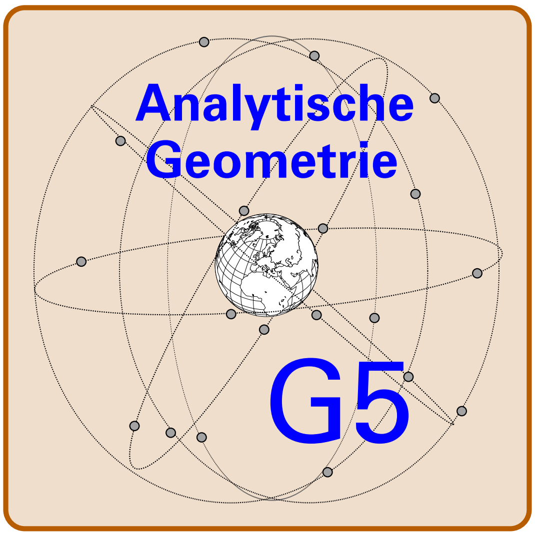
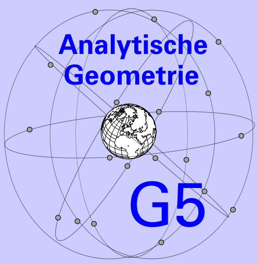


Lernheft



Kompetenzen

Sie sollen

(1) erfahren, wie im Raum Geraden und Ebenen beschrieben werden (auch als Linearkombination) und wie sie zueinander in Beziehung stehen

(2) zum Messen von Länge und Winkeln bei Vektoren den Betrag und das Skalarprodukt kennen lernen

(3) sich mögliche Darstellungen einer Kugel erarbeiten und so auch den Umgang mit den Kugelkoordinaten lernen

(4) entdecken, wie auf der Oberfläche einer Kugel die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten bestimmt wird, und entwickeln geeignete Berechnungsmethoden

(5) geeignet zwischen kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten wählen.

Autor: Winfried Euba

Version: 1.01 vom 08.11.2007

Inhalt

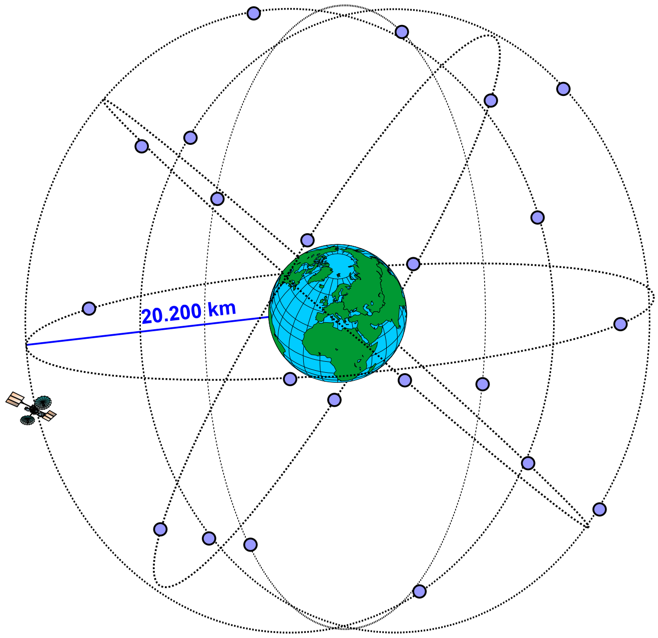
Dieser Themenbereich basiert auf einer geometrischen Interpretation im dreidimensionalen Raum von Vektoren und deren Verknüpfungen aus dem Themenbereich G2 · Matrizen und Vektoren als Datenspeicher.

Die Vektoren werden hier als Punkte oder als Pfeile (auch Vektoren genannt) interpretiert. Punkte werden zumeist mit Großbuchstaben gekennzeichnet (z.B. P), Pfeile mit kleinen Buchstaben mit Pfeil (p) und deren Koordinaten als Spalte dargestellt.

Im Rahmen der Klärung der prinzipiellen Arbeitsweise des Navigationssystems GPS lernen Sie die geometrischen Objekte Kugel, Ebene und Gerade mit einigen ihrer Eigenschaften kennen. Dazu gehört auch, welche Lagebeziehungen diese Objekte mit- und untereinander haben können und woran man diese erkennt.

I. Wie funktioniert GPS?

GPS besteht aus einem Verbund von 24 Satelliten, die die Erde auf (nahezu kreisförmigen) Bahnen in ca. 20200 km Höhe in einer Umlaufzeit von nahezu 12 Stunden umrunden. Jeweils 4 Satelliten kreisen dabei auf einer von sechs Umlaufbahnen, sodass stets eine genügende Anzahl von Satelliten (mindestens 4) auf der ganzen Erde zu jeder Zeit sichtbar ist.



Die Satelliten bewegen sich nicht auf geostationären Bahnen, damit jeder der Satelliten einmal am Tag eine der Kontrollstationen passiert. Davon gibt es insgesamt 5: eine Hauptstation und 4 unbemannte Stationen. Die Stationen erhalten ständig Daten von den Satelliten, die in der Hauptstation ausgewertet werden. Dort können diese Daten dazu führen, dass die Umlaufbahnen oder Uhren der Satelliten korrigiert werden.

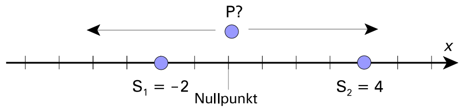
Die Satelliten senden laufend auf einer Radio-Frequenz ein Datenpaket aus, das u. a. die Sendezeit und die augenblickliche Position des Satelliten enthält. Der Empfänger auf der Erde bestimmt die Ankunftszeit des Signals. Aus der Laufzeit (zwischen 0,067 s und 0,086 s) ergibt sich dann die Entfernung zum Satelliten. Mit drei solcher Messungen zu verschiedenen Satelliten kann man die Position des Empfängers im Raum bestimmen.
Vom jeweiligen Satelliten aus gesehen befindet sich der Empfänger nämlich auf der Oberfläche einer Kugel, deren Radius gerade über die Signallaufzeit bestimmt wurde. Zwei solcher Kugeloberflächen schneiden sich in einem Kreis, der wiederum die dritte Kugeloberfläche in zwei Punkten schneidet, von denen einer meist sofort ausgeschlossen werden kann.

Aber ganz so einfach liegen die Verhältnisse in Wirklichkeit nicht. Da die Signale mit Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum 299792,5 km/s) übertragen werden, sind die Anforderungen an die Genauigkeit enorm: Ein Laufzeitfehler von einer tausendstel Sekunde würde einen Distanzfehler von 300 km bewirken und damit das System unbrauchbar machen. Die erforderliche Präzision lässt sich nur mit Atomuhren erreichen. An Bord der Satelliten werden daher Cäsium- und Rubidiumatomuhren verwendet, die regelmäßig von fünf Bodenstationen kontrolliert und nachgeregelt werden.
Prinzipiell benötigt man im Empfänger die gleiche Genauigkeit; allerdings wird man dort aus Gewichts- und Kostengründen keine Atomuhr zur Verfügung haben. Man muss daher ein Verfahren ersinnen, das den Uhrenfehler des Empfängers eliminiert.

II. Positionsbestimmung
über den Kreis zur Kugel

Aufgabe 1

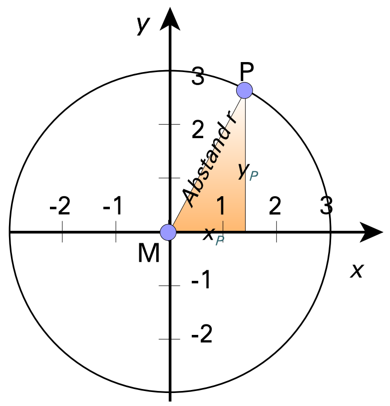
Positionsbestimmung eindimensional
Situation auf einer Linie



Der Nullpunkt ist gekennzeichnet, wir messen in x-Richtung. Gegeben sind zwei Punkte $S_1 = -2$ und $S_2 = 4$, die zwei Satelliten darstellen sollen.
Gesucht ist die Position x_P des Punktes P.

Bestimmen Sie geometrisch und formal rechnerisch die Position von P, wenn der Abstand zu S_1 mit 4 und der Abstand zu S_2 mit 2 gemessen wurde.

Unter welcher Voraussetzung sind wirklich zwei „Satelliten" zur eindeutigen Positionsbestimmung von P notwendig? Erläutern Sie, wann dazu ein „Satellit" ausreicht.



Kreis

Die Kreislinie ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Punkt M (Mittelpunkt) denselben Abstand haben. Dieser Abstand heißt auch Radius.

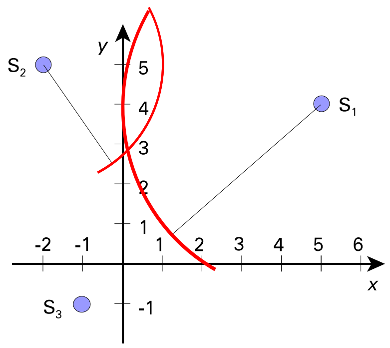
Durch diese Definition und mit Hilfe des Satzes von Pythagoras kann man eine einfache Beziehung zwischen der x- und der y-Koordinate eines jeden Punktes auf der Kreislinie und dem Radius r formulieren, falls der Mittelpunkt M des Kreise im Nullpunkt liegt:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ändern Sie die Gleichung so ab, dass eine Kreislinie ebenfalls mit dem Radius r, aber mit dem Mittelpunkt $M = (x_M | y_M)$ beschrieben wird.

Aufgabe 2

Positionsbestimmung zweidimensional
Situation in der Ebene



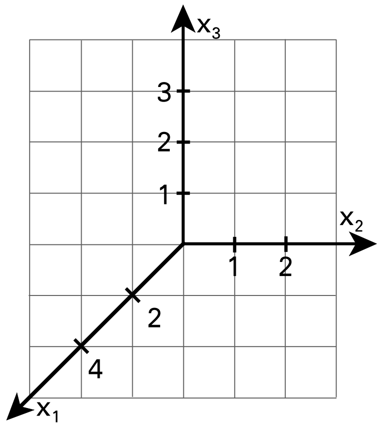
Gegeben sind drei Punkte $S_1\,(5|4)$, $S_2(-2|5)$ und $S_3(-1|-1)$, die drei Satelliten darstellen sollen.
Gesucht ist die Position $(x_P|y_P)$ eines Punktes P, dessen Entfernungen zu S_1 mit 5 und zu S_2 mit 3 gemessen werden.

Bestimmen Sie geometrisch und formal rechnerisch, welchen Abstand S_3 messen wird, und geben Sie damit die Position von P an.

Unter welcher Voraussetzung sind tatsächlich drei „Satelliten" zur eindeutigen Bestimmung der Position von P notwendig? Erläutern Sie, wann man mit zwei „Satelliten" auskommen könnte.

3D-Koordinatensystem

Die Positionsbestimmung im Dreidimensionalen erfordert zunächst eine Vereinbarung über ein entsprechendes Koordinatensystem.
Eine oft verwendete Möglichkeit ist die rechts abgebildete, bei welcher der 90°-Winkel zwischen der x_2- und x_1-Achse als 135°-Winkel dargestellt wird und die x_1-Koordinaten mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gestaucht werden, d.h.
Länge Kästchendiagonale ≙ 2 Kästchen.
Das ist mit Karopapier leicht zu realisieren und vermittelt eine gewisse räumliche Perspektive.

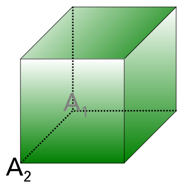


Aufgabe 3

Diese Aufgabe dient dazu, die Verwendung des Koordinatensystems zu verdeutlichen.

Ein Würfel mit der Kantenlänge 2 LE stehe so auf der x_1x_2-Ebene, dass zwei seiner Eckpunkte auf der x_1-Achse liegen: $A_1 = (2|0|0)$ und $A_2 = (4|0|0)$.

a) Zeichnen Sie diese Punkte in obiges Koordinatensystem, wobei eine Kästchenlänge einer Längeneinheit (LE) entsprechen soll. Beachten Sie dabei den Hinweis zur x_1-Achse.



b) Zeichnen Sie nun den kompletten Würfel ein und ermitteln Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte.
ODER
Ermitteln Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte und zeichnen Sie so den Würfel.

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass jeder Punkt $X = (x_1|x_2|x_3)$ auf der Kugeloberfläche der Kugel-Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

genügt, sofern der Mittelpunkt im Ursprung liegt und r der Radius der Kugel ist.

Alternative Schreibweise aus G2:
$X \cdot X = r^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

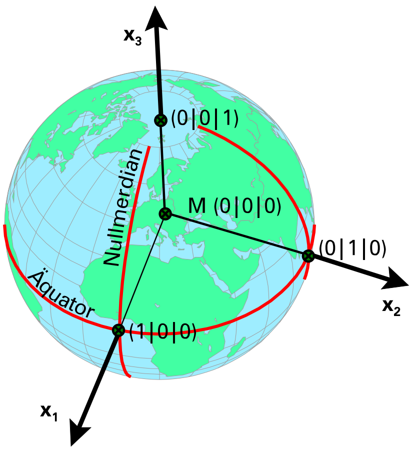
b) Definieren Sie die Länge eines Vektors (Abstand eines Punktes vom Ursprung, Abstand zweier Punkte).
Begründen Sie Ihre Definition und erproben Sie diese an einigen Beispielen.
Schreibweise:
Ein Punkt P habe die Koordinaten $(p_1|p_2|p_3)$, der Pfeil vom Ursprung nach P heißt dann p, dessen Länge $|p|$ entspricht dem Abstand des Punktes P vom Ursprung bzw. der Länge der Strecke vom Ursprung nach P: $|0P|$.

c) Ermitteln Sie analog zum Kreis die Kugel-Gleichung für einen beliebigen Mittelpunkt $M\ (m_1|m_2|m_3)$.

Aufgabe 5 · paradigmatisches Beispiel

Eine Person bestimmt ihre Position auf der Erdoberfläche mit Hilfe eines GPS-Gerätes. Dieser Vorgang soll in dieser Aufgabe prinzipiell nachvollzogen werden.

Wir machen dazu folgende vereinfachende Annahmen:



- Die Erde ist eine ideale Kugel mit einem Radius von 6.371 km.
  Als Längeneinheit wählen wir gerade diesen Erdradius.
- Weiterhin betrachten wir folgendes erdgebundene Koordinatensystem: Der Koordinatenursprung ist der Erdmittelpunkt.
  Die x_3-Achse liegt auf der Erdachse und zeigt zum Nordpol. Der Nordpol ist also der Einheitspunkt auf der x_3-Achse mit den Koordinaten (0|0|1).
  Die x_1-Achse geht durch den Schnittpunkt von Äquator und Nullmeridian, dieser Punkt ist der Einheitspunkt auf der x_1-Achse, hat also die Koordinaten (1|0|0).
  Der Einheitspunkt auf der x_2-Achse hat dann die Koordinaten (0|1|0) (und 0° Breite und 90° östliche Länge).
- Zu einem genau fixierten Zeitpunkt der Positionsbestimmung empfängt die Person mit ihrem GPS-Gerät von zwei GPS Satelliten deren genaue Positionen Sat_1 und Sat_2 in dem genannten rechtwinkligen Koordinatensystem. Außerdem empfängt der GPS-Empfänger die genaue Uhrzeit in den Satelliten zum Zeitpunkt der Aussendung der Signale. Aus der Zeitdifferenz der beiden Uhren in den Satelliten und im GPS-Empfänger zum Empfangszeitpunkt kann dieser (mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit) die Entfernungen d_1 und d_2 von seiner unbekannten Position zu den beiden Satelliten berechnen. (Dies ist in Wirklichkeit wegen der Ungenauigkeit der Empfängeruhr komplizierter!)

Positionen und Messergebnis

$Sat_1 = (2\|2\|3)$	$d_1 = 3{,}2$
$Sat_2 = (3\|2\|2)$	$d_2 = 3{,}3$

a) Beschreiben Sie den prinzipiellen Weg, wie man den Standort der Person aus den gegebenen Daten berechnen kann.

b) Betrachten Sie die Kugel um Sat_1 mit dem Radius d_1 und stellen Sie die Gleichung der Kugeloberfläche auf.
Berechnen Sie die Schnittmenge E_1 dieser Kugeloberfläche mit der Erdoberfläche.

Berechnen Sie analog die Schnittmenge E_2 der Erdoberfläche mit der Kugel um Sat_2 mit dem Radius d_2.

Um welches geometrische Objekt handelt es sich jeweils bei dieser Schnittmenge?
Begründen Sie Ihre Antwort auf verschiedene Arten (siehe Vorschläge links).

Schnittmenge Kugel / Kugel
Ergebnis der Berechnungen
graphische Darstellung des Ergebnisses

Und wie kann jetzt die Position der Person berechnet werden?

✎___ Arbeitsblatt

Möglicher Lösungsweg zu Aufgabe 5b), 1. Absatz:

Alle Punkte auf der Oberfläche einer Kugel um Sat_1 (2|2|3) mit dem Radius d_1 = 3,2 genügen der Gleichung $(x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-3)^2 = 3{,}2^2 \Leftrightarrow$ I $x_1^2-4x_1+4 + x_2^2-4x_2+4 + x_3^2-6x_3+9 = 10{,}24$

Alle Punkte auf der Erdoberfläche erfüllen Gleichung II $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

Die Punkte, die zur Schnittmenge dieser beiden Kugeln gehören, müssen beide Gleichungen erfüllen.

II – I: $4x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 17 = -9{,}24 \Leftrightarrow 4x_1 + 4x_2 + 6\,x_3 = 7{,}76$. Multiplikation mit 25 ergibt

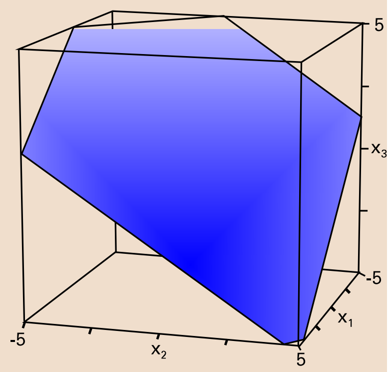
✶ $100\,x_1 + 100\,x_2 + 150\,x_3 = 194$

Das Arbeitsblatt basiert auf dieser Darstellung ✶.

Gesucht ist eine geometrische Beschreibung der Menge aller Punkte, die durch obige Gleichung ✶ $100\,x_1 + 100\,x_2 + 150\,x_3 = 194$ bestimmt ist.

- Wie müsste die Schnittmenge zweier Kugeloberflächen eigentlich aussehen und was könnte der Grund dafür sein, dass ✶ nicht dieser Schnittmenge entspricht?
  ✎

- Nebenstehende Abbildung ist eine graphische Darstellung obiger Gleichung ✶.
  Was schließen Sie aus dieser Abbildung?
  ✎



- Gesucht ist z.B. der Punkt auf der x_3-Achse, der obige Gleichung erfüllt. Ein solcher Punkt R hat die Koordinaten $(0|0|r_3)$, und r_3 muss so gewählt werden, dass ✶ gilt:

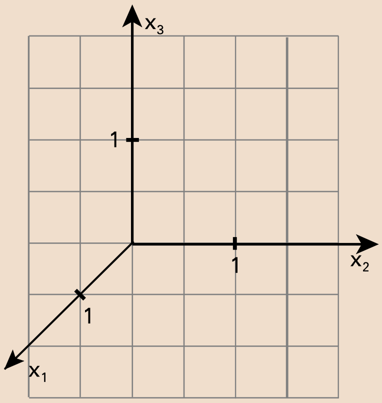
  $100 \cdot 0 + 100 \cdot 0 + 150 \cdot r_3 = 194 \Rightarrow r_3 = \frac{194}{150} \approx 1{,}29$.

  R ≈ (0|0|1,29) gehört also zur Menge aller Punkte, die ✶ erfüllen.

  Bestimmten Sie die beiden weiteren Achsenschnittpunkte P (mit der x_1-Achse) und Q (mit der x_2-Achse), die obige Gleichung erfüllen.
  ✎

- Skizzieren Sie die drei Punkte P, Q und R in das Koordinatensystem.

  Sei p der Pfeil von R nach P und q der Pfeil von R nach Q.
  Zeichnen Sie die Pfeile ins Koordinatensystem und berechnen Sie deren Koordinaten.
  ✎



- In G2 *(Matrizen und Vektoren als Datenspeicher)* haben Sie die Addition zweier Vektoren kennen gelernt und die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl.

  Deuten Sie diese rechnerischen Operationen geometrisch.
  ✎

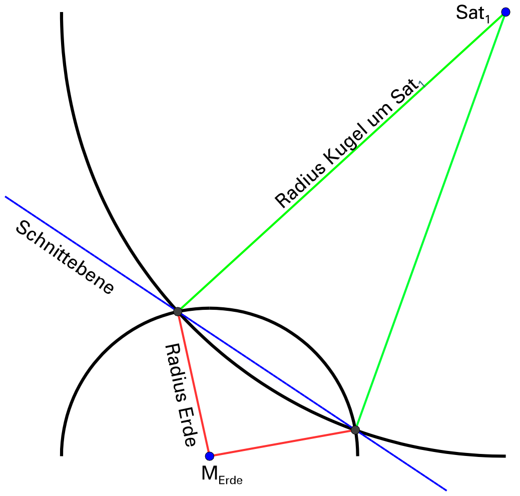
- Untersuchen Sie die Menge aller Punkte X mit

  $$X = R + \lambda \cdot p + \mu \cdot q \quad (\text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

  und deren Zusammenhang mit ✶.
  ✎

III. Ebenen und Geraden
ausgehend von der Kugel

Die Schnittmenge zweier Kugeloberflächen liegt in einer Ebene. Die Subtraktion der beiden Gleichungen oben hat das System vereinfacht, aus zwei nicht linearen Gleichungen wurde eine lineare Gleichung – die Gleichung der Schnittebene. Doch eine der beiden Ausgangsgleichungen gilt weiterhin, sodass sich als Schnittmenge tatsächlich ein Kreis ergibt *(nämlich als Begrenzung der Grundfläche eines Kegels in der Kugel um Sat_1 mit deren Radius als Seitenlinie und eines zweiten Kegels in der Erdkugel mit deren Radius als Seitenlinie)*.



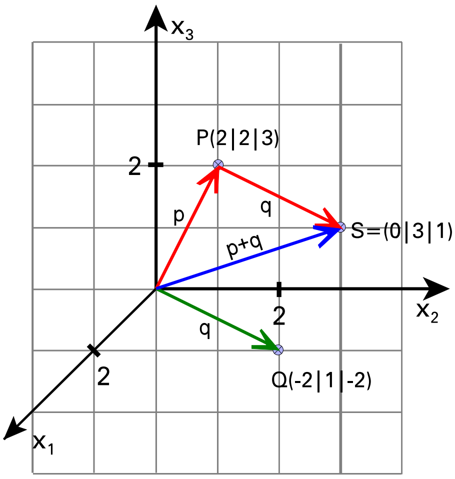
Wie kann man nun einsehen, dass die Gleichung

$$E:\ 100\,x_1 + 100\,x_2 + 150\,x_3 = 194$$

eine Ebene beschreibt?
Die drei Variablen *(das sind die Koordinaten der beschriebenen Punkte)* sind linear kombiniert: die Variablen tauchen nur in der 1. Potenz auf *(daher linear)*, sind gegebenenfalls mit einer Zahl multipliziert; diese Vielfachen werden addiert. Daher ist die Steigung in Richtung einer Variablen jeweils konstant.
Diese Form der Ebenengleichung heißt *Koordinatenform*.

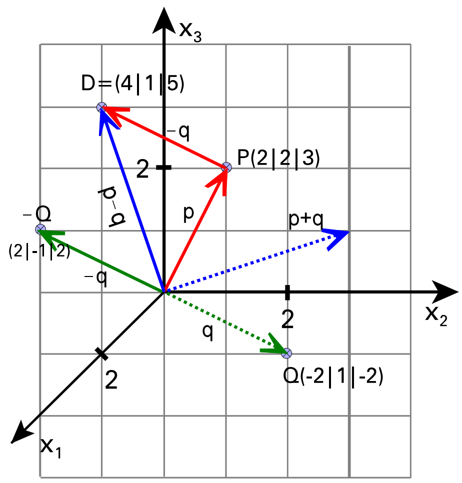
Jede Gleichung eines linearen Gleichungssystems mit drei Variablen hat diese Form!

Dass wirklich eine Ebene beschrieben wird, ist bei der Parameterform der Ebenengleichung sofort ersichtlich. Diese Darstellung wird jetzt behandelt.



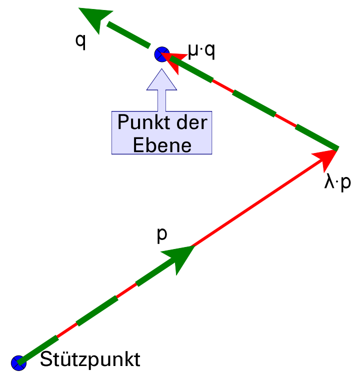
Addition von Vektoren und deren Multiplikation mit einer Zahl sind schon in G2 vorgekommen, hier geht es um die geometrische Interpretation, die auch für die Parameterform der Ebenengleichung benötigt wird.

Addition
Die Punkte P (2|2|3) und Q(−2|1|−2) sind in das rechte Koordinatensystem eingetragen, ebenso der Punkt S = P+Q. Interpretiert man die Punkte als Pfeile, die eindeutig bestimmt sind durch ihre Länge und Richtung und daher verschiedene Startpunkt haben können, so wird der Anfang von Pfeil q in den Punkt P verschoben. Er endet jetzt in S (= P+Q). Der Pfeil vom Ursprung nach S kann also als Summe p+q gedeutet werden.



Multiplikation mit einer Zahl
Ist λ eine von Null verschiedene reelle Zahl, so bedeutet die Multiplikation λ · q geometrisch eine entsprechende Änderung der Länge von q (λ-fache Länge). Die Richtung bleibt für positives λ unverändert, für negatives λ ändert sich die Richtung um 180°, der Pfeil zeigt also in die entgegengesetzte Richtung.
Damit kann durch Multiplikation mit (−1) auch die Differenz gebildet werden, siehe die Abbildung rechts:
„P − Q = P + (−1) · Q“ kann auf Pfeile übertragen werden.

Die Multiplikation mit der Zahl Null ergibt den Nullpunkt (Nullvektor).



Eine Summe $\lambda \cdot p + \mu \cdot q$ heißt *Linearkombination*.
Ausgehend von einem Stützpunkt R, der auch der Nullpunkt sein darf, wird durch die beiden Pfeile *(Vektoren)* p und q so eine ebene unbegrenzte Fläche aufgespannt, die *Ebene* heißt. Jeder Punkt X der Ebene ist dann mit geeigneten λ und μ darstellbar als

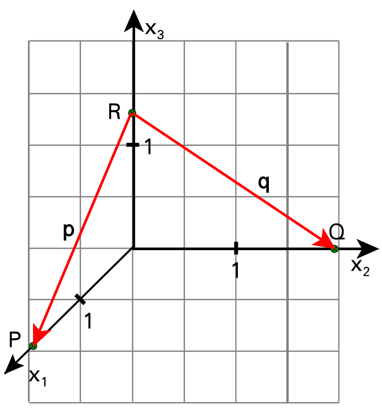
$$E: \quad X = R + \lambda \cdot p + \mu \cdot q.$$

Diese Form der Ebenengleichung heißt *Parameterform*.

Die Voraussetzung ist allerdings, dass die Vektoren p und q nicht in dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung zeigen.

Gibt es eine Zahl c mit $p = c \cdot q$, so zeigen diese beiden Pfeile in dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung. In diesem Fall heißen die beiden Pfeile *linear abhängig*, zeigen sie in verschiedene Richtungen (ohne entgegengesetzt), so nennt man sie *linear unabhängig*.

Und wie erhält jetzt die obige Ebenengleichung in Parameterform? Dazu kann man drei Punkte der Ebene ermitteln *(, die nicht auf einer Geraden liegen)*, z.B. die Schnittpunkte mit den Achsen:
Schnittpunkt mit der x_1-Achse (also $x_2 = x_3 = 0$)
$P = (1{,}94|0|0)$,
Schnittpunkt mit der x_2-Achse (also $x_1 = x_3 = 0$)
$Q = (0|1{,}94|0)$.
Der Schnittpunkt mit der x_3-Achse (also $x_1 = x_2 = 0$)
$R \approx (0|0|1{,}29)$.

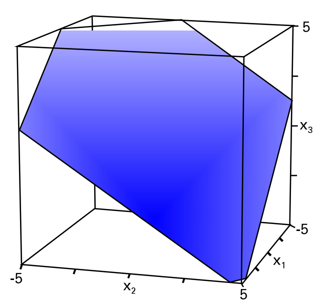


Wählt man R als Stützpunkt, so müssen noch die Pfeile von R nach P und von R nach Q berechnet werden:

Pfeil von R nach P = $\vec{p} = \vec{RP} = P - R = \begin{pmatrix} 1{,}94 \\ 0 \\ -1{,}29 \end{pmatrix}$

Pfeil von R nach Q = $\vec{q} = \vec{RQ} = Q - R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}94 \\ -1{,}29 \end{pmatrix}$

Beide Vektoren können nicht Vielfache voneinander sein, da verschiedene Komponenten 0 sind. Sie sind also linear unabhängig. Damit ist



$$E: \quad X = R + \lambda \cdot \vec{p} + \mu \cdot \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}29 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1{,}94 \\ 0 \\ -1{,}29 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}94 \\ -1{,}29 \end{pmatrix}$$

die Parameterform *(wegen R gerundet)* der Ebene

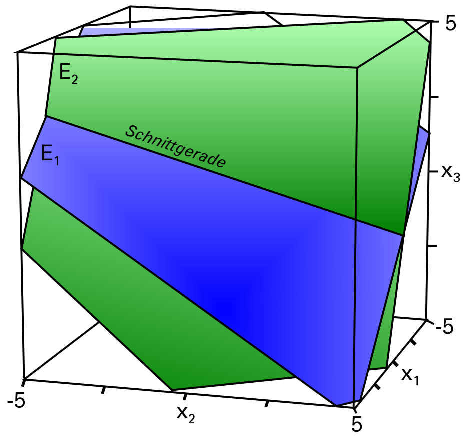
$$E: 100\,x_1 + 100\,x_2 + 150\,x_3 = 194.$$

Prüfen Sie es nach durch Einsetzen verschiedener Werte für λ und μ in die erste Gleichung und Einsetzen der sich ergebenden Koordinaten in die zweite Gleichung!

Haben Sie auch die Schnittebene der Kugel um Sat_2 mit dem Radius d_2 und der Erdkugel berechnet, so haben Sie

$$E_2\colon 600\,x_1 + 400\,x_2 + 400\,x_3 = 711$$

erhalten (oder äquivalentes).



Wie verhalten sich die beiden Ebenen zueinander? Welche Möglichkeiten gibt es? Siehe dazu Aufgabe 6 auf der folgenden Seite.

Lassen Sie sich die neue Ebene 2 zur bisherigen dazu zeichnen, ergibt sich nebenstehendes Bild: die beiden Ebenen scheinen sich in einer Geraden zu schneiden.

Es liegen zwei Gleichungen mit drei Variablen vor:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 100\,x_1 + 100\,x_2 + 150\,x_3 = 194 \\ \text{II} & 600\,x_1 + 400\,x_2 + 400\,x_3 = 711 \end{array}$$

$$\text{II} - 4\cdot\text{I}\colon\ 200\,x_1 - 200\,x_3 = -65 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = x_1 + \frac{13}{40}$$

Einsetzen in I und Auflösen nach x_2: $\quad x_2 = -2{,}5\,x_1 + \dfrac{581}{400}$.

Jeder Punkt dieser Schnittmenge wird beschrieben durch

$$(x_1|x_2|x_3) = \left(x_1 \middle| -2{,}5x_1 + \frac{581}{400} \middle| x_1 + \frac{13}{40}\right) =$$

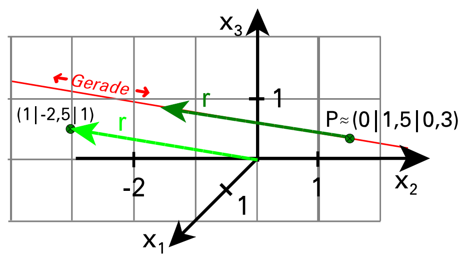
$$= x_1 \cdot (1\,|\,-2{,}5\,|\,1) + \left(0 \middle| \frac{581}{400} \middle| \frac{13}{40}\right)$$, hat also die Form

$X = P + \lambda \cdot r$ = *Stützpunkt + Parameter mal Richtungsvektor*

Der Name des Parameters ist beliebig, hier ist der kleine griechische Buchstaben λ („Lambda“) gewählt.

mit Stützpunkt $P = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{581}{400} \\ \frac{13}{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}4525 \\ 0{,}325 \end{pmatrix}$

und Richtungsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$, der als Pfeil aufgefasst wird.



Die Punkte der Schnittmenge liegen also auf einer Geraden, wie nebenstehende Abbildung deutlich macht, aber auch aus der Gleichung geschlossen werden kann: Vom Stützpunkt P aus erreicht man diese Punkte in einer festen Richtung, die durch den Richtungsvektor gegeben ist.

Jede Gleichung der Form

$$g\colon X = P + \lambda \cdot r$$

beschreibt eine Gerade, die Form heißt *Parameterform*

In den folgenden Aufgaben werden u.a. die möglichen Beziehungen zwischen Ebenen und Geraden untersucht.

Aufgabe 6

Beziehungen zwischen 2 Ebenen

a) Sie haben durch Rechnung festgestellt, dass sich die beiden Ebenen aus Aufgabe 5 in einer Geraden schneiden.

- Welche Beziehungen zwischen zwei Ebenen sind noch möglich?
- Wie lässt sich die Beziehung aus den Gleichungen der beiden Ebenen schließen?

Koordinaten- und Parameterform

Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

b) Die Beziehungen zwischen zwei Ebenen, die in Koordinatenform vorliegen, kann über die Lösung eines linearen Gleichungssystems geschehen (2 Gleichungen mit 3 Variablen, also unterbestimmt). Die Lösungsmenge kann z.B. eine Gerade beschreiben (s.o.).

Die Lösungsmenge enthält 1 Variable (die beiden anderen Variablen können mit dieser ausgedrückt werden, siehe S. 9)

Beschreiben Sie auf Grund Ihrer Ergebnisse von a), welche Lösungsmengen bei einem linearen Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Variablen auftreten können.

Aufgabe 7

Die Parameterform ist ein Bildungsgesetz für alle Punkte der Ebene.
TIPP für Umformung:
In 3 Gleichungen mit 5 Variablen aufschreiben und λ und μ eliminieren. Das ergibt eine Gleichung mit x_1, x_2 und x_3.

a) Gegeben ist die Ebene E in Parameterform

$$E:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Ermitteln Sie die Koordinatenform zu E.

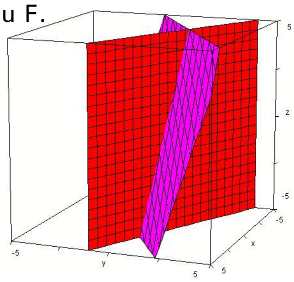
Die Koordinatenform gibt eine Beziehung der drei Koordinaten für alle Punkte der Ebene an.
TIPP für Umformung:
1 Nach einer der Koordinaten auflösen, z.B. x_1
2 Die beiden übrigen Koordinaten erhalten neue Namen, z.B. λ und μ.
3 Eintrag der drei Komponenten in einen Vektor, der linear in seine Bestandteile zerlegt wird.

b) Gegeben ist die Ebene F in Koordinatenform

F: $x_1 + 2x_2 = 3$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Parameterform zu F.

c) Untersuchen Sie die Beziehung der beiden Ebenen.



Aufgabe 8

Beziehungen zwischen 2 Geraden

a) Geben Sie ein Beispiel für zwei parallele Geraden im Raum an und begründen Sie, warum diese Geraden parallel verlaufen müssen.

b) Welche weiteren Beziehungen zwischen zwei Geraden im Raum sind möglich?
Geben Sie entsprechende Beispiele an und formulieren Sie allgemeine Kriterien für die Lagebeziehungen.

Beispiel für Beziehung Gerade / Ebene

c) Ermitteln Sie eine Gerade, die in der Ebene E aus Aufgabe 7 liegt, und eine Gerade in Ebene F.
Untersuchen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden.

Aufgabe 9

Gegeben sind die Punkte A (−1|6|1), B (2|2|2), C (0|7|−1) sowie P (0|6|6) und Q (6|6|6).
Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C.

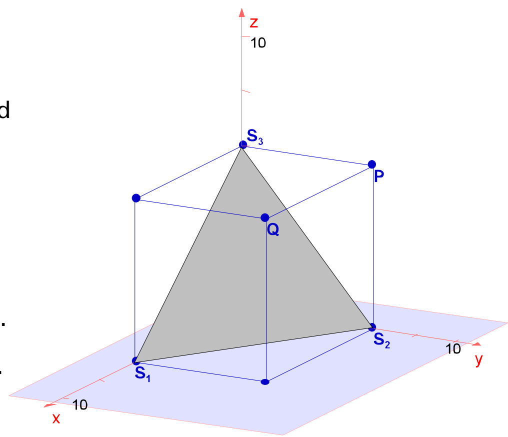
a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, die durch die Punkte P und Q geht.

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 von E mit den Koordinatenachsen.

S_1, S_2, S_3 und der Koordinatenursprung sind vier Eckpunkte eines Würfels. Zeichen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und den Würfel in ein geeignetes Koordinatensystem.

Zeigen Sie, dass die Punkte P und Q ebenfalls Eckpunkte des Würfels sind.



c) Gegeben ist eine Ebene F durch die Eckpunkte P und Q des Würfels aus Aufgabenteil b) und den Punkt R (6|0|4).

Bestimmen Sie den Schnittpunkt von F mit der x_3-Achse.

Zeichen Sie den im Würfel befindlichen Teil der Ebene F in obiges Koordinatensystem ein.
Die Ebene F zerlegt den Würfel in zwei Teile. Ermitteln Sie das Verhältnis der Volumeninhalte der entstandenen Teilkörper.

Teile einer Aufgabe des Zentralabiturs 2006 in Hamburg.

Aufgabe 10

Zur Aufgabe 5 (S. 4) sind bisher die Schnittebenen zwischen je einem der beiden Satelliten und der Erdkugel berechnet worden sowie deren Schnittgerade.

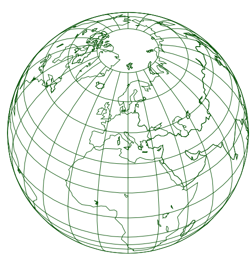
Schnittgerade g: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}4525 \\ 0{,}325 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die gesuchte Position liegt also auf dieser Schnittgeraden, aber auch auf der Erdoberfläche.
Ermitteln Sie die beiden Schnittpunkte der Geraden mit der Erdoberfläche.

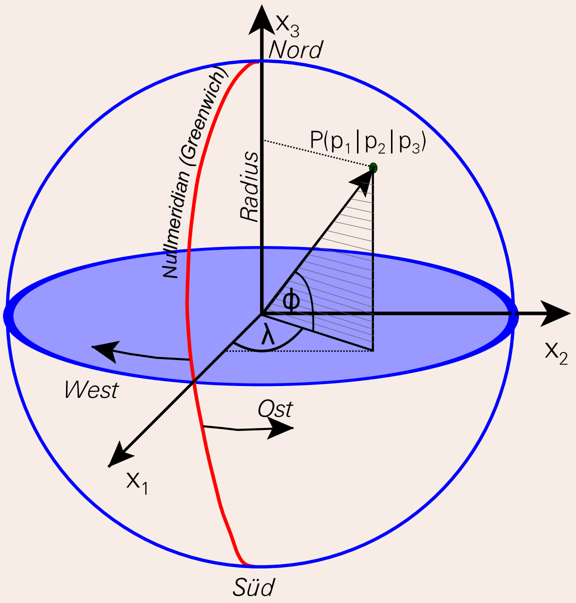
Erdoberfläche: $X \cdot X = X^2 = 1$

Als Ergebnisse sollten Sie die beiden Punkte Pos_1 und Pos_2 erhalten:

$Pos_1 \approx (0{,}516|0{,}162|0{,}841)$ und
$Pos_2 \approx (0{,}285|0{,}739|0{,}610)$



Doch wo liegen diese Punkte? Die kartesischen Koordinaten werden normalerweise nicht zur Orientierung auf der Erdoberfläche verwendet, sondern die *geographischen Koordinaten*: ein Koordinatennetz, das aus *Breitenkreisen* besteht, die parallel zum Äquator verlaufen, und *Längenkreisen* (Meridianen), die senkrecht zu den Breitenkreisen von Pol zu Pol verlaufen.



Geographische Koordinaten:

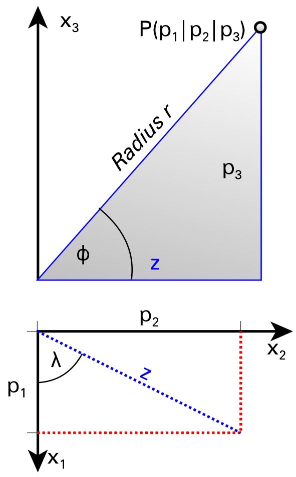
In nebenstehender Abbildung beschreibt

- λ die (geographische) Länge und
- ϕ die (geographische) Breite.

Länge: $-180° \le \lambda \le 180°$
wird vom Nullmeridian (Meridian von Greenwich) aus östlich und westlich gezählt
von 0° bis 180° (östliche Länge)
von 0° bis −180° (westliche Länge)

Breite: $-90° \le \phi \le 90°$
wird vom Äquator aus polwärts gezählt
von 0° bis 90° (nördliche Breite)
Von 0° bis −90° (südliche Breite)

Die Angabe der Himmelsrichtung ersetzt teilweise die Vorzeichenangabe.



Aufgabe 11

Leiten Sie mit Hilfe der obigen Abbildung die nachfolgende Beziehung zwischen den kartesischen Koordinaten und den geographischen Koordinaten her:

$$x_1 = r \cdot \cos\lambda \cdot \cos\phi$$
$$x_2 = r \cdot \sin\lambda \cdot \cos\phi$$
$$x_3 = r \cdot \sin\phi$$

Aufgabe 12

Erdradius $r \approx 6371$ km

a) Hamburg hat etwa die geographischen Koordinaten

10° O ; 53,5° N.

Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten.

obige Formeln „rückwärts“: beginnen Sie mit x_3

b) Osnabrück hat (gerundet) die kartesischen Koordinaten

(3858|542|5041).

Ermitteln Sie aus obigen Beziehungen die geographischen Koordinaten.

c) Ermitteln Sie zu den kartesischen Koordinaten der beiden Positionen von Aufgabe 10 (bzw. 5) die geographischen Koordinaten.
Welche der Positionen ist der Standort der Person, wenn ihr bekannt ist, dass sie sich in Nordeuropa befindet?

IV. Länge und Winkel
mit dem Skalarprodukt

Das Skalarprodukt, das Sie als Rechenvorgang bereits aus G2 kennen, erfährt nun geometrische Deutungen.

- *Das Skalarprodukt wird verwendet, um die Länge eines Vektors zu berechnen.*
- *Das Skalarprodukt wird verwendet, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen.*

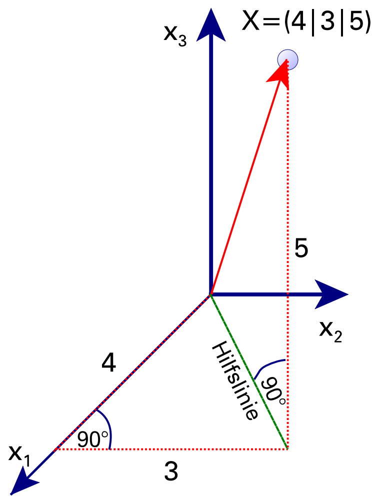
Die Multiplikation zweier Vektoren

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

heißt *Skalarprodukt*.

Die *Länge eines Vektors* x (bzw. der Abstand des Punktes X vom Nullpunkt) wird berechnet mit

$$|\vec{x}| = |X| = \sqrt{X^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$



Aufgabe 13

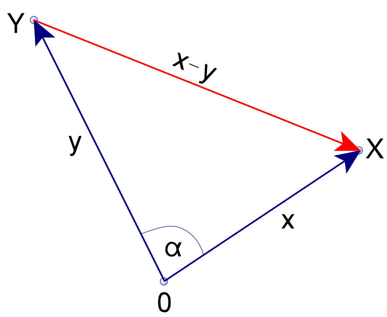
a) Sei X = (4|3|5) und x der Pfeil vom Ursprung nach X. Berechnen Sie die Länge von x, also |x|.

b) Versuchen Sie, die eben verwendete Formel zur Berechnung der Länge zu beweisen. Siehe dazu auch nebenstehende Abbildung.

Der *Winkel α zwischen zwei Vektoren* x und y kann ermittelt werden durch

$$\cos\alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}.$$

(x ≠ 0 und y ≠ 0)



Das rechts abgebildete Dreieck hat als einen Eckpunkt den Nullpunkt. Ein Verschieben des Dreiecks in einen anderen Punkt bewirkt keine Änderungen an der folgenden Rechnung.

Nach dem Cosinus-Satz gilt:

$|X - Y|^2 = |X|^2 + |Y|^2 - 2 \cdot |X| \cdot |Y| \cdot \cos\alpha.$

Skalarprodukt angewendet, Wurzel entfällt durch Quadrieren:

$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 =$
$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - 2 \cdot |X| \cdot |Y| \cdot \cos\alpha$

$-2 \cdot x_1 y_1 - 2 \cdot x_2 y_2 - 2 \cdot x_3 y_3 = -2 \cdot |X| \cdot |Y| \cdot \cos\alpha \quad |:(-2)$

$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = |X| \cdot |Y| \cdot \cos\alpha$ oder

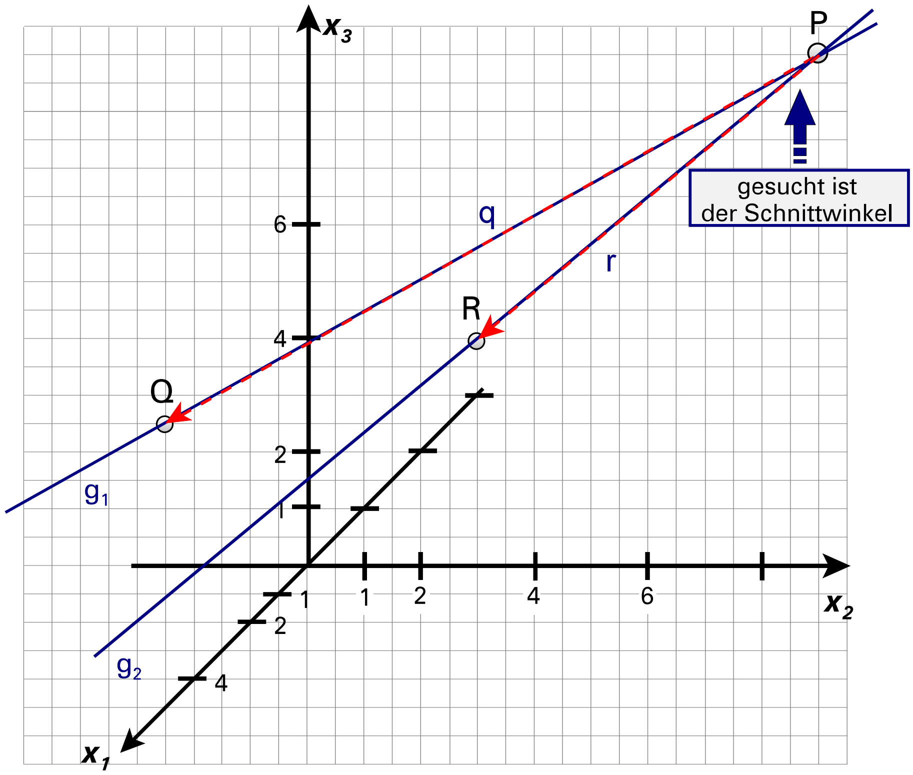
$X \cdot Y = |X| \cdot |Y| \cdot \cos\alpha,$

woraus unmittelbar obige Formel folgt.

Beispiel

Gegeben sind die beiden Geraden g_1 und g_2, die sich im Punkt P schneiden.

Berechnet werden soll der Schnittwinkel dieser beiden Geraden.



Die Gerade g_1 geht durch die Punkte

P = (−6|6|6) und

Q = (1|−2|3).

Die Gerade g_2 geht durch die Punkte

P = (−6|6|6) und

R = (−2|2|3).

Die Geraden schneiden sich offenbar im Punkt P. Berechnen Sie den Schnittwinkel.

Notwendig dazu sind die Richtungsvektoren der Geraden:

- Richtungsvektor von g_1:

  $$q = Q - P = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Richtungsvektor von g_2:

  $$r = R - P = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Skalarprodukte für die Formel:

- $$q \cdot r = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = 28 + 32 + 9 = 69$$

- $$|q| = \left|\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{49+64+9} = \sqrt{122} \quad \text{und} \quad |r| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+16+9} = \sqrt{41}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{|\vec{q}|\cdot|\vec{r}|} = \frac{69}{\sqrt{122}\cdot\sqrt{41}} = \frac{69}{\sqrt{5002}} \approx 0{,}9756.$$

Damit ist der Schnittwinkel $\alpha \approx 12{,}7°$.

Aufgabe 14

Verwenden Sie für die Gerade g_2 aus dem Beispiel nun den Richtungsvektor $r_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Warum ergibt das dieselbe Gerade?

Berechnen Sie erneut den Schnittwinkel der beiden Geraden. Deuten Sie das Ergebnis im Vergleich zum Beispiel.

Berechnet wird der Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren

Aufgabe 15

a) Das Skalarprodukt zweier Vektoren a und b (jeweils ungleich dem Nullvektor) zeigt bei einem bestimmten Winkel zwischen den Vektoren diesen unmittelbar an.
Um welchen Winkel handelt es sich, und welchen Wert hat in diesem Fall das Skalarprodukt?
Begründen Sie Ihre Antwort.

wichtiger Sonderfall

b) Zeigen Sie, dass die Formel zum Berechnen eines Winkels zwischen zwei Vektoren a und b auch so geschrieben werden könnte:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}.$$

Wie unterscheidet sich der Vektor a vom Vektor $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$?

c) Untersuchen Sie, ob das Skalarprodukt kommutativ ist, also ob das Vertauschen der Faktoren das Ergebnis unverändert lässt.

Gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$?

Ein Vektor, der senkrecht auf einem anderen Objekt steht, heißt *Normalenvektor*.

Ist ein Normalenvektor zu einer Ebene gesucht und liegt diese Ebene in Koordinatenform vor, so ist ein Normalenvektor einfach abzulesen:

$$E:\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad n \perp E.$$

Dabei bedeutet $n \perp E$, dass der Normalenvektor n senkrecht auf jedem Vektor aus E steht.

Hinweis:
Die Ebene E lässt sich unter Verwendung des Skalarprodukts auch schreiben als

$$E:\ X \cdot n = d \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = d.$$

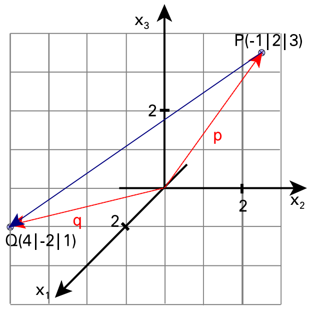
Siehe hierzu den Text nach Aufgabe 16.

Aufgabe 16

Ein allgemeiner Beweis ist natürlich erlaubt!

a) Versuchen Sie, die Behauptung im Kasten wenigstens an einem Beispiel zu überprüfen.
Wählen Sie dazu die Ebene F aus Aufgabe 7b), S. 10.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe von Normalenvektoren den Schnittwinkel der Ebenen E und F aus Aufgabe 7, S. 10.



c) Die Länge eines Vektors p kann auch als _Abstand zweier Punkte_ gedeutet werden: *der Abstand vom Nullpunkt zum Punkt P (an dem der Pfeil p endet).*

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Punkte P und Q mit $P = (-1|2|3)$ und $Q = (4|-2|1)$ (siehe Abb.).

E: $X \cdot \vec{n} = d$ bzw. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = d$

Sie haben in Aufgabe 16 zumindest an einem Beispiel gezeigt, dass n senkrecht auf der Ebene, auf jedem Vektor der Ebene steht.
Ist dann nebenstehende Schreibweise nicht ein Widerspruch dazu, wenn d nicht gerade 0 ist?

- Zunächst einmal ist X ein _Punkt_ der Ebene.

  Deutet man X als Pfeil bzw. Vektor x, so zeigt dieser vom Ursprung auf den Punkt X. x liegt also im Allgemeinen nicht in der Ebene, das Skalarprodukt ist dann tatsächlich verschieden von 0.

- Wählen Sie einen festen Punkt P der Ebene aus. Dann ist $x - p$ der Pfeil von P nach X und dieser liegt in der Ebene, d.h. auf diesem Vektor steht der Normalenvektor senkrecht. Es ist daher

$$(x - p) \cdot n = 0 \text{ oder auch } (X - P) \cdot n = 0.$$

Diese Gleichung beschreibt umgekehrt auch die Ebene (die Menge aller Punkte X der Ebene), auf der P liegt und die senkrecht zum Vektor n ist. Man kann sie noch umformen zu

$$X \cdot n = P \cdot n.$$

Und $P \cdot n$ ist eine Konstante, die oben d genannt wird.

Ist ein Normalenvektor einer Ebene bekannt, so steht die linke Seite der Gleichung in Koordinatenform fest: $X \cdot \mathbf{n} = ax_1 + bx_2 + cx_3$.
Ist ein Punkt $P = (p_1|p_2|p_3)$ bekannt, so ist $d = ap_1 + bp_2 + cp_3$ und die Gleichung komplett.

Aufgabe 17

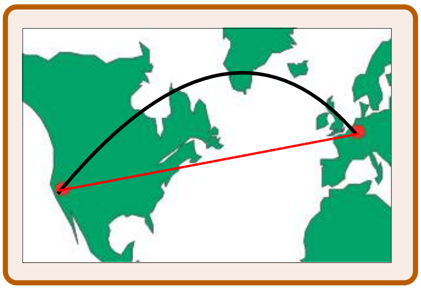
Erstellen Sie eine Übersicht der bisher behandelten Inhalte, die auch noch Ergänzungen zulässt.

Diese Übersicht soll Ihnen einerseits helfen, die folgenden Aufgaben zu bearbeiten, andererseits werden einige der Aufgaben auch zu Ergänzungen oder Korrekturen in Ihrer Übersicht Anlass sein.

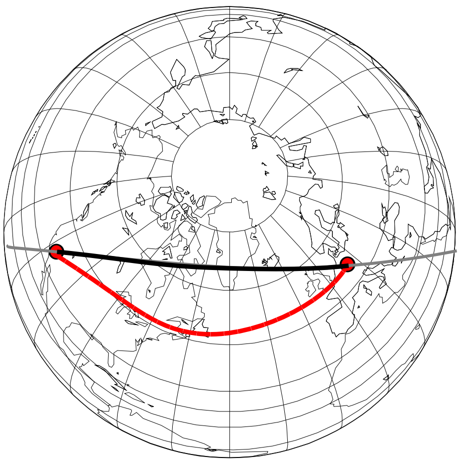
V. Kürzester Weg

Entfernung auf der Erdoberfläche

Um die Entfernung zweier Orte auf der Erdoberfläche zu bestimmen, ist es zunächst einmal notwendig, sich über die Art des Verbindungsweges zu verständigen.
Die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist ja normalerweise (d.h. in einer Ebene) eine Gerade. Bei großen Entfernungen auf der Erde müsste man dazu Tunnel graben.



Vielleicht sind Sie schon einmal mit einem Passagierflugzeug geflogen und haben sich über die scheinbar ungünstige Flugroute gewundert, die im Display angezeigt wird, z.B. bei einem Flug von Frankfurt nach Los Angeles: „Warum fliegen die über Grönland, wenn es doch direkt viel näher wäre?“

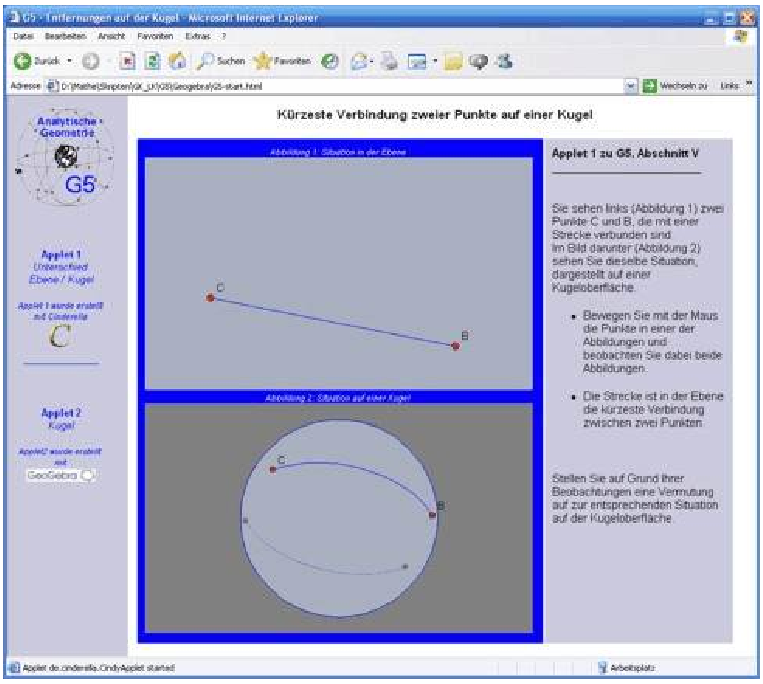


Die vermeintlich günstige Route (gestrichelt dargestellt) ist etwa 10.600 km lang, die vermeintlich ungünstige dagegen nur etwa 9.300 km.

Woran kann das liegen?

- Sehen Sie sich die Situation auf der Erdkugel an.
- Experimentieren Sie mit dem zugehörigen Applet.

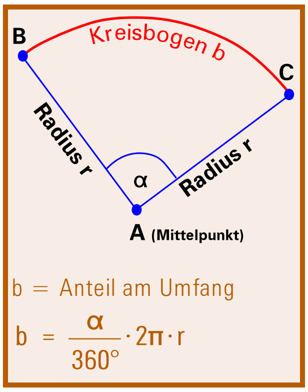
Versuchen Sie zu beschreiben, wie die Sie die kürzeste Verbindung zweier Punkte (oberirdisch) berechnen würden.



Das Applet 1 zu G5 ist links abgebildet.

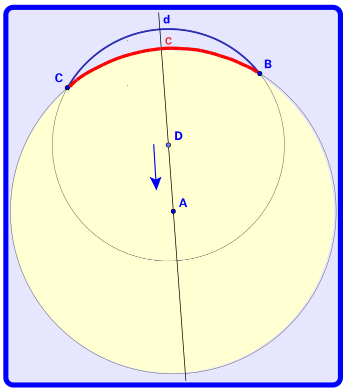
Dort wird die kürzeste Verbindung zweier Punkten C und B dargestellt in der Ebene und auf der Kugeloberfläche.

Bewegen Sie einen der Punkte in einem der Fenster, so ändert sich das Bild im anderen Fenster simultan.

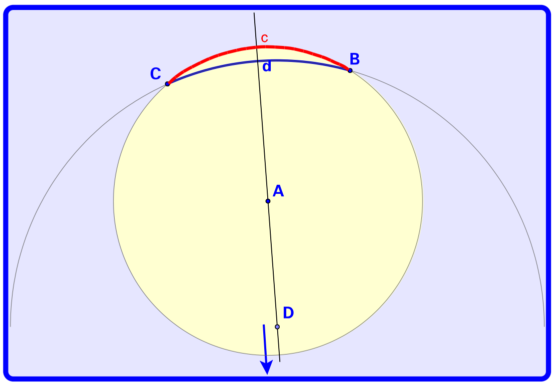


Bewegt man sich auf einer Kugeloberfläche, so bewegt man sich auf einem Kreisbogen. Um den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten zurückzulegen, ist eine Aufteilung dieses Weges in mehrere verschiedene Kreisbögen nur sinnvoll, wenn es unter bestimmten Bedingungen verschiedene optimale Kreisbögen – also mit minimaler Länge – gäbe.
Die Länge eines Kreisbogens hängt ab vom Radius des Kreises und dem Mittelpunktswinkel.

Das Applet 2 erlaubt es, den Mittelpunkt des Kreises so zu verschieben, dass der Kreis stets durch die Punkte B und C geht. Sie können dabei beobachten, wie sich die Länge des Bogens zwischen B und C verändert, im Bezug auf den anfangs gewählten Mittelpunkt A und auch im Bezug auf die Streckenlänge |BC|. Diese Längen werden im Applet angezeigt.



Situation 1



Situation 2

In beiden Situationen ist der Kreis um A unverändert geblieben, der Mittelpunkt D wurde verschoben, die zugehörige Bogenlänge hat sich dabei geändert: Je größer der Radius, desto weniger gekrümmt ist der Bogen und dessen Länge nimmt damit ab (und kommt der Strecke und deren Länge immer näher).
Der größte Radius für einen solchen Kreis auf der Erdkugel ist aber der Erdradius mit ca. 6371 km, als Mittelpunkt bleibt nur der Erdmittelpunkt. Ein solcher Kreis heißt *Großkreis*. Die Äquatorlinie und alle Längenkreise sind Großkreise, die restlichen Breitenkreise dagegen nicht.

Es gibt also im Falle der Bewegung auf der Erdoberfläche bzw. anderen Kugeln nur einen optimalen Kreisbogen:

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten
ist auf der (Erd-)Kugel jene längs eines Großkreises.

Beispiel:

Nachrechnen des kürzesten Weges zwischen Frankfurt ≈ (8,68° O; 50,11° N) und Los Angeles ≈ (118,24° W; 34,05° N).

1. Berechnung des sphärischen Winkels α mit dem Skalarprodukt, daher zunächst Umrechnung der Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten.

Punkte auf der Erdkugel berechnen (Höhe nicht berücksichtigt) ⇒ r = 6371.

Frankfurt = F = $(f_1|f_2|f_3)$ mit
$f_1 = 6371 \cdot \cos 8{,}68° \cdot \cos 50{,}11° \approx 4039{,}0$
$f_2 = 6371 \cdot \sin 8{,}68° \cdot \cos 50{,}11° \approx 616{,}6$
$f_3 = 6371 \cdot \sin 50{,}11° \approx 4888{,}3$

F ≈ (4039,0|616,6|4888,3)

Los Angeles = LA = $(a_1|a_2|a_3)$ mit
$a_1 = 6371 \cdot \cos(-118{,}24°) \cdot \cos 34{,}05° \approx -2497{,}7$
$a_2 = 6371 \cdot \sin(-118{,}24°) \cdot \cos 34{,}05° \approx -4650{,}4$
$a_3 = 6371 \cdot \sin 34{,}05° \approx 3567{,}2$

LA ≈ (−2497,7|−4650,4|3567,2)

Überlegungen zu LA: ϕ ist gerundet 34,05° N ⇒ x_3-Koordinate > 0.
λ ist gerundet 118,24° W
⇒ x_2-Koordinate < 0, da links vom Nullmeridian.
Bei 90° W wird die x_2-Achse überschritten und damit ist die x_1-Koordinate < 0.

Da für |F| und |LA| = 6371 gelten muss, ist

$$\cos\alpha = \frac{F \cdot LA}{6371^2} = \frac{4.481.896{,}82}{40.589.641} \approx 0{,}1104 \Rightarrow \alpha \approx 83{,}7°$$

α ≈ 83,7°

2. Berechnung der Bogenlänge (<u>sphärischer Abstand</u> oder orthodromer Abstand)

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot r = \frac{83{,}7°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6371 \approx 0{,}2325 \cdot 40.030{,}1736 \approx 9.307$$

b ≈ 9.307

Die kürzeste Verbindung beträgt gerundet 9.307 km, das entspricht obiger Angabe von „etwa 9.300 km“. Rundet man α weniger stark, ergibt sich 9.303 km.

Aufgabe 18

a) Berechnen Sie den sphärischen Abstand zwischen Hamburg und Osnabrück. *(Koordinaten in Aufgabe 12)*

b) Langstreckenflüge haben zumeist eine Flughöhe von ca. 12 km (über dem Meeresspiegel).
Welche Länge hat in dieser Höhe der kürzeste Weg zwischen (12 km über) Frankfurt und (12 km über) Los Angeles?

Die tatsächlich zurückgelegte Wegstrecke hängt zusätzlich u.a. von Windverhältnissen und Überflugsrechten ab. Zudem muss das Flugzeug ja die Flughöhe erst erreichen und rechtzeitig vor dem Landen wieder verlassen.

c) Wie ändert sich eigentlich der Umfang eines Kreises mit dem Radius 6371 km, wenn dieser um x km vergrößert oder verkleinert wird?
Definieren Sie eine Funktion, welche für jede Änderung des Radius die prozentuale Änderung des Umfangs ausgibt (bezogen auf r = 6371).

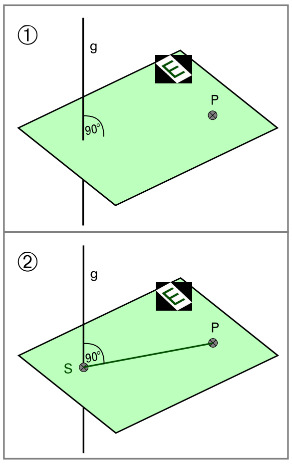
Wie ändert sich die Länge eines Kreisbogens?

VI. Aufgaben
mit Inhalten zu allen Kapiteln

Aufgabe Abstände 19

Abstandsberechnungen können zurückgeführt werden auf den Abstand zweier Punkte.
Sie berechnen in dieser Aufgabe den Abstand eines Punktes zu einer Geraden, einer Ebene und einer Kugel. Die dabei angegebenen Strategien sind nicht die einzig möglichen.

Skizze nicht maßstabsgerecht.



a) Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P mit

$$g:\ X = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \text{und } P = (1|1|2).$$

Gesucht ist der Abstand des Punkte P zur Geraden g.

Strategie

① *Ebene E bestimmen, die senkrecht zu g ist (siehe dazu den Kasten auf S. 15) und P enthält.*
② *Schnittpunkt S von E und g berechnen (Gleichung von g in E einsetzen), S ist Fußpunkt des Lots von P auf g.*
③ *Abstand der zwei Punkte P und S berechnen.*

b) Gegeben ist eine Ebene F und ein Punkt Q mit

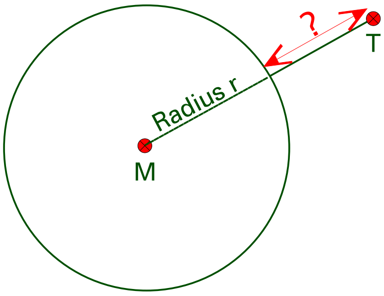
F: $3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$ und $Q = (1|0|15)$.

Gesucht ist der Abstand des Punktes Q zur Ebene F.

Strategie

① *Gerade h bestimmen, die senkrecht zu F ist und Q enthält (Lotgerade durch Q)*
② *Schnittpunkt R von F und h berechnen (Gleichung von h in F einsetzen), R ist Fußpunkt des Lots von Q auf F.*
③ *Abstand der zwei Punkte Q und R berechnen.*

c) Beschreiben Sie, wie Sie den Abstand zweier paralleler Geraden, zweier paralleler Ebenen bzw. einer Geraden von einer Ebene, zu der sie parallel verläuft, berechnen würden *(gemeint ist jeweils parallel und verschieden)*.



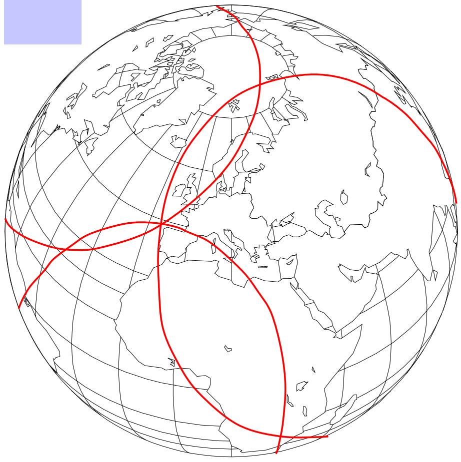
d) Gegeben ist eine Kugel K und ein Punkt T mit
K: Mittelpunkt $M = (-1|2|1)$, Radius $r = 4$
und $T = (5|4|-2)$.

Gesucht ist der Abstand des Punktes T zur Kugeloberfläche.

Die Abbildung zeigt eine Strategie zur Lösung.

e) Der Fußpunkt des Lots von T auf die Kugel in Aufgabe d) heiße U.
Bestimmen Sie eine Tangente an die Kugel im Punkt U.
Wieso ist die Lösung nicht eindeutig?
Bestimmen Sie eine Ebene, welche die Kugel im Punkt U berührt, also eine *Tangentialebene* in U.

20 Aufgabe Erdkugel



a) *Es geht in dieser Aufgabe noch einmal um das Berechnen einer Position ansatzweise wie ein GPS-Empfänger. Verwenden Sie dazu nach Möglichkeit ein CAS.*

Auf einem Schiff wird mit GPS die Position bestimmt. Der Empfänger erhält von drei Satelliten Daten, nämlich jeweils deren Mittelpunkt Sat_i und den zum Empfänger gemessenen Abstand d_i ($i = 1, 2, 3$):

$Sat_1 = (7.625|-18.872|17.080)$ $\quad d_1 = 22.171$
$Sat_2 = (13.677|-5.806|22.028)$ $\quad d_2 = 20.536$
$Sat_3 = (15.023|16.111|14.858)$ $\quad d_3 = 22.726$

Angaben in km.

Berechnen Sie aus diesen Angaben die Position.

b) Zur Modellierung von Flugbahnen verwendet man häufig Ebenen bzw. Geraden. Vergleichen Sie diese Modellierung mit jener durch einen Großkreis
- bei einem Langstreckenflug von Frankfurt nach Los Angeles (Flughöhe 12 km)
- bei einem Flug von Hamburg nach München (Flughöhe 10 km).

Der Start- und Landevorgang wird vereinfachend nicht betrachtet, die Flüge beginnen bzw. enden im Modell in Flughöhe über dem jeweiligen Ort.

Frankfurt	8,86° O;	50,11° N
Los Angeles	118,24° W;	34,05° N
Hamburg	10° O;	53,5° N
München	11,8° O;	48,3° N

21 Aufgabe lineares Kombinieren

a) In einem linearen Gleichungssystem mit drei Variablen kann man jede der Gleichungen als Ebene deuten. Beschreiben Sie für ein System mit drei Gleichungen (und drei Variablen) innerhalb dieser Deutung die möglichen Lösungen in Abhängigkeit von der Beziehung der Ebenen untereinander.

b) Ein lineares Gleichungssystem wird oft so dargestellt:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ \text{II} & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ \text{III} & a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

selten jedoch so:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{oder}$$

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3 = B$$

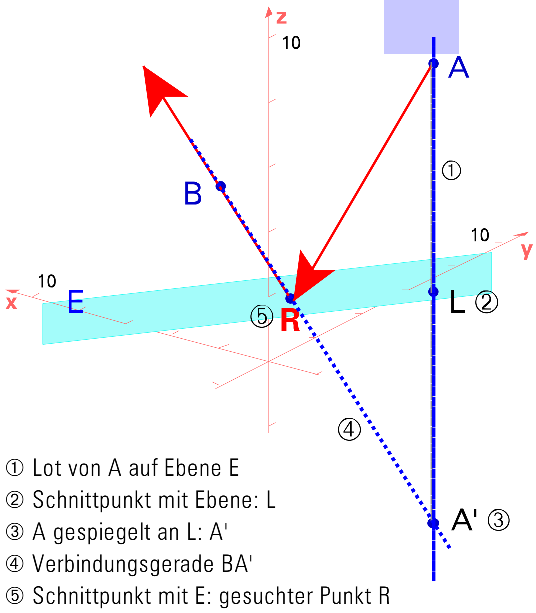
als Linearkombination hier von drei Vektoren. Die Lösungsmenge ist dann die Menge aller $(x_1|x_2|x_3)$, sodass die Linearkombination der Vektoren A_1, A_2, A_3 den Vektor B ergibt.

Matrix $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$ wird aufgeteilt:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

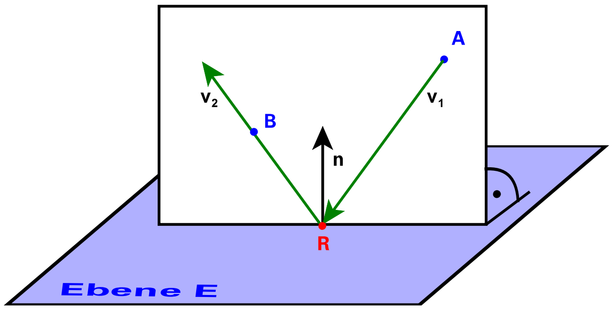
Betrachten Sie den Fall, dass die Vektoren A_1 und A_2 linear abhängig sind.
- Untersuchen Sie, welche Auswirkungen dies auf die Lösungsmenge hat.
- Vergleichen Sie Ihre Überlegungen mit jenen zu a).

Aufgabe Winkel 22



a) Gegeben sind die Ebene $E : x_1 + x_2 + 3x_3 = 6$ und zwei Punkte A und B, mit A = (3|10|5) und B(2|0|5).

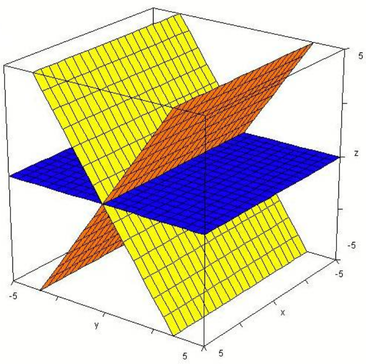
- Gesucht ist ein Punkt R auf der Ebene E, sodass ein Lichtstrahl von A nach R, der an der Ebene E reflektiert wird, durch B geht.
  Ermitteln Sie dann den Einfalls- und Ausfallswinkel für den Lichtstrahl.



Links finden Sie eine Strategie für die Bestimmung des Punktes R. Wie erhält man jetzt die gesuchten Winkel?

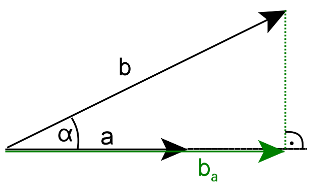
Winkel zwischen Ebene und Gerade

b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Ebene E (s.o.) und der Geraden g: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.



c) Die GPS-Satelliten sind gruppenweise auf sechs verschiedene Bahnebenen verteilt, die jeweils eine Neigung von 55° zur Äquatorebene haben und um 60° längenversetzt sind.

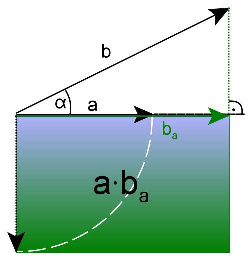
- Beschreiben Sie die mögliche Lage dieser sechs Ebenen mit einem Schaubild und/oder mit Text.
- Links sind zwei dieser Ebenen zusammen mit der Äquatorebene (blau bzw. dunkel) abgebildet. Entwickeln Sie für eine der beiden Ebenen eine zugehörige Gleichung (Parameter- oder Koordinatenform) und führen Sie diese in die andere Art der Darstellung über.
  Geben Sie auch eine Gleichung der zweiten Ebene an.



d) *In G2 haben Sie das Skalarprodukt als algebraische Kurzschreibweise kennen gelernt. In dieser Aufgabe geht es um eine geometrische Interpretation.*
Die Vektoren a und b schließen den spitzen Winkel α ein. Den Vektor b_a (ein Vielfaches des Vektors a) bezeichnet man als *senkrechte Projektion* von b auf die durch a festgelegte Gerade (siehe Abbildung).

- Zeigen Sie, dass $|b_a| = |b| \cdot \cos\alpha$ gilt.

- a_0 sei der *Einheitsvektor* zu a, also $a_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ und daher $|a_0| = 1$.
  Zeigen Sie, dass dann folgt: $b_a = |b| \cdot \cos\alpha \cdot a_0$.
- Zeigen Sie, dass $a \cdot b = a \cdot b_a$.
- Überlegen Sie, was sich bei den vorstehenden Teilaufgaben ändert und was gültig bleibt, wenn für α gilt $\alpha = 90°$ oder $90° < \alpha \leq 180°$.



23 Aufgabe Flugbahn

Es geht es noch einmal um die Flugroute von Frankfurt nach Los Angeles (siehe 18b), S. 19), wobei Sie ein einfaches Modell für den Start der Maschine in Frankfurt bearbeiten.

- Bestimmen Sie die Ebene des Großkreises (Radius = 6383 km), auf dem im Wesentlichen der Flug verläuft.

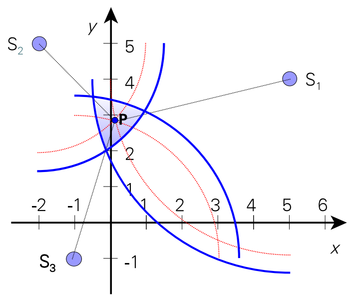
In dieser Ebene soll auch die Startgerade verlaufen. Dabei hebt das Flugzeug mit einem Winkel von ca. 11,5° von der Startbahn ab und bewegt sich näherungsweise auf dieser Geraden, bis die Flughöhe erreicht ist (sehr starke Vereinfachung der Realität in diesem Modell).

- Ermitteln Sie diese Startgerade. Bestimmen Sie, wie viele Kilometer das Flugzeug auf dieser Gerade zurücklegt, bis es die Flughöhe erreicht.

24 Aufgabe GPS-Zeitfehler

GPS Empfänger mit Atomuhr wären zu teuer und zu schwer, statt dessen werden normale Quarzuhren verwendet. Das hat zur Folge, dass die Zeit zwischen Satellit und Empfänger nicht synchron ist. Es ergibt sich ein „Zeitoffset“ *dt*.
Dieser Uhren-Offset *dt* des Empfängers ist gegenüber den Satellitenuhren für alle Satelliten gleich. Alle Entfernungsmessungen sind um den gleichen Anteil $c \cdot dt$ zu kurz oder zu lang *(c = Lichtgeschwindigkeit)*.
Da die Messungen nicht die wirklichen Entfernungen r_i liefern, werden sie auch ,,Pseudo-Entfernungen“ ρ_i (pseudorange) genannt. Anstelle von $r_i = |S_i - P|$ messen wir $\rho_i = |S_i - P| + c \cdot dt = r_i + c \cdot dt$.
Das bedeutet z.B. für die Ebene, dass die Kreise jetzt geänderte Radien haben, nämlich ρ_i statt r_i, und sich daher nicht mehr in einem Punkt schneiden (siehe Abbildung. Hier sind alle Kreise größer geworden.). Das liegt an der 4. Unbekannten *dt*.
Eine Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, wären die Daten eines weiteren Satelliten: eine weitere Gleichung.
Moderne GPS-Empfänger, synchronisieren ihre interne Uhr durch Beispielrechnungen: sie ändern ihre Uhrzeit so lange ab, bis sich die Kreise in einem Punkt schneiden.
Mit beiden Methoden ist die Empfänger-Uhr synchron zu den Atomuhren, jedenfalls für kurze Zeit.

- Entwickeln Sie ein konkretes Beispiel in der Ebene (analog der Abbildung) und führen Sie damit beide Methoden zur Zeitsynchronisierung durch.



Siehe dazu das Applet 3 zu G5.

Die oben abgebildete Situation kann dort mit einem Schieberegler verändert werden.

VII. Rückschau

mit Selbsteinschätzung

Überblick-Grafik

Versuchen Sie, einen Überblick über die Inhalte dieses Themenbereichs zu gewinnen.
Überlegen Sie dabei auch, was Ihnen dabei wichtig erschien.

Stellen Sie das nach Ihrer Meinung Zentrale in nebenstehendem Kasten dar und verwenden Sie dazu graphische Elemente (z.B. Mind Map, Concept Map, eine Grafik, ...).
Wichtig ist, dass Sie diese Übersicht selbst gestalten und nicht irgendwo kopieren.

G5 · Analytische Geometrie

Überblick-Text

Wenn Sie möchten, können Sie hier maximal drei Punkte nennen, die Ihre obige Darstellung ergänzen oder erläutern.

Vernetzungen

Welche Verbindungen zu früheren Themenbereichen sehen Sie?
Sind Ihnen Inhalte und/oder Methoden aus diesem Themenbereich schon außerhalb des Mathematikunterrichts begegnet und wenn ja, wo?
(Kann z.T. in obige Grafik eingebaut werden)

Im Rückblick sollten Sie sich auch fragen, ob Sie die am Anfang des Heftes stehenden Kompetenzen erworben haben. Schätzen Sie sich selbst ein und kreuzen Sie in der Tabelle jeweils die am ehesten zutreffende Antwort an:

Kompetenzen	ja	ein wenig	eher nicht	nein
Ich kann im Raum Geraden und Ebenen beschreiben (auch als Linearkombination) und weiß, wie sie zueinander in Beziehung stehen.				
Ich kann zum Messen von Länge und Winkeln bei Vektoren den Betrag und das Skalarprodukt verwenden.				
Ich habe mir mögliche Darstellungen einer Kugel erarbeitet und so auch den Umgang mit den geographischen Koordinaten (Kugelkoordinaten) gelernt.				
Ich weiß, wie auf der Oberfläche einer Kugel die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten bestimmt wird.				
Ich kann geeignet zwischen kartesischen und geographischen Koordinaten wählen.				

Haben Sie Kompetenzen nicht erworben oder nicht so, wie Sie es sich erhofft hatten, notieren Sie sich, woran es gelegen haben könnte. Überlegen Sie zugleich, ob Sie in Ihrem eigenen Verantwortungsbereich Möglichkeiten sehen, den Erwerb von Kompetenzen zu verbessern.

✎

VIII. Lösungsvorschläge
zu den meisten Aufgaben, z.T. in Kurzform

Aufgabe 1 S. 2

Geometrische Lösung:

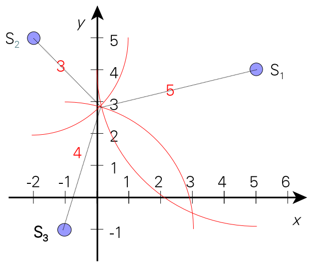
Abstand zu S_1 ist 4 $\Rightarrow$ Position $x_P = -6$ oder $x_P = 2$
Abstand zu S_2 ist 2 $\Rightarrow$ Position $x_P = 2$ oder $x_P = 6$
Übereinstimmung bei $x_P = 2$, das ist also die Position von P.

Formal rechnerische Lösung:

$|x_P - x_{S1}| = 4$ und $|x_P - x_{S2}| = 2$
$x_P + 2 = 4 \Rightarrow x_P = 2$ oder $x_P + 2 = -4 \Rightarrow x_P = -6$ und
$x_P - 4 = 2 \Rightarrow x_P = 6$ oder $x_P - 4 = -2 \Rightarrow x_P = 2$.
Übereinstimmung bei $x_P = 2$, das ist also die Position von P.
Die Messung mit nur einem „Satelliten" könnte ausreichen, wenn nur ein bestimmter Abschnitt der Achse in Frage kommt.

Aufgabe 2 S. 2

Geometrische Lösung:



Nebenstehend eine der beiden möglichen Lösungen, wobei S_3 als Abstand etwa 4 meldet. P liegt dann etwa bei (0,1 | 2,9).

Rechnerische Lösung:

$(x-5)^2+(y-4)^2 = 5^2$ und
$(x+2)^2+(y-5)^2 = 3^2$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 = 25$ und
$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 9$. Vereinfacht ergibt sich
I $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$
II $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$.
$\Rightarrow$ I–II: $-14x + 2y - 4 = 0$, also $y = 7x + 2$.
Eingesetzt etwa in I folgt $50x^2 - 38x + 4 = 0$ und damit

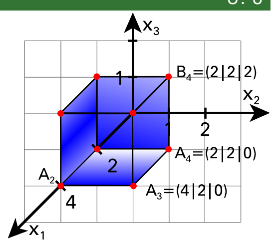
$$x = \frac{19}{50} \pm \frac{\sqrt{161}}{50}$$, also $x_1 \approx 0{,}1262$ und $x_2 \approx 0{,}6338$.

Wir wählen Lösung x_1 für den Standort P und erhalten durch Einsetzen $y_1 \approx 2{,}8836$. Damit ist P = (0,1262 | 2,8836)
Der Abstand zwischen P und S_3 ist etwa 4,0436.
Wenn der 2. Schnittpunkt, der bei zwei Kreisen auftritt, ausgeschlossen werden kann, sind zur Positionsbestimmung nur zwei Satelliten nötig.

Aufgabe 3 S. 3

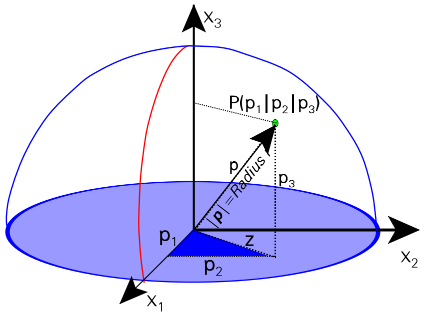
$A_1 = (2|0|0)$, $A_2 = (4|0|0)$,
$A_3 = (4|2|0)$, $A_4 = (2|2|0)$;

$B_1 = (2|0|2)$, $B_2 = (4|0|2)$,
$B_3 = (4|2|2)$, $B_4 = (2|2|2)$.



Aufgabe 4 S. 3

a) Zwischen den mit x_1 und x_2 gekennzeichneten Strecken ist ein rechter Winkel. Daher gilt $x_1^2 + x_2^2 = z^2$.
Die mit z und x_3 gekennzeichneten Strecken stehen ebenfalls senkrecht aufeinander, daher ist $z^2 + x_3^2 = r^2$. Ersetzt man z^2 entsprechend der ersten Beziehung, erhält man die Behauptung. *Siehe folgende Abbildung.*



b) Den Abstand eines Punktes P vom Nullpunkt bzw. die Länge des entsprechenden Pfeils kann man über die Kugelgleichung erhalten, wenn man P als Punkt auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt deutet: $|P| = |\vec{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$ = Radius r.
Der Abstand zweier Punkte lässt sich darauf zurückführen: der Pfeil wird verschoben.

c) Der neue Mittelpunkt bedeutet eine Verschiebung einer jeden Koordinate von Punkten auf der Kugel:
$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$.

Aufgabe 5 · paradigmatisches Beispiel S. 4

Lösung für b), zweiter Absatz:
$(x_1-3)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-2)^2 = 3{,}3^2 \Leftrightarrow$
I $x_1^2 - 6x_1 + 9 + x_2^2 - 4x_2 + 4 + x_3^2 - 4x_3 + 4 = 10{,}89$
II $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$
Die Punkte, die zur Schnittmenge dieser beiden Kugeln gehören, müssen beide Gleichungen erfüllen.
II – I: $6x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 17 = -9{,}89 \quad \Leftrightarrow$
$6x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 7{,}11 \mid \cdot 100$
E_2: $600x_1 + 400x_2 + 400x_3 = 711$
E_1: $100x_1 + 100x_2 + 150x_3 = 194$
$E_2 - 4 \cdot E_1 \Rightarrow 200x_1 - 200x_3 = -65$.
Auflösen nach x_3 und Umformen führt auf die Gerade g mit

$$g:\quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}4525 \\ 0{,}325 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (siehe S. 9).

Aufgabe 6 S. 10

Keine Hinweise

Aufgabe 7 S. 10

a) I. $x_1 = 1 - \lambda + 2\mu \quad \Rightarrow \lambda = 1 + 2\mu - x_1 = -1 - x_1 + 2x_2$
II. $x_2 = 1 + \mu \quad \Rightarrow \quad \mu = -1 + x_2$
III. $x_3 = -1 + 2\lambda - \mu$
eingesetzt in III: $x_3 = -1 - 2 - 2x_1 + 4x_2 + 1 - x_2$
zusammengefasst folgt: $2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2$, also
E: $2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2$ *(in Koordinatenform)*.

b) $x_1 = 3 - 2x_2 + 0x_3$ bedeutet

$$X = \begin{pmatrix} 3 - 2s - 0r \\ s \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Parameterform zu F.

c) Strategie (1):

LGS mit 2 Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ \text{II} & x_1 + 2x_2 \quad\;\; = 3 \end{array}$$

Die linke Seite von I kann nicht Vielfaches von II sein, da dort x_3 nicht vorkommt, also beliebig ist.
$\Rightarrow$ E und F $\nparallel$, sie schneiden sich in einer Geraden:
II $\Leftrightarrow x_1 = 3 - 2x_2$ und damit ist
I $\Leftrightarrow x_3 = -2-6+4x_2+3x_2 = -8 + 7x_2$.
Für die Schnittgerade g ergibt sich die Geradengleichung

$$g_1\!: \; X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Strategie (2): (mit Parameterform)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & -2s & & +u & -2t & = & -2 \\ \text{II} & s & & & -t & = & 1 \\ \text{III} & & r & -2u & +t & = & -1 \end{array} \xrightarrow{\text{I}+2\cdot\text{II}}$$

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & -2s & & +u & -2t & = & -2 \\ \text{II} & & & u & -4t & = & 0 \\ \text{III} & & r & -2u & +t & = & -1 \end{array} \xRightarrow{\text{II}} u = 4 \cdot t$$

Eingesetzt in die rechte Seite obiger Gleichung folgt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 4t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und}$$

damit $g_2\!: \; X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Man überprüft leicht, dass beide Stützpunkte auf „beiden“ Geraden liegen müssen, die Richtungsvektoren stimmen überein. Also ist $g_1 = g_2$.

Aufgabe 8 S. 10

Keine Hinweise

Aufgabe 9 S. 11

a) Ebene E: z.B. A als Stützpunkt wählen und die Vektoren B − A und C − A als Richtungsvektoren liefert eine Parameterform:

$$E\!: \; X = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Eliminieren von λ und μ führen auf die Koordinatengleichung:

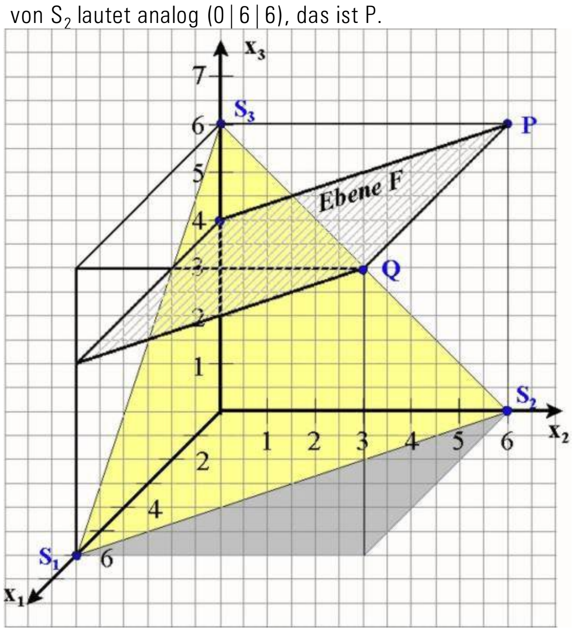
$$\begin{array}{llcccc} \text{I} & x_1 & = & -1 & +3\lambda & +\mu \\ \text{II} & x_2 & = & 6 & -4\lambda & +\mu \\ \text{III} & x_3 & = & 1 & +\lambda & -2\mu \end{array} \xrightarrow[2\cdot\text{I}+\text{III}]{\text{I}-\text{II}}$$

$$\begin{array}{llcccc} \text{I} & x_1 & = & -1 & +3\lambda & +\mu \\ \text{II} & x_1 - x_2 & = & -7 & +7\lambda & \\ \text{III} & 2x_1 + x_3 & = & -1 & +7\lambda & \end{array} \xrightarrow[\text{III}-\text{II}]{} \text{ergibt}$$

E: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$.
Die Gerade durch P und Q hat z.B. die Geradengleichung

$$g\!: \; X = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, wenn P als Stützpunkt und Q − P als Richtungsvektor gewählt wird.

b) Zur Berechnung der Achsenschnittpunkte setzt man die Koordinaten der nicht betroffenen Achsen gleich Null und erhält so $S_1 = (6\,|\,0\,|\,0)$, $S_2 = (0\,|\,6\,|\,0)$, $S_3 = (0\,|\,0\,|\,6)$.
Die Kantenlänge des Würfels ist 6, wegen der gegebenen 4 Eckpunkte muss der 4. Eckpunkt in der x_1x_2-Ebene $(6\,|\,6\,|\,0)$ sein, der Eckpunkt senkrecht oberhalb dann $(6\,|\,6\,|\,6)$, das ist aber Q. Der Eckpunkt senkrecht oberhalb von S_2 lautet analog $(0\,|\,6\,|\,6)$, das ist P.



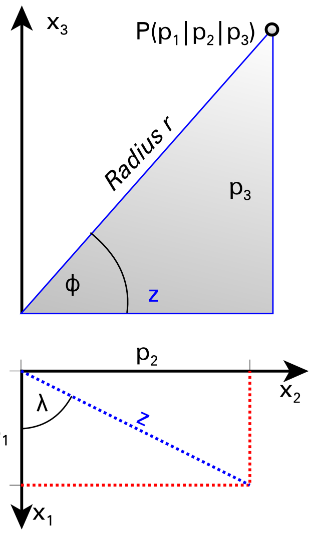
c) Da P und Q Eckpunkte des Würfels sind und R auf der Würfelkante senkrecht oberhalb von S_1 liegt, muss der Schnittpunkt mit der x_3-Achse dieselbe x_3-Koordinate wie R haben: F schneidet die x_3-Achse in $(0\,|\,0\,|\,4)$.
Die Ebene F zerlegt den Würfel in zwei Prismen. Das „obere“ Prisma hat ein rechtwinkliges Dreieck als Grundfläche, das „untere“ ein Trapez. Es ist $V_{\text{Würfel}} = 6^3 = 216$.
„Oberes“ Prisma: Grundfläche = ½ · 6 · 2, Höhe = 6, also $V_{\text{oberes Prisma}} = 6 \cdot 6 = 36 \Rightarrow V_{\text{unteres Prisma}} = 180$.
Verhältnis der Volumenanteile ist dann 36 : 180 = 1 : 5.

Aufgabe 10 S. 11

Keine Hinweise, Lösung steht in der Aufgabe.

Aufgabe 11 S. 12

Geographische Koordinaten ➔ kartesische Koordinaten
(r, λ, ϕ) ➔ $(x_1\,|\,x_2\,|\,x_3)$
Die Herleitung beginnt mit der „einfachsten“ der drei Koordinaten, nämlich x_3, weil dort nur ein Winkel auftaucht.



x_3 Koordinate: Mit den Bezeichnungen der Abbildung ist im oberen rechtwinkligen Dreieck

$\sin\phi = \frac{p_3}{r}$ und damit

$p_3 = r \cdot \sin\phi$ $(0° \le \phi \le 90°)$.

x_2 Koordinate: Im oberen rechtwinkligen Dreieck ist

$\cos\phi = \frac{z}{r}$,

im unteren $\sin\lambda = \frac{p_2}{z}$.

Durch Multiplikation folgt

$\cos\phi \cdot \sin\lambda = \frac{p_2}{r}$ bzw. $p_2 = r \cdot \sin\lambda \cdot \cos\phi$.

x_1 Koordinate: Im unteren rechtwinkligen Dreieck ist

$\cos\lambda = \frac{p_1}{z}$. Damit folgt analog $p_1 = r \cdot \cos\phi \cdot \cos\lambda$.

Aufgabe 12 S. 12

a) $\lambda = 10°$ und $\phi = 53{,}5°$

$\Rightarrow$ $x_1 = 6371 \cdot \cos 10° \cdot \cos 53{,}5° \approx 3.732$
$x_2 = 6371 \cdot \sin 10° \cdot \cos 53{,}5° \approx 658$
$x_3 = 6371 \cdot \sin 53{,}5° \approx 5121$

b) $x_3 = 5041 = r \cdot \sin\phi$.
Die Daten ergeben als Radius ungefähr 6371. Also ist

$$\phi = \arcsin\frac{5041}{6371} \approx \arcsin 0{,}79124 \approx 52{,}30°.$$

$x_2 = 542 = 6371 \cdot \cos 52{,}3° \cdot \sin\lambda$. Daraus folgt

$$\lambda = \arcsin\frac{542}{6371 \cdot \cos 52{,}3°} \approx \arcsin 0{,}13912 \approx 8{,}00°.$$

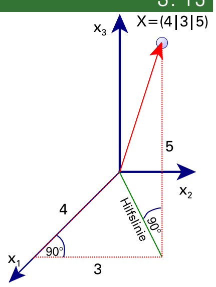
Die analoge Berechnung mit x_1 liefert ebenfalls $\lambda \approx 8{,}00°$.

c) Die Berechnung erfolgt analog, beide Positionen liefern als Erdradius etwa 1. Für die gerundeten Koordinaten aus Aufgabe 10 folgt:
$Pos_1 \approx (17{,}4°\ O;\ 57{,}2°\ N)$ und $Pos_2 \approx (68{,}9°\ O;\ 37{,}6°\ N)$.
Pos_1 liegt nordöstlich von Hamburg in Nordeuropa, Pos_2 liegt in Asien (Tadschikistan), kommt also nicht in Frage.
Die Person befindet sich als in Pos_1.

Aufgabe 13 S. 13

a) $|\vec{x}| = \sqrt{16 + 9 + 25} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$

b) Sei $X = (x_1|x_2|x_3)$ und die Hilfslinie heiße h. Dann ist
Länge des $\text{Pfeils}^2 = h^2 + x_3^2$ und
$h^2 = x_1^2 + x_2^2$. Eingesetzt ergibt sich die Behauptung.
Der Beweis lässt sich analog mit den konkreten Koordinaten führen.



Aufgabe 14 S. 15

Es ändert sich das Vorzeichen des Skalarprodukts:

$\vec{q} \cdot \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -28 - 32 - 9 = -69$. Damit ist

$\cos\alpha \approx -0{,}9756$ und $\alpha \approx 167{,}3°$.

Berechnet wird also der Winkel quasi zwischen den Pfeilspitzen, die beiden möglichen Ergebnisse ergänzen sich zu 180°.

Aufgabe 15 S. 15

a) $\cos 90° = 0$, also folgt aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\vec{a} \perp \vec{b}$. Stehen zwei Vektoren senkrecht zueinander, folgt umgekehrt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Weil die Berechnungsformel nur Null wird, wenn der Zähler Null ist, spielen die Längen der Vektoren (jeweils positiv) in diesem Fall keine Rolle.

b) Der Betrag eines Vektors gibt seine Länge an. Multipliziert man einen Vektor mit dem Kehrbruch seiner Länge, hat der sich ergebende Vektor die Länge 1.

c) $(x_1|x_2|x_3) \cdot (y_1|y_2|y_3)$
$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3$
denn die Multiplikation von Zahlen ist kommutativ
$= (y_1|y_2|y_3) \cdot (x_1|x_2|x_3)$.

Aufgabe 16 S. 16

a) Normalenvektor zu F sollte $n_F = (1|2|0)$ sein. Die Parameterform zu F lautet $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und es

gilt $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + 2 + 0 = 0$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

Der Vektor $(1|2|0)$ steht also senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren und damit auch auf jeder Linearkombination der beiden:

$$\left(s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2s + 2s = 0.$$

Es handelt sich also um einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene F steht, denn der Stützpunkt bewirkt lediglich eine Parallelverschiebung der Ebene.

b) Für sich nicht senkrecht schneidende Ebenen gilt wie für entsprechende Geraden, dass es theoretisch zwei Schnittwinkel gibt, nämlich einen spitzen und einen stumpfen Winkel, die sich zu 180° ergänzen. Normalerweise gibt man den spitzen Winkel an. Der Winkel zwischen den Normalenvektoren ist offenbar einer der möglichen Schnittwinkel, denn es entsteht dabei ein Viereck mit zwei 90° Winkeln und dem Schnittwinkel α der Ebenen. Der Winkel zwischen den Normalenvektoren ist daher $180° - \alpha$.
Es ist $n_E = (2|-3|1)$ und $n_F = (1|2|0)$.

$$\cos\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|2 - 6 + 0|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} \approx 0{,}4781$$

$\Rightarrow \alpha \approx 61{,}4°$.

c) $Q-P = (4\,|-2\,|\,1) - (-1\,|\,2\,|\,3) = (5\,|-4\,|-2) \Rightarrow$

Abstand der beiden Punkte: $|Q-P| = |PQ| = \sqrt{45} \approx 6{,}7$.

Aufgabe 18 — S. 19

a) $H=(3732\,|\,658\,|\,5121)$, $O=(3858\,|\,542\,|\,5041)$ *gerundet*.
Der sphärische Winkel ist etwa $\alpha \approx 1{,}8°$. Daraus ergibt sich als sphärischer Abstand etwa 200 km.

b) $F=(4039\,|\,616{,}6\,|\,4888{,}3)$,
$LA=(-2497{,}7\,|-4650{,}4\,|\,3567{,}2)$ *jeweils gerundet*.
Der sphärische Winkel ist so $\beta \approx 83{,}7°$. Daraus folgt für die Weglänge in 12 km Höhe etwa 9325 km.
Mit weniger Rundung ergibt sich nur 9320 km.

c) $$f(x) = \frac{\text{neuer Umfang} - \text{alter Umfang}}{\text{alter Umfang}} \cdot 100 =$$

$$f(x) = \frac{2\pi \cdot (6371+x) - 2\pi \cdot 6371}{2\pi \cdot 6371} \cdot 100 = \frac{2\pi \cdot x}{2\pi \cdot 6371} \cdot 100 =$$

$$f(x) = \frac{x}{6371} \cdot 100$$

Aufgabe 19 — S. 20

a) ① Ebenengleichung:
Senkrecht zur Geraden heißt senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden: als linke Seite der Ebenengleichung wählt man $1x_1 + 2x_2 - 1x_3$. Da P auf der Ebene liegen soll, muss die rechte Seite $1 + 2 - 2 = 1$ sein. Daher ist

$E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$.

② Schnittpunkt S (Gerade g mit Ebene E):
$1+s + 4s - 2 + s = 6s - 1 = 1 \Rightarrow s = ⅓$. Damit ist
$S = ⅓(4\,|\,2\,|\,5)$.

③ Abstand $|PS|$:
$|S-P| = |⅓(4\,|\,2\,|\,5) - (1\,|\,1\,|\,2)| = |⅓(1\,|-1\,|-1)| \Rightarrow$
$|PS| = ⅓\sqrt{3}$ = Abstand von Punkt P zur Geraden g.

b) ① senkrechte Gerade h zu F durch Q:
Richtungsvektor von h = Normalenvektor von F und
Stützpunkt von h = Q. $\Rightarrow$ $h:\ X = \begin{pmatrix}1\\0\\15\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$.

② Schnittpunkt R (Gerade h mit Ebene F):
$3+9t + 4t - 15+t = 14t - 12 = 2 \Rightarrow t = 1$
Daher ist $R = (4\,|\,2\,|\,14)$.

③ Abstand $|QR|$:
$|R-Q| = |(4\,|\,2\,|\,14)-(1\,|\,0\,|\,15)| = |(3\,|\,2\,|-1)| \Rightarrow$
$|QR| = \sqrt{14}$ = Abstand von Punkt Q zur Ebene F.

c) Die genannten Fälle können z.B. auf die Teilaufgaben a) und b) zurückgeführt werden:
Parallele Geraden: Irgend einen Punkt auf Gerade 1 wählen, dann wie a).
Parallele Ebenen: analog, dann wie b).
Gerade / Ebene: Irgend einen Punkt auf der Geraden wählen, dann wie b).

d) Strategie: Länge der Strecke TM abzüglich Radius, denn jede Gerade durch den Mittelpunkt einer Kugel steht senkrecht auf der Oberfläche.
Berechnung: $|MT| = |T-M| = |(5\,|\,4\,|-2)-(-1\,|\,2\,|\,1)| =$
$= |(6\,|\,2\,|-3)| = 7$ und $7-4 = 3 \Rightarrow$
Abstand von T zur Kugeloberfläche = 3.

e) Berechnen des Schnittpunktes von MT mit Kugel:
Gerade i: $X = M + \lambda \cdot (T-M)$.
Kugel K: $|X-M| = 4$. Geradengleichung einsetzen:
$|M+\lambda \cdot (T-M)-M| = |\lambda \cdot (6\,|\,2\,|-3)| = |\lambda|\ 7 = 4$.
Es kommt nur die positive Lösung in Frage, da nur mit dieser der Abstand zu T 3 bleibt: $U = \frac{1}{7}(17\,|\,22\,|-5)$.

Die Tangente in U muss senkrecht auf der Geraden i stehen, also senkrecht zum Richtungsvektor $\mathbf{r} = (6\,|\,2\,|-3)$. Das gilt z.B. für $\mathbf{s_1} = (1\,|\,0\,|\,2)$, denn $(6\,|\,2\,|-3) \cdot (1\,|\,0\,|\,2) = 0$. Es gilt aber auch für $\mathbf{s_2} = (1\,|-3\,|\,0)$ und dieser Vektor ist kein Vielfaches von $\mathbf{s_1}$, zeigt also in eine andere Richtung. Es steht daher auch der Vektor $\mathbf{s_1} + \mathbf{s_2}$ und jede beliebige Linearkombination dieser beiden Vektoren senkrecht auf $\mathbf{r}$, also eine ganze Ebene.
Mögliche Darstellungen: TE: $X = U + \mu\, \mathbf{s_1} + \nu\, \mathbf{s_2}$
oder TE: $6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 23$, denn $\mathbf{r}$ ist der Normalenvektor zur Ebene TE und U eingesetzt ergibt 23.

Aufgabe 20 — S. 21

a) *Es handelt sich zwar um realistische Daten, die aber gerundet sind. Daher kann DERIVE keine Lösung auf direktem Weg berechnen.*
Gesucht sind die Koordinaten eines Punktes X auf der Erdoberfläche, X muss also der Gleichung I genügen:

I E: $X^2 = 6371^2$.

Weiter liegt X auf einer Kugel, deren Mittelpunkt der Satellit S_1 bildet. Der Radius dieser Kugel ist der mit GPS gemessene Abstand d_1:

II S_1: $(X - S_1)^2 = d_1^2$.

Analoges gilt für die beiden weiteren Satelliten S_2 und S_3:

III S_2: $(X - S_2)^2 = d_2^2$,

IV S_3: $(X - S_3)^2 = d_3^2$.

Die vier Gleichungen I, II, III und IV müssen also gleichzeitig erfüllt werden. Diese Forderung führt nach Vereinfachungen zu einem linearen Gleichungssystem in den drei gesuchten Variablen x_1, x_2 und x_3, die den gesuchten Ort auf der Erdoberfläche beschreiben.

$$\begin{array}{lllll}
\text{I} & X^2 & & = r^2 & \\
\text{II} & X^2 - 2\cdot XS_1 & + S_1^2 & = d_1^2 & \\
\text{III} & X^2 - 2\cdot XS_2 & + S_2^2 & = d_2^2 & \xrightarrow[\text{IV}-\text{I}]{\text{II}-\text{I},\ \text{III}-\text{I}} \\
\text{IV} & X^2 - 2\cdot XS_3 & + S_3^2 & = d_3^2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{I}' & -2\cdot XS_1 & + S_1^2 & = d_1^2 - r^2 \\
\text{II}' & -2\cdot XS_2 & + S_2^2 & = d_2^2 - r^2 \\
\text{III}' & -2\cdot XS_3 & + S_3^2 & = d_3^2 - r^2
\end{array}$$

Nach dem Einsetzen der entsprechenden Werte für die drei Satelliten folgt

$$\text{I}\quad -2\cdot\begin{pmatrix}7625\\-18872\\17080\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7625\\-18872\\17080\end{pmatrix}^2=22171^2-6371^2$$

$$\text{II}\quad -2\cdot\begin{pmatrix}13677\\-5806\\22028\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}13677\\-5806\\22028\end{pmatrix}^2=20536^2-6371^2$$

$$\text{III}\quad -2\cdot\begin{pmatrix}15023\\16111\\14858\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}15023\\16111\\14858\end{pmatrix}^2=22726^2-6371^2$$

Das bedeutet:

$$\text{I}\quad -15.250x_1+37.744x_2-34.160x_3=-255.055.809$$

$$\text{II}\quad -27.354x_1+11.612x_2-44.056x_3=-324.865.094\ .$$

$$\text{III}\quad -30.046x_1-32.222x_2-29.716x_3=-230.133.579$$

und ergibt gerundet (4687 | − 1082 | 4179). Um diesen Ort auf dem Globus wieder zu finden, transformieren wir ihn in geographische Koordinaten und erhalten einen Ort mit ungefähr 13° westlicher Länge und 41° nördlicher Breite. Das ist westlich der iberischen Halbinsel im Atlantik (siehe Abbildung bei der Aufgabe).

b) *(Berechnung mit Derive oder anderem CAS)*
Die Gerade von F nach LA mit den kartesischen Koordinaten F_k bzw. L_k: X = F_k + λ · (L_k − F_k) wird auf Schnittpunkte mit der Erdkugel überprüft. Man erhält, dass schon nach 18 km die Gerade die Erdkugel schneidet (und 18 km vor LA wieder aus der Erde herauskommt).
(Es ist auch elementargeometrisch nachweisbar, dass das Modell „Gerade" unangemessen ist)
Der sphärische Abstand von Hamburg nach München beträgt (auf einer Bahn mit dem Radius 6381 km) etwa 592,7 km, es handelt sich hier also um einen vergleichsweise kleinen Teil des Bogens.
Die analog aufgestellte Gerade schneidet hier die Erdkugel nicht, die niedrigste Flughöhe wäre etwa 3 km über n.N.
Die Entfernung längs der Geraden wäre fast 592,5 km, also nur 200 m weniger.
Das Modell „Gerade" ist bei dieser kurzen Strecke offenbar möglich.

Aufgabe 21 S. 21

a) Keine Hinweise

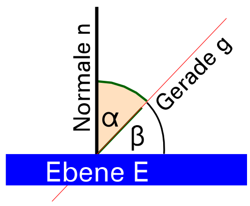
b) A_1 und A_2 linear abhängig ⇒
Es gibt eine Zahl d mit $A_1 = d \cdot A_2$.
Ist die Lösungsmenge nicht leer, so ist die Lösung nicht eindeutig. Denn ist (a, b, c) ein Element der Lösungsmenge, so auch (0, a·d+b, c): (a, b, c) löst das System, heißt $a\,A_1 + b\,A_2 + c\,A_3 = B$. Ersetzt man A_1 durch $d\,A_2$, folgt $a \cdot d\,A_2 + b\,A_2 + c\,A_3 = 0\,A_1 + (ad+b)\,A_2 + c\,A_3 = B$.
Ohne zusätzliche Informationen sind also die Fälle 2,3 und 4 aus Teil a) möglich.

Aufgabe 22 S. 22

a) Rechenschritte nach der angegebenen Strategie. Man überprüft leicht, dass A und B nicht auf E liegen.
① Lot von A auf E: Normalenvektor von E = Richtungsvektor; zusammen mit Stützpunkt A folgt Gleichung der Lotgeraden $g\colon\ X=\begin{pmatrix}3\\10\\5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.
② Schnittpunkt g mit E: g einsetzen in E hat zur Folge 3+s + 10+s + 15+9s = 11s + 28 = 6 ⇒ s = −2.
⇒ Schnittpunkt L = (1 | 8 | − 1)
③ A' ist A gespiegelt an L: errechnet mit s = − 4 (doppelter Abstand von A) A' = (− 1 | 6 | − 7). Probe:
| L − A | = | (− 2 | − 2 | 6) | = | A' − L | = | (− 2 | − 2 | − 6) |.
④ Verbindungsgerade BA' ist z.B. B + t · (A' − B), also
$v\colon\ X=\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\-12\end{pmatrix}$.
⑤ Schnittpunkt R mit Ebene: v einsetzen in E ergibt 2 − 3t + 6t + 15 − 36t = 17 − 33t = 6 ⇒ t = ⅓. Daraus folgt für R = (1 | 2 | 1).
Winkelmessung zur Normalen mit R − A
(einfallender Strahl): $\cos\alpha=\dfrac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-8\\-4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-2\\-8\\-4\end{pmatrix}\right|}=\dfrac{22}{\sqrt{11\cdot 84}}$,
also α ≈ 43,6°. Das ergibt auch die Probe mit dem reflektierten Strahl.
Der Winkel zwischen Strahl und Ebene ist α' ≈ 46,4°.

b) Normalenvektor der Ebene E und Richtungsvektor der Geraden g werden verwendet:

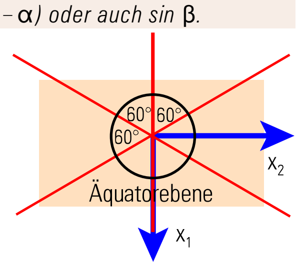
$$\cos\alpha=\dfrac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}\right|}=\dfrac{11}{\sqrt{11\cdot 21}}\approx 0{,}72375\ \Rightarrow\ \alpha\approx 43{,}6°.$$



Das ist der in der Skizze eingetragene Winkel, der zwischen Normalenvektor und Gerade liegt, nicht jedoch zwischen der Ebene und der Geraden: letzteres ist der Winkel β = 90° − α ≈ 46,4°.

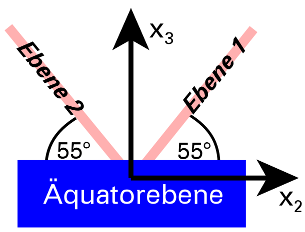
Bei einer wie oben durchgeführten Berechnung des Winkels zwischen Gerade und Ebene ist der gesuchte Winkel die Ergänzung des berechneten Winkels auf 90°.
Daher steht in einigen Formelsammlungen auf der linken Seite der Berechnungsformel: cos (90° − α) oder auch sin β.

c) Die Bahnebenen könnten so aussehen in der Sicht senkrecht auf die Äquatorebene. Dabei teilen sich die Schnittgeraden der Bahnebenen mit der Äquatorebene jeweils 2 Bahnebenen, die 55° gegen die



Äquatorebene geneigt sind und daher einen Winkel von 70° einschließen.

Die beiden in der Aufgabe abgebildeten Bahnebenen schneiden die Äquatorebene längs der x_1-Achse. Die Neigung der Ebenen kann z.B. gegen die x_2-Achse bestimmt werden durch



den Ansatz für die erste Ebene $E_1\colon\ X = s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix}$ mit

a so aus IR, dass der Winkel zwischen diesem Richtungsvektor und der x_2-Achse etwa 55° ergibt:

$$\cos 55° = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow a \approx 0{,}7.$$ Daher lautet

die Gleichung der Ebene $E_1\colon\ X = s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0{,}7\\1\end{pmatrix}$

oder in Koordinatenform $x_2 - 0{,}7\,x_3 = 0$.

Probe: Schnittwinkel zur x_1-x_2-Ebene $E_0\colon x_3 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\-0{,}7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\-0{,}7\end{pmatrix}\right|} = \frac{0{,}7}{\sqrt{1{,}49}} \approx 0{,}5735 \Rightarrow \alpha \approx 55°.$$

Analog ergibt sich Ebene $E_2\colon\ X = s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\-0{,}7\\1\end{pmatrix}$

und in Koordinatenform $x_2 + 0{,}7\,x_3 = 0$.

d) • Der erste Spiegelpunkt folgt direkt aus der Definition des Kosinus im rechtwinkligen Dreieck als „Ankathete durch Hypotenuse".

• Die Länge von b_a wurde eben bestimmt, nun geht es um den Vektor selbst. Und der zeigt in dieselbe Richtung wie **a**. Damit die Länge des Vektors nicht beeinflusst wird, bestimmt die Richtung ein Einheitsvektor.

Aufgabe 23 S. 23

Da graphische Darstellungen hier sehr sinnvoll sind, die kartesischen Koordinaten aber große Zahlenwerte aufweisen, kann man in der Rechnung z.B. den Radius des Großkreises der Flugroute (6383 km) auf 1 Längeneinheit setzen.

Ebene des Großkreises:

Sind F und L die Punkte auf dem Großkreis für Frankfurt bzw. Los Angeles und **f** und **l** die zugehörigen Vektoren, so kann diese Ebene beschrieben werden durch

$$E\colon X = s\cdot \mathbf{f} + t\cdot \mathbf{l}$$

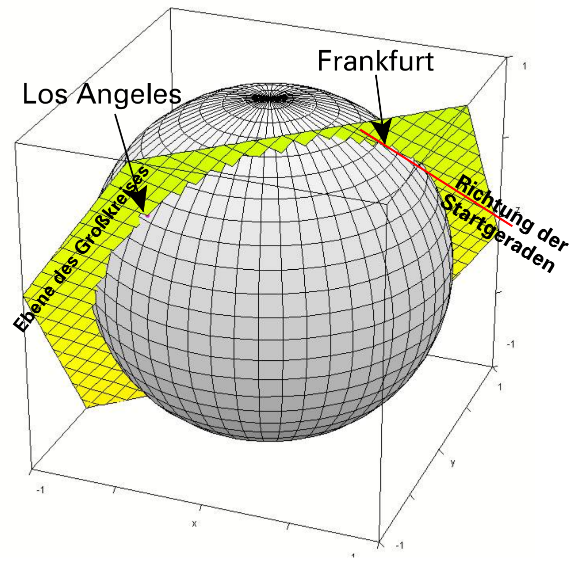
(und die beiden Richtungsvektoren haben die Länge 1).

Nach der Aufgabenstellung liegt die Startgerade auch in dieser Ebene. Der angegebene Winkel bezieht sich auf die Startbahn, deren Verlauf man als Tangente modellieren kann, als Tangente im Punkt F_1 = Frankfurt auf der Erdoberfläche. Dieser Punkt liegt ebenfalls auf der Ebene E, aber unterhalb des Großkreises. Mit der Tangente muss die gesuchte Startgerade einen Winkel von 11,5° einschließen und natürlich derart, dass die Gerade in Richtung von Los Angeles ansteigt. Ist **b** der Richtungsvektor der Geraden, so kann sie beschrieben werden durch

$$g\colon X = F_1 + v\cdot \mathbf{b}.$$

Um die Entfernung, die das Flugzeug bis zum Erreichen des Großkreises auf der Startgerade zurücklegt, zu ermitteln, berechnet man v, sodass $|X| = 1$ ist, also die Startgerade den Großkreis erreicht hat. Der Abstand dieses Punktes zu F_1 multipliziert mit 6383 km liefert das Ergebnis (ca. 60 km).

Veranschaulichung mit DERIVE,
Beschriftung nachträglich hinzugefügt



Hinweise zu DERIVE:

Die Kugel kann man erhalten durch die Eingabe

SPHERE(6371/6383,s,t)

und den Befehl zur 3D-Zeichnung. Sie sieht dann aber noch nicht so schön rund aus. Dazu mit der rechten Maustaste auf die Kugel klicken und „Bearbeiten" wählen. In die Maske zu „Graphen-Parameter" eintragen in Zeile s:

Minimum – pi *Maximum* pi *Anzahl der Felder* 50

in Zeile t:

Minimum 0 *Maximum* pi *Anzahl der Felder* 25.

Wählt man den Reiter „Graphen-Farbe", kann auch noch die Farbgestaltung gewählt werden.

Aufgabe 24 S. 23

Hier geht es um das Verstehen der beiden Methoden.

1. Methode: Es kommt die Variable *dt* hinzu und eine weitere Gleichung, also die Messung eines weiteren Satelliten.

2. Methode: Es bleibt bei drei Gleichungen mit 4 Unbekannten). Verändern Sie dann das „Zeitoffset" *dt*, bis das System genau eine Lösung besitzt (siehe Applet).

IX. Informationen

Internet-Adressen zum Thema GPS

Aus der großen Menge an Seiten mit Informationen rund um das Thema GPS sind hier zwei ausgewählt:

[1] http://www.gps-nav.de/index-Links.html
Eine Liste mit Links verschiedener Art rund um GPS

[2] http://www.toralf-schumann.de/html/gps_main.html
Ein gut verständliches Skript zum Aufbau und der Funktion von GPS, das vor einigen Jahren auf den Seiten der TU-Ilmenau veröffentlicht wurde.

Ideen zu Aufgaben, Beispielen und verbindenden Texten lieferten:

[2] obige Internetseite

[3] Heinrich Abel · GPS, Funktionsweise und mathematische Grundlangen · in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2001 · Franzbecker, Hildesheim

[4] Daniel Haubrock · GPS in der analytischen Geometrie in: Materialien für einen realitätsbezogenen Unterricht, Band 6 · Franzbecker, 2000 Hildesheim

[5] R. Rascher-Friesenhausen · Orientierung mit Mathematik – Was hat GPS mit linearer Algebra zu tun? Lehrerakademie Bremen 2003 · Material-CD

[6] Mathematik · Studienbriefe zur Fachdidaktik für Lehrer der Sekundarstufe II, Geometrie und lineare Algebra MG3, Analytische Geometrie · DIFF (Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen, Projektgruppe Mathematik S II, Freiburg) 1984

Quelle der Clipart-Bilder:

Die Clipart-Bilder stammen aus Corel WordPerfect Office,