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} =$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \to f'(x)+g'(x) \ (h \to 0)$$

6c) Anwendung:

$p(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - x + 3$
$p'(x) = 3 \cdot 4\,x^3 - 2 \cdot 3\,x^2 + 5 \cdot 2\,x - 1$
$\quad = 12\,x^3 - 6x^2 + 10x - 1$

Verwendete Regeln

Summenregel: Die Summanden werden einzeln abgeleitet und die zusammengefassten Ableitungen zum Schluss aufaddiert.

Faktorregel: Faktoren vor Variablen bleiben unverändert stehen und dann – falls möglich und sinnvoll – entsprechend den Rechengesetzen zusammengefasst, z.B. $(3 \cdot x^4)'=3 \cdot (x^4)'=3 \cdot 4x^3 = 12x^3$

Potenzregel: Exponent als Faktor vor die Variable, neuer Exponent = alter Exp.−1, z.B. $(x^4)' = 4 \cdot x^3$.
Sonderfall: Die Ableitung einer Konstanten als Summand ist Null, denn $(x^0)'=0 \cdot x^{-1}=0$. Daraus folgt mit der Faktorregel in obigem Beispiel für den letzten (konstanten) Summanden:
$(3)' = (3 \cdot x^0)' = 3 \cdot (x^0)' = 3 \cdot 0 = 0$.

Aufgabe 7

$\quad f(x) = -0{,}1\,x^3 + 1{,}2\,x^2 - 3{,}4\,x + 1{,}8$
$\Rightarrow \quad f'(x) = -0{,}3\,x^2 + 2{,}4\,x - 3{,}4$
$\Rightarrow \quad f''(x) = -0{,}6\,x + 2{,}4$

Graph von f′

- hat Nullstellen dort, wo f Extremwerte besitzt *(waagerechte Tangente)*
- verläuft unterhalb der x-Achse, wenn f monoton fällt (Tangentensteigung negativ), oberhalb, wenn f monoton wächst *(Tangentensteigung positiv)*.

Graph von f″

- hat Nullstellen dort, wo f′ Extremwerte besitzt *(waagerechte Tangente)*
- verläuft unterhalb der x-Achse, wenn f′ monoton fällt (Tangentensteigung negativ), oberhalb, wenn f monoton wächst *(Tangentensteigung positiv)*.

Zwischen Tief- und Hochpunkt ist f monoton wachsend, jedoch schwächt sich das Wachstum zunächst ab (Linksdrehung), um dann beim Wendepunkt wieder zuzunehmen. An dieser Stelle ist f″(x) = 0, also ein Extremwert der 2. Ableitung Nullstelle der 2. Ableitung.

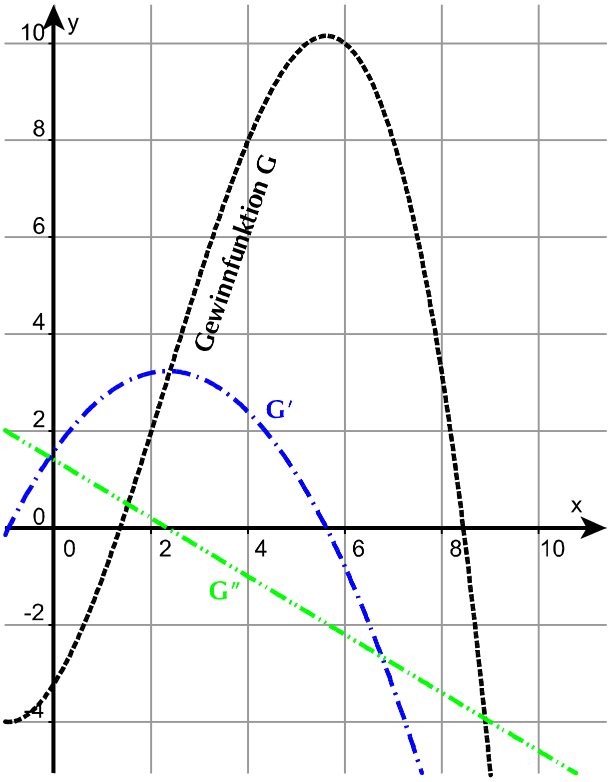
Aufgabe 8 a

$\quad G(x) = -0{,}5x^2 + 7x - (0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5{,}4x + 3{,}2)$
$\Rightarrow \quad G(x) = -0{,}1\,x^3 + 0{,}7\,x^2 + 1{,}6x - 3{,}2$
$\Rightarrow \quad G'(x) = -0{,}3\,x^2 + 1{,}4\,x + 1{,}6$
$\Rightarrow \quad G''(x) = -0{,}6\,x + 1{,}4$

Nullstelle von G′ *(waagerechte Tangente)* ist notwendig für Extremwert:
$-0{,}3\,x^2+1{,}4x+1{,}6 = 0 \mid :(-0{,}3)$
$x^2 - 14/3\,x - 16/3 = 0$. Damit ist

$$x_{1/2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9}+\frac{16}{3}} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9}+\frac{48}{9}}$$
$$= \frac{7}{3} \pm \frac{1}{3} \cdot \sqrt{97} \approx 5{,}6$$

(Die zweite Lösung ist negativ)
Die Gewinnfunktion hat – wie der Graph zeigt –, bei etwa einer Produktion von 5,6 ME ein Maximum. Dort muss die Kurve rechtsgekrümmt sein, was bedeutet, dass die 1. Ableitung in einem Intervall, das die x-Koordinate (hier 5,6) enthält, monoton fällt. In diesem Intervall ist die **2. Ableitung dann negativ**:
$G''(5{,}6) = -0{,}6 \cdot 5{,}6 + 1{,}4 = -3{,}3 + 1{,}4 < 0$.



Aufgabe 8 b

Die Kostensteigerung ist die erste Ableitung von K, also K′. Für das Minimum muss jedenfalls die Ableitung der Kostensteigerung (K′)′ = K″ Null werden. Die minimale Kostensteigerung liegt also beim Wendepunkt vor:
$K(x) = 0{,}1\,x^3 - 1{,}2\,x^2 + 5{,}4\,x + 3{,}2$
$K'(x) = 0{,}3\,x^2 - 2{,}4\,x + 5{,}4$
$K''(x) = 0{,}6\,x - 2{,}4$
$K''(x) = 0$ bedeutet $0{,}6\,x = 2{,}4 \Rightarrow x_{min} = 4$
$K'(4) = 4{,}8 - 9{,}6 + 5{,}4 = 10{,}2 - 9{,}6 = 0{,}6.$

Bei einer Produktion von 4 ME liegt rechnerisch eine Kostensteigerung von 0,6 GE vor.

Aufgabe 8 c

- Die Gewinnfunktion G ist eine quadratische Funktion, eine nach unten geöffnete Parabel. Das Maximum liegt im Scheitelpunkt, der z.B. mithilfe der quadratischen Ergänzung bestimmt werden kann, in diesem Fall auch über die Nullstellen.

- $G(x) = -0{,}05\,x^2 + 39\,x - 4000$
  $G'(x) = -0{,}1\,x + 39$
  $G'(x_E) = 0$ liefert $x_E = 390$
  Da G eine nach unten geöffnete Parabel beschreibt, liegt an dieser Stelle ein Maximum vor.

Aufgabe 8 d

$$O(x) = 2\pi\,x^2 + 1700 \cdot \frac{1}{x}$$

- Summenregel und Faktorregel:
  1. Summand: $4\pi\,x$
  2. Summand: 1700 · Ableitung von $\frac{1}{x}$

- Mit dem Differenzenquotienten gilt:
  $$\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{h}\cdot\frac{x-x-h}{x^2+hx}=\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{x^2+hx}=$$
  $$-\frac{1}{x^2+hx}\to-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}\ \text{(für } h \to 0).$$
  Die Ableitung von f_2 mit $f_2(x) = x^{-1}$ ist daher
  $$f_2'(x) = -x^{-2}$$
  und so analog zu Potenzregel.

Aufgabe 9

x sei Preissenkung in €.

a) $U(x) = (16-x)(8.000+800x) =$
$= -800\,x^2 + 4.800\,x + 128.000$
(nach unten geöffnete Parabel).

$U'(x) = -1.600\,x + 4.800$
$U'(x_E) = 0$ liefert $x_E = 3$ *(absolutes Maximum).*

Bei einer Preissenkung von 3,00 € (also einem Preis von 13,00 €) ist der Umsatz maximal (nämlich 135.200 €).

b) $G(x) = [(16-x)-6](8.000+800x)-40.000 =$
$= -800\,x^2 + 40.000$
(nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt bei $x_E = 0$)

Beim jetzigen Preis von 16 € ist der Gewinn der Firma am größten (nämlich 40.000 €).

Ü2

Bedeutet f(x)	**dann bedeutet f′(x)**
*der bis zum Zeitpunkt x zurückgelegte **Weg**,*	die **Geschwindigkeit** zum Zeitpunkt x.
die **Geschwindigkeit** zum Zeitpunkt x,	*die **Beschleunigung** zum Zeitpunkt x.*
die **Einkommensteuer** bei zu versteuerndem Einkommen x,	*die **Grenzsteuer** beim Einkommen x.*
die **Kosten** (Gesamtkosten) bei einer Produktion von x Mengeneinheiten,	*die **Grenzkosten** bei einer Produktion von x ME.*
die vom Anfangspunkt bis zur Wegstelle x verrichtete **Arbeit**,	*die an der Wegstelle x wirkende **Kraftkomponente**.*
*der **Flächeninhalt** des Kreises mit der Radius x,*	der **Umfang** des Kreises mit dem Radius x.
das **Volumen** der Kugel vom Radius x $\left(\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot x^3\right)$,	*der **Oberflächeninhalt** der Kugel vom Radius x.* ($4\pi\, x^2$)

Aufgabe 10 a

Gegeben sind $f(0) = 0$ $\quad f(2) = 500$

$f(3) = 800$ $\quad f'(3) = 0.$

Das sind vier Angaben. Damit kann ein Polynom 3. Grades eindeutig bestimmt werden:

Sei $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, dann folgt zunächst aus $f(0) = 0$, dass $a_0 = 0$ ist.
Benötigt wird noch $f'(x) = 3a_3\, x^2 + 2a_2\, x + a_1$.
Damit und aus den restlichen drei Angaben erhalten wir die folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & 8a_3 & + & 4a_2 & + & 2a_1 & = & 500 \\ \text{II} & 27a_3 & + & 9a_2 & + & 3a_1 & = & 800 \\ \text{III} & 27a_3 & + & 6a_2 & + & a_1 & = & 0 \end{array}$$

Das ist in Matrixform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 500 \\ 27 & 9 & 3 & 800 \\ 27 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2\cdot\text{III}-\text{I}]{-\text{II}+3\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 500 \\ 54 & 9 & 0 & -800 \\ 46 & 8 & 0 & -500 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-9\cdot\text{III}+8\cdot\text{II}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 500 \\ 54 & 9 & 0 & -800 \\ 18 & 0 & 0 & -1900 \end{array}\right)$$

Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar

$$a_3 = -\frac{950}{9}.$$

Eingesetzt in II ergibt sich

$$a_2 = \frac{4900}{9}.$$

Damit folgt aus der ersten Gleichung

$$a_1 = -\frac{3750}{9}.$$

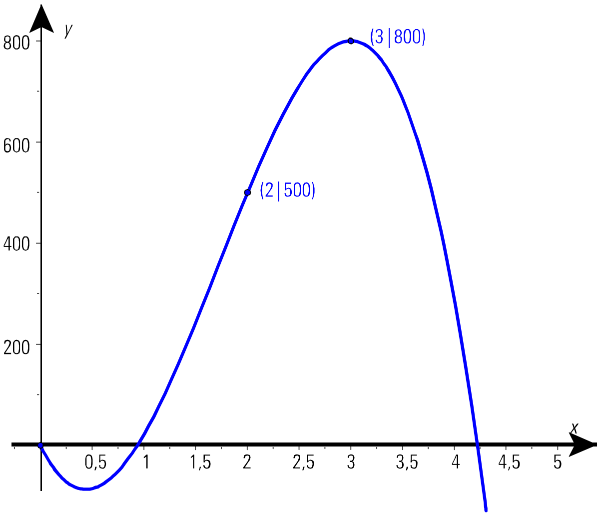
Der gesuchte Term lautet also

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{950}{9}x^3 + \frac{4900}{9}x^2 - \frac{3750}{9}x \\ &= -\frac{50}{9}\cdot(19x^3 - 98x^2 + 75x) \\ &\approx -105{,}56\,x^3 + 544{,}44\,x^2 - 416{,}67\,x \end{aligned}$$

Zum Graphen siehe Abbildung auf der folgenden Seite.

Aufgabe 10 b

Überraschenderweise beginnt das Modell mit einem negativen Absatz, der in der Quelle einfach ignoriert wurde, wie auch der negative Absatz nach gut 4 Jahren....



Aufgabe 11

x = Stückzahl pro Bestellung $\quad x \in [1{,}10.000]$

y = Anzahl der Bestellungen pro Jahr

für y gilt $y = \dfrac{10.000}{x}$.

$$K(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 10 \cdot \frac{12}{100} + 60 \cdot \frac{10.000}{x} + 10.000 \cdot 10$$

$$= \frac{3}{5} \cdot x + \frac{600.000}{x} + 100.000$$

$$K'(x) = \frac{3}{5} - \frac{600.000}{x^2}$$

$K'(x_E) = 0$ führt zu $x_E^{\,2} = 1.000.000$

$\Rightarrow x_E = 1.000$ (positiv wg. Sachkontext)

In der Nähe von x = 1.000 ist K′ monoton wachsend. Damit gilt: Bei $x_E = 1.000$ ist ein relatives Minimum mit K(1.000) = 101.200.

Nun müssen wir noch die Ränder des zulässigen Bereichs *(alles einzeln bestellen: x = 1, alles auf Einmal: x = 10.000)* überprüfen, ob nicht dort eventuell ein kleinerer Wert vorliegen könnte:
K(1) = 700.000,6 und K(10.000) = 106.060.
Beide Werte sind größer als K(1.000).

Damit wissen wir jetzt, dass bei $x_E = 1.000$ ein absolutes Minimum vorliegt:

Bei 10 Bestellungen à 1.000 Stück werden die Kosten am geringsten.

Aufgabe 12

Legt man den Ursprung des Koordinatensystems genau in die Mitte der Freifläche, endet das linke Schienenstück bei (−50|10), das rechte bei (50|−10).

Bedingungen für gesuchte Funktion f:

$f(-50) = 10$	$f(50) = -10$	*Verbindung der beiden Strecken*
$f'(-50) = 0$	$f'(50) = 0$	*„glatter" Anschluss*
$f''(-50) = 0$	$f''(50) = 0$	*kein Krümmungsruck*

6 Bedingungen ⇒ Polynom 5. Grades
Wegen Punktsymmetrie zum Ursprung treten nur ungerade Exponenten auf, daher als Ansatz

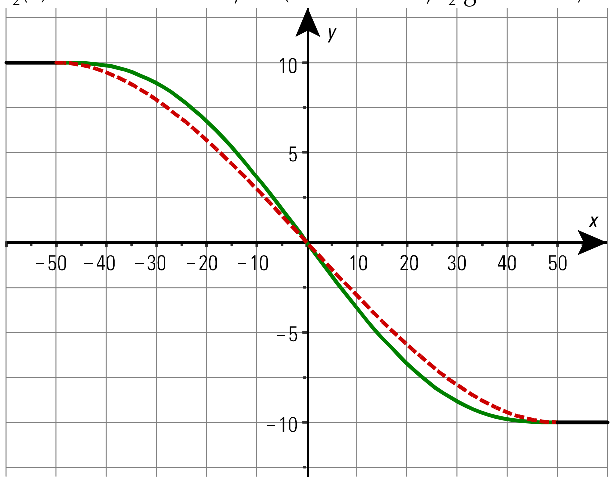
$f(x) = a_5\, x^5 + a_3\, x^3 + a_1\, x$. Es folgt
$f'(x) = 5a_5\, x^4 + 3a_3\, x^2 + a_1$ und
$f''(x) = 20a_5\, x^3 + 6a_3\, x$.

Obige Werte eingesetzt folgt:

I	$312.500.000\, a_5$	$+125.000\, a_3$	$+ 50\, a_1$	$= -10$
II	$31.250.000\, a_5$	$+ 7.500\, a_3$	$+ a_1$	$= 0$
III	$2.500.000\, a_5$	$+ 300\, a_3$		$= 0$

$\Rightarrow f(x) = -1{,}2 \cdot 10^{-8}\, x^5 + 0{,}0001\, x^3 - 0{,}375\, x$

Berücksichtigt man den Krümmungsruck nicht, so ergibt sich
$f_2(x) = 4 \cdot 10^{-5}\, x^3 - 0{,}3\, x$ (siehe Skizze, f_2 gestrichelt).



Aufgabe 13

Geometrisch betrachtet geht es darum, eine Tangente durch den Ursprung an den Graphen zu finden (siehe Abbildung oben rechts).
Algebraisch wird dieses durch

K(x) = Kosten = Erlös = p·x *(kein Verlust)* und

K′(x) = p *(Grenzkosten = Preis)*

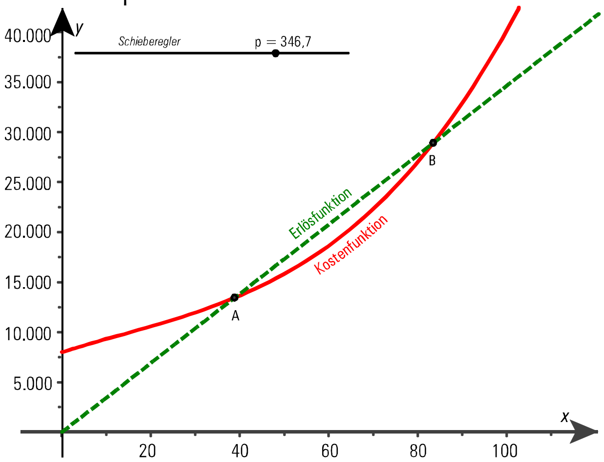
gelöst. Das sind 2 Gleichungen mit den beiden Variablen p und x, die man zu einer Gleichung umformen kann: $K(x) = K'(x) \cdot x$

$0{,}03x^3 - 1{,}2x^2 + 142x + 8000 = (0{,}09\, x^2 - 2{,}4x + 142) \cdot x$

$\Leftrightarrow 0{,}06\, x^3 - 1{,}2\, x^2 - 8000 = 0$

Mit einem geeigneten Taschenrechner oder DERIVE oder GeoGebra ... erhält man $x_E \approx 58{,}7$ und mit $K'(x_E)$ den minimalen Preis $p_{min} \approx 311{,}2$.

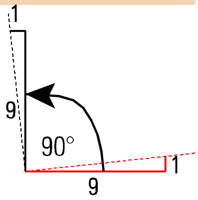
Bei einem Preis von ca. 311,22 GE kann die Firma verlustfrei produzieren.



Aufgabe 14

a) $b'(x) = \frac{-x+3}{9} \Rightarrow b'(2) = \frac{1}{9}$.

Die dazu senkrechte Steigung ist −9 (siehe Skizze rechts).



Die Gleichung der Normalen n lautet also vorläufig n(x) = −9x + a.
Den y-Achsenabschnitt a erhält man aus

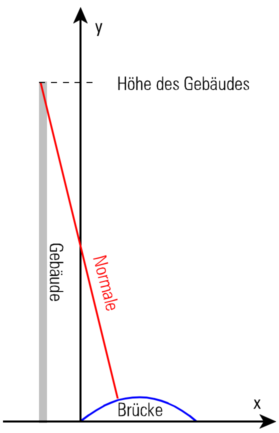
$n(2) = b(2) = \frac{4}{9} \Rightarrow a = 18\frac{4}{9} = \frac{166}{9}$.

Gleichung der Normale: $n(x) = -9x + \frac{166}{9}$.

b) Die Gebäude-Kante liegt parallel zur y-Achse bei $x_G = -2$. Die Höhe des Gebäudes ist daher die y-Koordinate des Schnittpunkts dieser Senkrechten mit der Normalen:

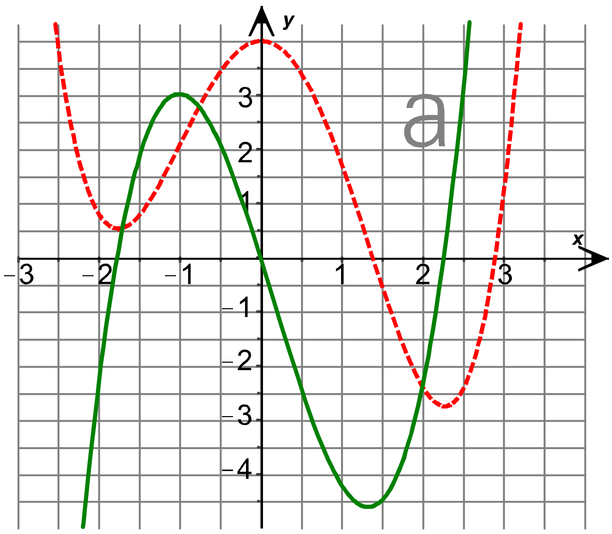
$n(2) = \frac{328}{9} \approx 36{,}4$.

Das Gebäude hat (an dieser Stelle) eine Höhe von etwa 36,4 m.

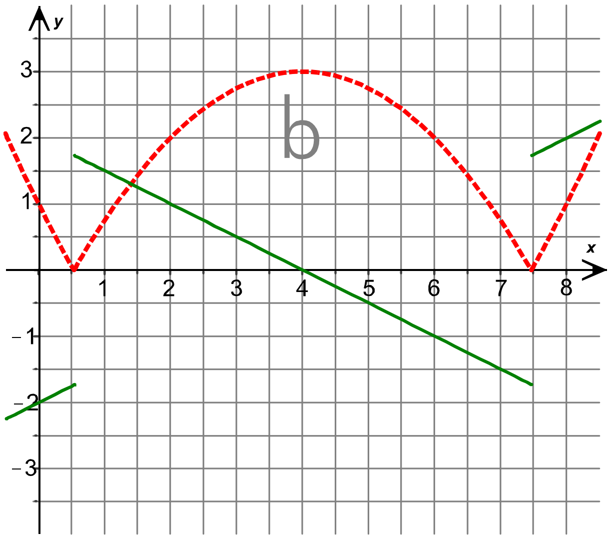


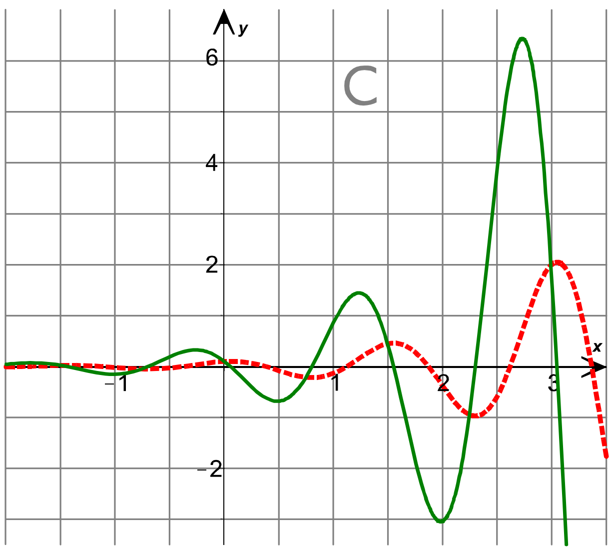
Skizze nicht maßstabsgetreu.

Aufgabe 15 a), b) und c)



Gestrichelte Kurve war gegeben.





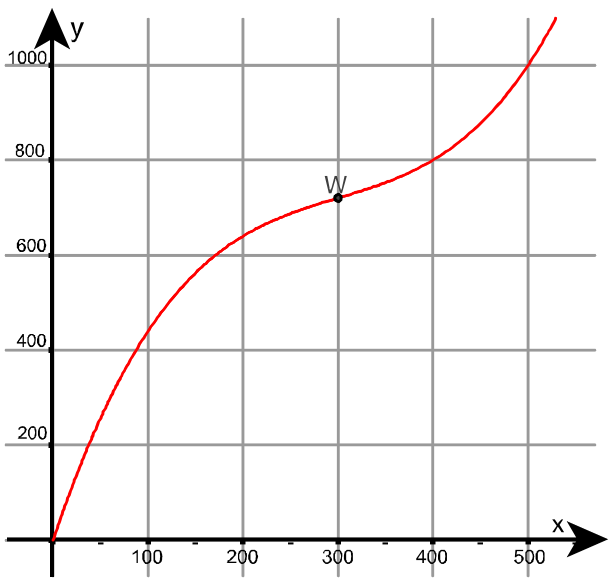
Aufgabe 15 d)

...ist offen gestellt und hat daher keine eindeutige Lösung.

Aufgabe 16

Produktion	Ableitung	tatsächliche Grenzkosten	Differenz
100	3000,00	2988,02	11,98
200	1200,00	1194,02	5,98
300	600,00	600,02	-0,02
400	1200,00	1206,02	-6,02
500	3000,00	3012,02	-12,02
600	6000,00	6018,02	-18,02

Die Unterschiede sind jedenfalls mit diesen Produktionszahlen gering.



Obige Abbildung zeigt den prinzipiellen Verlauf der Kostenkurve, jedoch **ohne Fixkosten**, und die GE werden in 1.000 angezeigt, skizziert ist also (K(x) – 500.000)/1.000.

Die optimale Kostensituation liegt am Wendepunkt vor, der bei $x_W = 300$ vorliegt. Produktionssteigerungen lohnen sich also bei Produktionsmengen von weniger als 300 Motoren.
Produziert die Firma bereits 300 oder mehr Motoren je Zeiteinheit, so würde eine Produktionssteigerung die Kosten stark ansteigen lassen, da die Kostenzunahme ab dem Wendepunkt wächst.

Aufgabe 17

a) $f'(x) = 5\,x^3$ *der Exponent war um 1 größer, Konstante 5 berücksichtigen:*
$f(x) = 1{,}25\,x^4$
Diese Lösung ist nicht eindeutig, da noch jede beliebige Konstante dazugezählt werden kann, weil diese bei der Ableitung verschwinden.

b) $g'(x) = 5\,x^3 - 2\,x + 8$
Lösung mit obigem Hinweis und Summenregel rückwärts:
$g(x) = 1{,}25\,x^4 - x^2 + 8x + c$ (c beliebig $\in$IR).

c) $h'(x) = \sin x$
Probieren und Nachdenken führt auf
$h(x) = -\cos x + c$