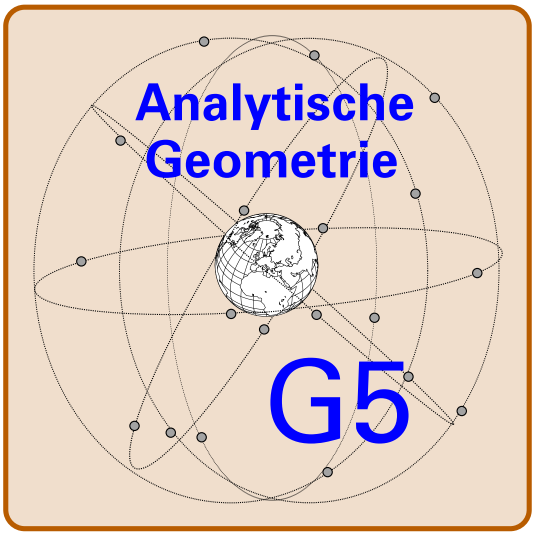


Lehrerheft

Analytische Geometrie

G5

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler

(1) erfahren, wie im Raum Geraden und Ebenen beschrieben werden (auch als Linearkombination) und wie sie zueinander in Beziehung stehen

(2) lernen zum Messen von Länge und Winkeln bei Vektoren den Betrag und das Skalarprodukt kennen

(3) erarbeiten sich mögliche Darstellungen einer Kugel und lernen so auch den Umgang mit den Kugelkoordinaten

(4) entdecken, wie auf der Oberfläche einer Kugel die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten bestimmt wird, und entwickeln geeignete Berechnungsmethoden

(5) wählen geeignet zwischen kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten.

Autor: Winfried Euba
Version: 1.01 vom 08.11.2007

Inhalt

I. Methodische und didaktische Hinweise
innerhalb einer Kursübersicht

In diesem Themenbereich geht es u.a. um eine geometrische Interpretation im dreidimensionalen Anschauungsraum von Objekten aus G2 (Matrizen und Vektoren als Datenspeicher), die dort algebraisch verwendet wurden. So werden hier Vektoren als Punkte oder als Pfeile interpretiert. Das Skalarprodukt erweist sich als fundamentale Idee der analytischen Geometrie, weil sich damit z.B. Winkel berechnen lassen. Und eine Gleichung in einem linearen Gleichungssystem mit drei Variablen zeigt sich hier als Ebene und die Beziehung von Ebenen zueinander führen auf Lösbarkeitsprobleme.
Die Funktionsweise des Navigationssystems GPS ist paradigmatisches Beispiel, weil bei der Beschreibung der Positionsbestimmung auf der Erdkugel Ebenen und Geraden auftreten und Längen und Winkel eine Rolle spielen.

Zur Schreibweise

Die Vektoren aus G2 waren Tupel beliebiger Länge. Tripel (und auch gelegentlich Paare) werden hier als Punkte oder als Pfeile interpretiert. Letztere heißen in diesem Zusammenhang oft Vektoren. Punkte werden zumeist mit Großbuchstaben gekennzeichnet (z.B. P), Pfeile mit kleinen Buchstaben mit Pfeil (p) und deren Koordinaten als Spalte dargestellt.
Diese Schreibweise basiert auf MALLE [1]. Die herkömmliche Schreibweise ist aber ebenfalls erlaubt.

I. **Wie funktioniert GPS?** (S. 1)

Sehr kurze Einführung, die bei Bedarf auch innerhalb des Themenbereiches ergänzt werden kann (z.B. durch Schülervortrag).

II. **Positionsbestimmung** (S.2)

Dieses Kapitel führt ein in den dreidimensionalen Anschauungsraum und hin zur Kugel mit dem paradigmatischen Beispiel (Aufgabe 5), an dem fast alle folgenden Inhalte entwickelt werden.
Aufgabe 1 thematisiert eine Positionsbestimmung in eindimensionaler Situation, sie eignet sich zur Bearbeitung im Unterrichtsgespräch.
Da bei der Lösung der entsprechenden Aufgabe mit zweidimensionaler Situation(Aufgabe 2) die Kreisgleichung nötig ist, muss zuvor der Kreis und die Kreisgleichung wiederholt bzw. eingeführt werden (z.B. im Unterrichtsgespräch). Die Bearbeitung von Aufgabe 2, die anschließende Festlegung eines 3D-Koordinatensystems und dessen „Ausprobieren“ in Aufgabe 3 eignen sich für Gruppenarbeit.
Die Aufgabenteile 4a) und c) knüpfen unmittelbar an die Kreisgleichung an, sodass sich c) analog ergibt. Beim Beweis von a) ist die Strategie hilfreich, den dreidimensionalen Fall in zweidimensionale Teilprobleme zu zerlegen. 4b) folgt aus einer dreidimensionalen Interpretation der Kreisdefinition; Berechnungsformel und Beweis sind wichtiger Teil im Abschnitt IV mit den Aufgaben 13b) und 16c), tauchen also später wieder auf. Die Aufgabenteile a) und c) sowie das Durchlesen von Aufgabe 5 wären eine mögliche Hausaufgabe, 4b) als freiwillige Leistung.
Zum folgenden Arbeitsblatt siehe III. 3 Stunden

III. **Ebenen und Geraden** (S. 7)

Bei der Lösung von Aufgabe 5b) ergibt sich zunächst eine Ebene: die Schnittebene der beiden Kugeln (Erdkugel, Kugel um Sat_1). Analoges gilt für die Berechnungen mit dem 2. Satelliten.
Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden, die später zur Berechnung der zwei möglichen Positionen Verwendung finden wird.

Das Arbeitsblatt (S. 5, 6) kann dazu dienen, dass sich Schülerinnen und Schüler beide Formen der Ebenengleichung erarbeiten, ausgehend von Aufgabe 5b), 1. Absatz. Dazu ist zuerst die Berechnung einer Obermenge der Schnittmenge der beiden Kugeln abgedruckt. Die Lernenden sollen erkennen, dass es sich dabei um eine Ebene handelt, und sie rechnen für diesen speziellen Fall die Koordinaten- in die Parameterform um.
Die folgenden zwei Seiten (7 und 8) geben jeweils mögliche Lösungen für das Arbeitsblatt wieder und können auch ohne das Arbeitsblatt eingesetzt werden. Neu eingeführt wird der Begriff der Linearkombination und der linearen Ab- bzw. Unabhängigkeit von Vektoren.
Mit der zweiten Schnittebene, deren Berechnung noch durchgeführt werden muss, stellt sich nun die Frage der Beziehung beider Ebenen, bzw. nach deren gemeinsamen Punkten. Aus der Gleichung dieser Menge ergibt sich, dass es sich dabei um eine Gerade handelt – was auch die Abbildung der beiden Ebenen nahelegt.
Die Aufgaben 6 – 9 greifen die genannten Inhalte auf:
In Aufgabe 6 sollen sich die Lernenden die möglichen Beziehungen von zwei Ebenen im Raum überlegen und einfache rechnerische Schlussfolgerungen ziehen. In etwa analog geht es in Aufgabe 8 um Geraden. Beide Aufgaben eignen sich für Gruppenarbeit. Dazu gibt es keine Lösungsvorschläge im Lernheft.
In Aufgabe 7 geht es um die Beziehung zweier Ebenen, die in unterschiedlicher Form gegeben sind. Diese Aufgabe eignet sich zur Partnerarbeit, Stillarbeit oder Hausaufgabe.
Um Geraden und Ebenen geht es in Aufgabe 9. Diese Aufgabe besteht aus Teilen einer Abituraufgabe von 2006. Sie erreicht eine höhere Komplexität und eignet sich daher z.B. für Gruppenarbeit.
In Aufgabe 10 werden schließlich die beiden gesuchten Positionen aus Aufgabe 5 berechnet. Eine Besprechung des Ansatzes ist ausreichend, die beiden möglichen Lösungen sind angegeben.
Die Lösung macht deutlich, dass man kartesische Koordinaten normalerweise nicht zur Orientierung auf der Erdoberfläche verwendet.
Es folgt daher eine Definition der geographischen Koordinaten auf der Erde.
Hinweis: Die in der Mathematik verwendeten Kugelkoordinaten, die auch DERIVE verwendet, unterscheiden sich in den Breitengraden von den geographischen Koordinaten: sie beginnen bei der x_3-Achse (Nord) mit 0°, die Äquatorebene liegt bei 90° und Süden bei 180°. Dies ist im Lernheft nicht thematisiert. Für die Verwendung von „SPHERE(r,θ, ϕ)" siehe die DERIVE-Hilfe oder auch die DERIVE-Datei zu Aufgabe 23.
In Aufgabe 11 steht eine Formel zur Umrechnung der geographischen in kartesische Koordinaten. *Der Beweis kann wieder über eine Zerlegung in zweidimensionale Teilprobleme erfolgen. Dabei wird die geometrische Bedeutung der Sinus- und Kosinus-Funktion im rechtwinkligen Dreieck wiederholt.*
Aufgabe 12 wendet diese Formel an, einmal auch rückwärts. Das ermöglicht in c) eine Deutung der beiden in 10 berechneten Punkte.

11 Stunden
Zeit bisher 14(40)
40

IV. **Länge und Winkel** (S. 13)

Das Skalarprodukt steht im Zentrum dieses Kapitels und dessen geometrische Verwendung zur Längen- und Winkelberechnung.
Die Definition der Länge und der Beweis der Formel in Aufgabe 13 kann entfallen, wenn Aufgabe 4b) behandelt wurde. Ansonsten eignet sich Aufgabe 13 zusammen mit der Definition auch als Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit.

Die Definition des Winkels und das Durcharbeiten des Beispiels kann in den Arbeitsauftrag mit einbezogen werden. Den Beweis der Formel für den Winkel könnte eine interessierte Gruppe von Lernenden nachvollziehen und dann dem Kurs vortragen.
Im ersten Beweis (Aufgabe 13 b) der Satz des Pythagoras, im zweiten der „verallgemeinerte Satz des Pythagoras" sind ja eine schöne Wiederholung. Bei Zeitknappheit kann der Beweis auch entfallen.
Die folgenden drei Aufgaben 14, 15 und 16 beleuchten verschiedene Aspekte des Skalarprodukts und seiner geometrischen Anwendung.
Die Aufgaben 14 und 15 eignen sich auch zur Besprechung im Unterrichtsgespräch, ebenfalls der Kasten zum Normalenvektor und die folgende Aufgabe 16a).
Die in Aufgabe 17 geforderte Übersicht kann auch in ein Portfolio eingebunden werden. Siehe dazu S. 16.

6 Stunden
Zeit bisher 20(40)
40

V. Kürzester Weg (S. 17)

Hier geht es darum einzusehen, dass auf der Erdkugel (und jeder anderen Kugel) die kürzeste Verbindung zweier Punkte längs eines Großkreises verläuft.
Das kann „spielerisch" mit Hilfe der beiden Applets geschehen, ein formaler Beweis ist nicht erforderlich.
Bei der Lösung von Aufgabe 18 a) und b) kann die Verwendung eines CAS Zeit sparen. Entschließt man sich zu 18c) als Wiederholung von Inhalten der Mittelstufe, wird die Lösung von b) lediglich eine Anwendung von c).

2 Stunden
Zeit bisher 22(40)
40

VI. Aufgaben (S. 20)

Die Aufgaben behandeln bisher noch nicht getrennt behandelte Problemstellungen zu Abständen (Aufgabe 19) und zu Winkeln (Aufgabe 22).
Mit Aspekten von Flugbahnen beschäftigen sich die Aufgaben 20 b) und 23, wobei die kurze Aufgabe 20 b) eventuell überraschende Ergebnisse liefert.
Aufgabe 20 a) bringt noch eine Positionsbestimmung mit realistischen Daten, die aber nur mit Hilfe eines CAS gelöst werden sollte.
In Aufgabe 21 gibt es Überlegungen zu linearen Gleichungssystemen. Diese Aufgabe geht im Grundkurs über die verlangten Anforderungen hinaus.
Doch 21a) schult die räumliche Vorstellung und verbindet sie mit algebraischen Objekten (Lösungsmengen). Ähnliches gilt auch für 21b) bei stärkerer Betonung des algebraischen Aspekts.
Aufgabe 24 liefert Informationen zum GPS-Zeitfehler. Diese Inhalte sind ebenfalls nicht vorgeschrieben. *Aufgabe 24 kann als Anregung für einen Schülervortrag dienen, für den sich auch Lernende mit eher geringen mathematischen Kenntnissen interessieren könnten. Das zugehörige Applet erleichtert eventuell das Verständnis.*

Bei den Lösungsvorschlägen zu den Aufgaben stehen auch zumeist Kommentare. Siehe S. 4ff.

VII. Rückschau und Selbsteinschätzung (S. 24)

Zumindest die Rückschau eignet sich auch als Teil eines Portfolios, das aber auch Elemente von Selbsteinschätzung enthält.

VIII. Lösungsvorschläge (S. 26)

Da die Lösungsvorschläge zumeist Zwischenschritte enthalten, kann man diese auch gezielt einsetzen, z.B. zum Nachvollziehen (und späterem Vortragen) einer Aufgabenlösung.

IX. Informationen (S. 32)

II. Aufgaben
Lösungsvorschläge & Hinweise

Aufgabe 1 S. 2

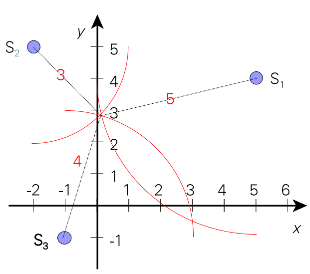
Gegeben sind zwei Punkte $S_1 = -2$ und $S_2 = 4$, die zwei Satelliten darstellen sollen.
Gesucht ist die Position x_P des Punktes P.
Bestimmen Sie geometrisch und formal rechnerisch die Position von P, wenn der Abstand zu S_2 mit 2 und der Abstand zu S_1 mit 4 gemessen wurde.
Unter welcher Voraussetzung sind wirklich zwei „Satelliten" zur eindeutigen Positionsbestimmung von P notwendig? Erläutern Sie, wann dazu ein „Satellit" ausreicht.

Geometrische Lösung:
Abstand zu S_1 ist 4 $\Rightarrow$ Position $x_P = -6$ oder $x_P = 2$
Abstand zu S_2 ist 2 $\Rightarrow$ Position $x_P = 2$ oder $x_P = 6$
Übereinstimmung bei $x_P = 2$, das ist also die Position von P.
Formal rechnerische Lösung:
$|x_P - x_{S1}| = 4$ und $|x_P - x_{S2}| = 2$
$x_P + 2 = 4 \Rightarrow x_P = 2$ oder $x_P + 2 = -4 \Rightarrow x_P = -6$ und
$x_P - 4 = 2 \Rightarrow x_P = 6$ oder $x_P - 4 = -2 \Rightarrow x_P = 2$.
Übereinstimmung bei $x_P = 2$, das ist also die Position von P.
Die Messung mit nur einem „Satelliten" könnte ausreichen, wenn nur ein bestimmter Abschnitt der Achse in Frage kommt.
Mit dieser einfachen Aufgabe soll in das Problem der Positionsbestimmung eingeführt werden. Wegen der Eindimensionalität ist noch kein Kreis notwendig.

Aufgabe 2 S. 2

Gegeben sind drei Punkte $S_1\,(5\,|\,4)$, $S_2(-2\,|\,5)$ und $S_3(-1\,|\,-1)$, die drei Satteliten darstellen sollen.
Gesucht ist die Position $(x_P\,|\,y_P)$ eines Punktes P, dessen Entfernungen zu S_1 mit 5 und zu S_2 mit 3 gemessen werden. Bestimmen Sie geometrisch und formal rechnerisch, welchen Abstand S_3 messen wird, und geben Sie damit die Position von P an.
Unter welcher Voraussetzung sind tatsächlich drei „Satelliten" zur eindeutigen Bestimmung der Position von P notwendig? Erläutern Sie, wann man mit zwei „Satelliten" auskommen könnte.

Geometrische Lösung:



Nebenstehend eine der beiden möglichen Lösungen, wobei S_3 als Abstand etwa 4 meldet. P liegt dann etwa bei $(0{,}1\,|\,2{,}9)$.

Rechnerische Lösung:
$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 5^2$ und
$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 3^2$
$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 = 25$ und
$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 9$. Vereinfacht ergibt sich
I $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$
II $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$.
$\Rightarrow$ I–II: $-14x + 2y - 4 = 0$, also $y = 7x + 2$.
Eingesetzt etwa in I folgt $50x^2 - 38x + 4 = 0$ und damit

$x = \frac{19}{50} \pm \frac{\sqrt{161}}{50}$, also $x_1 \approx 0{,}1262$ und $x_2 \approx 0{,}6338$.

Wir wählen Lösung x_1 für den Standort P und erhalten durch Einsetzen $y_1 \approx 2{,}8836$. Damit ist $P = (0{,}1262\,|\,2{,}8836)$
Der Abstand zwischen P und S_3 ist etwa 4,0436.
Wenn der 2. Schnittpunkt, der bei zwei Kreisen auftritt, ausgeschlossen werden kann, sind zur Positionsbestimmung nur zwei Satelliten nötig.
Bereits im Zweidimensionalen gibt es unendlich viele mögliche Positionen pro Satellit (Kreislinie), die sich bei zwei Satelliten bereits auf zwei mögliche Positionen reduzieren (zunächst Schnittgerade zweier Kreislinien). Der Kreis dient hier auch als Modell für die Gleichung der Kugeloberfläche in Aufgabe 4. Den Abstand zwischen P und S_3 kann man z.B. mit dem Lehrsatz des Pythagoras berechnen und die beiden Seitenlängen dabei als Koordinaten der Differenz $P-S_3$ deuten.

Aufgabe 3 S. 3

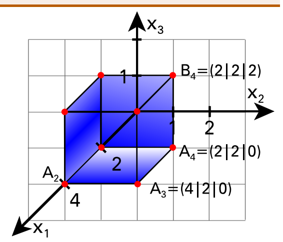
Ein Würfel mit der Kantenlänge 2 LE stehe so auf der x_1x_2-Ebene, dass zwei seiner Eckpunkte auf der x_1-Achse liegen: $A_1 = (2\,|\,0\,|\,0)$ und $A_2 = (4\,|\,0\,|\,0)$.

a) Zeichnen Sie diese Punkte in obiges Koordinatensystem, wobei eine Kästchenlänge einer Längeneinheit (LE) entsprechen soll. Beachten Sie dabei den Hinweis zur x_1-Achse.

b) Zeichnen Sie nun den kompletten Würfel ein und ermitteln Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte ODER Ermitteln Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte und zeichnen Sie so den Würfel.

$A_1 = (2\,|\,0\,|\,0)$, $A_2 = (4\,|\,0\,|\,0)$,
$A_3 = (4\,|\,2\,|\,0)$, $A_4 = (2\,|\,2\,|\,0)$;

$B_1 = (2\,|\,0\,|\,2)$, $B_2 = (4\,|\,0\,|\,2)$,
$B_3 = (4\,|\,2\,|\,2)$, $B_4 = (2\,|\,2\,|\,2)$.



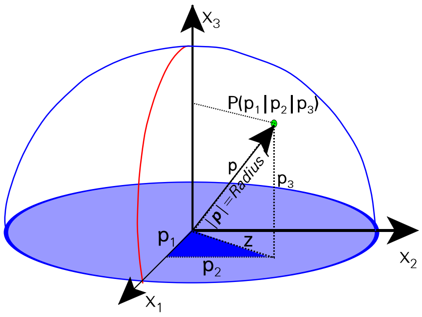
Aufgabe 4 S. 3

a) Zeigen Sie, dass jeder Punkt $X = (x_1\,|\,x_2\,|\,x_3)$ auf der Kugeloberfläche der Kugel-Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ genügt, sofern der Mittelpunkt im Ursprung liegt und r der Radius der Kugel ist.

b) Definieren Sie die Länge eines Vektors (Abstand eines Punktes vom Ursprung, Abstand zweier Punkte). Begründen Sie Ihre Definition und erproben Sie diese an einigen Beispielen.

c) Ermitteln Sie analog zum Kreis die Kugel-Gleichung für einen beliebigen Mittelpunkt M $(m_1\,|\,m_2\,|\,m_3)$.

a) Zwischen den mit x_1 und x_2 gekennzeichneten Strecken ist ein rechter Winkel. Daher gilt $x_1^2 + x_2^2 = z^2$.
Die mit z und x_3 gekennzeichneten Strecken stehen ebenfalls senkrecht aufeinander, daher ist $z^2 + x_3^2 = r^2$. Ersetzt man z^2 entsprechend der ersten Beziehung, erhält man die Behauptung. *Siehe Abbildung auf der nächsten Seite.*



b) Den Abstand eines Punktes P vom Nullpunkt bzw. die Länge des entsprechenden Pfeils kann man über die Kugelgleichung erhalten, wenn man P als Punkt auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt deutet: $|P| = |\vec{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$ = Radius r.

Der Abstand zweier Punkte lässt sich darauf zurückführen: der Pfeil wird verschoben.

c) Der neue Mittelpunkt bedeutet eine Verschiebung einer jeden Koordinate von Punkten auf der Kugel: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$.

Die Gleichung der Kugeloberfläche kann analog zum Kreis mit dem Lehrsatz des Pythagoras bewiesen werden. Die angegebene alternative Schreibweise erinnert an das Skalarprodukt aus G2 und führt so in b) vielleicht schon zu einer geometrischen Deutung desselben. Dieser Aspekt ist Thema im Abschnitt IV, S. 13ff.

Der Abstand zweier Punkte kann bei einer Andeutung bleiben, da eine rechnerische Lösung der Andeutung z.B. in Aufgabe 16 vorkommt.

Die Auswirkung der Verschiebung des Mittelpunkts vom Nullpunkt in den Punkt $M = (m_1|m_2|m_3)$ auf die Kugelgleichung entspricht wieder der Kreisgleichung und bietet Verknüpfungen zur Analysis (Verschiebung des Funktionsgraphen in x-Richtung).

Aufgabe 5 · paradigmatisches Beispiel — S. 4

b) Betrachten Sie die Kugel um Sat_1 (2|2|3) mit dem Radius $d_1 = 3{,}2$ und stellen Sie die Gleichung der Kugeloberfläche auf. Berechnen Sie die Schnittmenge E_1 dieser Kugeloberfläche mit der Erdoberfläche.
Berechnen Sie analog die Schnittmenge E_2 der Erdoberfläche mit der Kugel um Sat_2 (3|2|2)mit dem Radius $d_2 = 3{,}3$.
Um welches geometrische Objekt handelt es sich jeweils bei dieser Schnittmenge?

Eine Lösung für b), erster Abschnitt, steht auf Seite 5.

$(x_1-3)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-2)^2 = 3{,}3^2 \Leftrightarrow$

I $x_1^2 - 6x_1 + 9 + x_2^2 - 4x_2 + 4 + x_3^2 - 4x_3 + 4 = 10{,}89$

II $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

Die Punkte, die zur Schnittmenge dieser beiden Kugeln gehören, müssen beide Gleichungen erfüllen.

II – I: $6x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 17 = -9{,}89 \Leftrightarrow$

$6x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 7{,}11 \mid \cdot 100$

E_2: $600x_1 + 400x_2 + 400x_3 = 711$

E_1: $100x_1 + 100x_2 + 150x_3 = 194$

$E_2 - 4 \cdot E_1 \Rightarrow 200x_1 - 200x_3 = -65$.

Auflösen nach x_3 und Umformen führt auf die Gerade g mit

$$g:\ X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}4525 \\ 0{,}325 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (siehe S. 9).

Durch die Normierung des Erdradius auf 1 sind die auftretenden Zahlen vergleichsweise angenehm, es müssen aber kleinere rechnerische Abweichungen zum tatsächlichen Erdumfang (der hier nicht vorkommt) in Kauf genommen werden und das Ergebnis ist von der Normierung zu „befreien".

Diese Aufgabe behandelt die Positionsbestimmung für ein realistisches Beispiel und führt bei der schrittweisen Berechnung bzw. Auswertung zu Ebenen (zunächst in Koordinatenform) und Geraden. Die Bestimmung der beiden möglichen Standorte in Aufgabe 10 macht schließlich deutlich, dass die kartesischen Koordinaten nicht zur Orientierung auf der Erdoberfläche verwendet werden, sondern die geographischen.

Aufgabe 6 — S. 10

a) Sie haben durch Rechnung festgestellt, dass sich die beiden Ebenen aus Aufgabe 5 in einer Geraden schneiden.
- Welche Beziehungen zwischen zwei Ebenen sind noch möglich?
- Wie lässt sich die Beziehung aus den Gleichungen der beiden Ebenen schließen?

Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

b) Die Beziehungen zwischen zwei Ebenen, die in Koordinatenform vorliegen, kann über die Lösung eines linearen Gleichungssystems geschehen (2 Gleichungen mit 3 Variablen, also unterbestimmt). Die Lösungsmenge kann z.B. eine Gerade beschreiben (s.o.).
Beschreiben Sie auf Grund Ihrer Ergebnisse von a), welche Lösungsmengen bei einem linearen Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Variablen auftreten können.

a) Die Ebenen können parallel sein. Dabei ist es möglich, dass sie deckungsgleich oder verschieden sind.
Das bedeutet für die Berechnung der Schnittmenge, dass die beiden Gleichungen bei „deckungsgleich" äquivalent sein müssen, bei „verschieden" sich jedoch nach möglicher Äquivalenzumformung in der Konstante unterscheiden. Das System ist dann unlösbar ($0 = K_{\text{nicht } 0}$).

b) Ebenen schneiden sich: 1 Parameter bleibt in L (Gerade)
Ebenen parallel, deckungsgleich: L = Ebene
Ebenen parallel, verschieden: L = { }

Aufgabe 7 — S. 10

a) Gegeben ist die Ebene E in Parameterform

$$E:\ X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ (mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

Ermitteln Sie die Koordinatenform zu E.

b) Gegeben ist die Ebene F in Koordinatenform
F: $x_1 + 2x_2 = 3$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie die Parameterform zu F.

c) Untersuchen Sie die Beziehung der beiden Ebenen.

a) I. $x_1 = 1 - \lambda + 2\mu \Rightarrow \lambda = 1 + 2\mu - x_1 = -1 - x_1 + 2x_2$

II. $x_2 = 1 + \mu \Rightarrow \mu = -1 + x_2$

III. $x_3 = -1 + 2\lambda - \mu$

eingesetzt in III: $x_3 = -1 - 2 - 2x_1 + 4x_2 + 1 - x_2$

zusammengefasst folgt: $2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2$, also

E: $2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2$ *(in Koordinatenform)*.

b) $x_1 = 3 - 2x_2 + 0x_3$ bedeutet

$$X = \begin{pmatrix} 3-2s-0r \\ s \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Parameterform zu F.

c) Strategie (1):

LGS mit 2 Gleichungen
$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ \text{II} & x_1 + 2x_2 = 3 \end{array}$$

Die linke Seite von I kann nicht Vielfaches von II sein, da dort x_3 nicht vorkommt, also beliebig ist.

$\Rightarrow$ E und F $\nparallel$, sie schneiden sich in einer Geraden:

II $\Leftrightarrow x_1 = 3 - 2x_2$ und damit ist

I $\Leftrightarrow x_3 = -2-6+4x_2+3x_2 = -8 + 7x_2$.

Für die Schnittgerade g ergibt sich die Geradengleichung

$$g_1:\ X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Strategie (2): (mit Parameterform)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrrrrcr} \text{I} & -2s & & +u & -2t & = & -2 \\ \text{II} & s & & & -t & = & 1 \\ \text{III} & & r & -2u & +t & = & -1 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{I}+2\cdot\text{II}}$$

$$\begin{array}{lrrrrcr} \text{I} & -2s & & +u & -2t & = & -2 \\ \text{II} & & & u & -4t & = & 0 \\ \text{III} & & r & -2u & +t & = & -1 \end{array} \quad \stackrel{\text{II}}{\Longrightarrow} u = 4\cdot t$$

Eingesetzt in die rechte Seite obiger Gleichung folgt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 4t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und}$$

damit $g_2:\ X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Man überprüft leicht, dass beide Stützpunkte auf „beiden“ Geraden liegen müssen, die Richtungsvektoren stimmen überein. Also ist $g_1 = g_2$.

Die Lösung des Systems bedeutet, dass die beiden Ebenen nicht parallel sein können. Man kann es dabei bewenden lassen oder aber über die Beziehungen der beiden Paare von Richtungsvektoren nachdenken, um auch für diese Darstellung der Ebenen ein Kriterium für eine Entscheidung über deren Lage zueinander zu bekommen.

Aufgabe 8 — S. 10

a) Geben Sie ein Beispiel für zwei parallele Geraden im Raum an und begründen Sie, warum diese Geraden parallel verlaufen müssen.

b) Welche weiteren Beziehungen zwischen zwei Geraden im Raum sind möglich?
Geben Sie entsprechende Beispiele an und formulieren Sie allgemeine Kriterien für die Lagebeziehungen.

c) Ermitteln Sie eine Gerade, die in der Ebene E aus Aufgabe 7 liegt, und eine Gerade in Ebene F.
Untersuchen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden.

a) Sind die Richtungsvektoren linear abhängig, so sind zwei Geraden parallel, also z.B. $g_1 \parallel g_2$ mit

$$g_1:\ X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } g_2:\ X = t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{ denn}$$

$-2\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Da g_2 durch den Ursprung verläuft, g_1 aber nicht, sind die Geraden nicht deckungsgleich.

b) Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, sie zeigen also in verschiedene Richtungen (nicht entgegengesetzt), die Geraden sind daher nicht parallel. Da sind zwei Fälle denkbar:
- die Geraden schneiden sich, sie liegen in einer Ebene
- die Geraden schneiden sich nicht, laufen im Raum also über- bzw. untereinander auf verschiedenen Ebenen.

Ausreichend als Kriterium ist, ob beim Versuch der Schnittpunktberechnung eine Lösung existiert oder ob die Lösungsmenge leer ist.

c) Hier sind einfache Lösungen denkbar wie „Stützpunkt + Parameter · einer der Richtungsvektoren“ oder unzählige andere. Die Lage hängt von den gewählten Beispielen ab.

Zu b): Für den Grundkurs ist es ausreichend, die Fälle parallel und nicht parallel vorab zu sehen und windschief aus der leeren Lösungsmenge bei der Schnittpunktberechnung zu schließen. Der Bergriff „windschief“ kann an dieser Stelle eingeführt werden.
Relativ einfache aber doch interessante Fragestellungen ergeben sich bei c), wenn als eine der Geraden die Schnittgerade gewählt wird.

Aufgabe 9 — S. 11

Gegeben sind die Punkte A (−1 | 6 | 1), B (2 | 2 | 2), C (0 | 7 | −1) sowie P (0 | 6 | 6) und Q (6 | 6 | 6).
Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, die durch die Punkte P und Q geht.

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 von E mit den Koordinatenachsen.
S_1, S_2, S_3 und der Koordinatenursprung sind vier Eckpunkte eines Würfels. Zeichen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und den Würfel in ein geeignetes Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass die Punkte P und Q ebenfalls Eckpunkte des Würfels sind.

c) Gegeben ist eine Ebene F durch die Eckpunkte P und Q des Würfels aus Aufgabenteil b) und den Punkt R (6 | 0 | 4).
Bestimmen Sie den Schnittpunkt von F mit der x_3-Achse.
Zeichen Sie den im Würfel befindlichen Teil der Ebene F in obiges Koordinatensystem ein.
Die Ebene F zerlegt den Würfel in zwei Teile. Ermitteln Sie das Verhältnis der Volumeninhalte der entstandenen Teilkörper.

Teile einer Aufgabe des Zentralabiturs 2006 in Hamburg.

a) Ebene E: z.B. A als Stützpunkt wählen und die Vektoren B − A und C − A als Richtungsvektoren liefert eine Parameterform:

E: $X=\begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Eliminieren von λ und μ führen auf die Koordinatengleichung:

$$\begin{array}{llcllll} \text{I} & x_1 & = & -1 & +3\lambda & +\mu & \\ \text{II} & x_2 & = & 6 & -4\lambda & +\mu & \xrightarrow[2\cdot\text{I}+\text{III}]{\text{I}-\text{II}} \\ \text{III} & x_3 & = & 1 & +\lambda & -2\mu & \end{array}$$

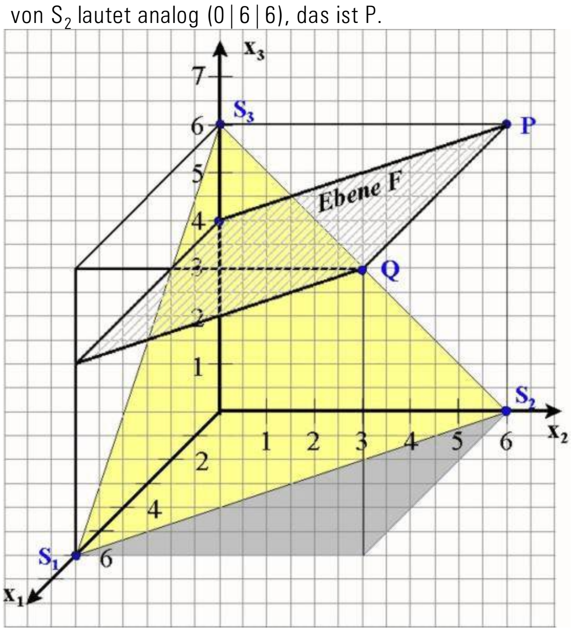
$$\begin{array}{llcll} \text{I} & x_1 & = & -1 & +3\lambda \;\; +\mu \\ \text{II} & x_1-x_2 & = & -7 & +7\lambda \quad \xrightarrow[\text{III}-\text{II}]{} \text{ ergibt} \\ \text{III} & 2x_1+x_3 & = & -1 & +7\lambda \end{array}$$

E: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$.

Die Gerade durch P und Q hat z.B. die Geradengleichung

g: $X=\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$, wenn P als Stützpunkt und Q − P als Richtungsvektor gewählt wird.

b) Zur Berechnung der Achsenschnittpunkte setzt man die Koordinaten der nicht betroffenen Achsen gleich Null und erhält so $S_1 = (6|0|0)$, $S_2 = (0|6|0)$, $S_3 = (0|0|6)$.
Die Kantenlänge des Würfels ist 6, wegen der gegebenen 4 Eckpunkte muss der 4. Eckpunkt in der x_1x_2-Ebene $(6|6|0)$ sein, der Eckpunkt senkrecht oberhalb dann $(6|6|6)$, das ist aber Q. Der Eckpunkt senkrecht oberhalb von S_2 lautet analog $(0|6|6)$, das ist P.



c) Da P und Q Eckpunkte des Würfels sind und R auf der Würfelkante senkrecht oberhalb von S_1 liegt, muss der Schnittpunkt mit der x_3-Achse dieselbe x_3-Koordinate wie R haben: F schneidet die x_3-Achse in $(0|0|4)$.
Die Ebene F zerlegt den Würfel in zwei Prismen. Das „obere" Prisma hat ein rechtwinkliges Dreieck als Grundfläche, das „untere" ein Trapez. Es ist $V_{\text{Würfel}} = 6^3 = 216$.
„Oberes" Prisma: Grundfläche = ½ · 6 · 2, Höhe = 6, also $V_{\text{oberes Prisma}} = 6 \cdot 6 = 36 \Rightarrow V_{\text{unteres Prisma}} = 180$.
Verhältnis der Volumenanteile ist dann 36 : 180 = 1 : 5.

Diese Übungsaufgabe soll auch deutlich machen, dass immer wieder elementargeometrische Kompetenzen notwendig oder zumindest hilfreich sind.

Aufgabe 10

Zur Aufgabe 5 (S. 4) sind bisher die Schnittebenen zwischen je einem der beiden Satelliten und der Erdkugel berechnet worden sowie deren Schnittgerade.
Die gesuchte Position liegt also auf dieser Schnittgeraden, aber auch auf der Erdoberfläche.
Ermitteln Sie die beiden Schnittpunkte der Geraden mit der Erdoberfläche.

Der Standort der Person muss sowohl auf der Geraden, als auch auf der Erdoberfläche sein, die gesuchten Punkte der Geraden müssen also die Kugelgleichung erfüllen:

$\left(\begin{pmatrix}0\\1{,}4525\\0{,}325\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2{,}5\\1\end{pmatrix}\right)^2=1$, ausmultipliziert ergibt sich

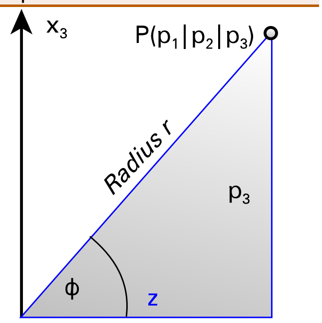
$8{,}25\,s^2 - 6{,}6125\,s + 2{,}21538125 = 1$. Gerundet erhält man die beiden Lösungen $s_1 \approx 0{,}51603$ und $s_2 \approx 0{,}28549$.
Eingesetzt in die Geradengleichung erhält man nun zwei Punkte $Pos_1 \approx (0{,}516|0{,}162|0{,}841)$ und $Pos_2 \approx (0{,}285|0{,}739|0{,}610)$.

Letztendlich ergibt sich die erwartete Schnittmenge zwischen drei Kugeln.
Wenn Fragen auftauchen, ob oder warum man beim Skalarprodukt die binomische Formel anwenden kann, ist leicht ein Beweis für dieses Beispiel (aber auch allgemein) möglich, z.B. durch Zusammenfassen der Summe in einen Vektor.

Aufgabe 11

Leiten Sie mit Hilfe der obigen Abbildung die nachfolgende Beziehung zwischen den kartesischen Koordinaten und den geographischen Koordinaten her:

$$x_1 = r \cdot \cos\lambda \cdot \cos\phi$$
$$x_2 = r \cdot \sin\lambda \cdot \cos\phi$$
$$x_3 = r \cdot \sin\phi$$

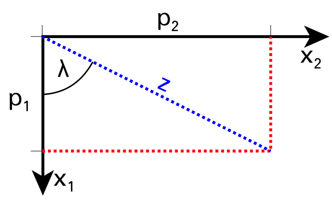


<u>3. Koordinate:</u> Mit den Bezeichnungen der Abbildung ist im oberen rechtwinkligen Dreieck

$\sin\phi = \dfrac{p_3}{r}$ und damit

$p_3 = r\cdot\sin\phi$ $(0° \le \phi \le 90°)$.

Für $-90° \le \phi < 0°$ ändert sich das Vorzeichen von p_3 und da $\sin(-\phi) = -\sin\phi$, gilt die Gleichung für alle zulässigen Winkel ϕ.



<u>2. Koordinate:</u> Im oberen rechtwinkligen Dreieck ist $\cos\phi = \dfrac{z}{r}$,

im unteren $\sin\lambda = \dfrac{p_2}{z}$.

Durch Multiplikation folgt $\cos\phi\cdot\sin\lambda = \dfrac{p_2}{r}$ bzw. $p_2 = r\cdot\cos\phi\cdot\sin\lambda$.

Für $-90° \leq \phi < 0°$ ändert sich in der Kosinus-Gleichung rechts nichts, und da $\cos(-\phi) = \cos\phi$ gilt sie für alle zulässigen ϕ. Für $90° < \lambda \leq 180°$ gibt es in der Sinusgleichung keine Änderungen, $-180° \leq \lambda < 0°$ ändert sich das Vorzeichen von p_2, was mit einer Vorzeichenänderung vom Sinus einhergeht. Die Gleichung für p_2 gilt daher für alle zulässigen Winkel.

1. Koordinate: Im unteren rechtwinkligen Dreieck ist

$\cos\lambda = \dfrac{p_1}{z}$. Damit folgt analog $p_1 = r \cdot \cos\phi \cdot \cos\lambda$.

Für $-90° \leq \lambda < 0°$ ändert sich nichts.
Für $-180° \leq \lambda < -90°$ und $90° < \lambda \leq 180°$ ändert sich das Vorzeichen von p_1, zugleich aber auch das Vorzeichen vom Kosinus. Die Gleichung für p_1 gilt also ebenso für alle zulässigen Winkel.

Den Beweis für Winkel zwischen 0° und 90° können sicher einige Schülerinnen und Schüler führen und etliche nachvollziehen. Er stellt zugleich eine gute Wiederholung für die Sinus- und Kosinus-Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck dar. Bezieht man die zulässigen Winkel für ϕ und λ mit ein, sind Kenntnisse der entsprechenden Funktionen zumindest hilfreich.

Aufgabe 12 S. 12

a) Hamburg gerundet hat die geographischen Koordinaten 10° O; 53,5° N. Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten.

b) Osnabrück hat (gerundet) die kartesischen Koordinaten (3858 | 542 | 5041). Ermitteln Sie aus obigen Beziehungen die geographischen Koordinaten.

c) Ermitteln Sie zu den kartesischen Koordinaten der beiden Positionen von Aufgabe 10 (bzw. 5) die geographischen Koordinaten.
Welche der Positionen ist der Standort der Person, wenn ihr bekannt ist, dass sie sich in Nordeuropa befindet?

a) $\lambda = 10°$ und $\phi = 53{,}5°$

$\Rightarrow \quad x_1 = 6371 \cdot \cos 10° \cdot \cos 53{,}5° \approx 3.732$
$\quad\;\; x_2 = 6371 \cdot \sin 10° \cdot \cos 53{,}5° \approx 658$
$\quad\;\; x_3 = 6371 \cdot \sin 53{,}5° \approx 5121$

b) $x_3 = 5041 = r \cdot \sin\phi$.
Die Daten ergeben als Radius ungefähr 6371. Also ist

$$\phi = \arcsin\frac{5041}{6371} \approx \arcsin 0{,}79124 \approx 52{,}30°.$$

$x_2 = 542 = 6371 \cdot \cos 52{,}3° \cdot \sin\lambda$. Daraus folgt

$$\lambda = \arcsin\frac{542}{6371 \cdot \cos 52{,}3°} \approx \arcsin 0{,}13912 \approx 8{,}00°.$$

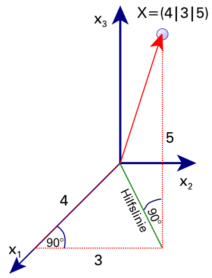
Die analoge Berechnung mit x_1 liefert ebenfalls $\lambda \approx 8{,}00°$.

c) Die Berechnung erfolgt analog, beide Positionen liefern als Erdradius etwa 1. Für die gerundeten Koordinaten aus Aufgabe 10 folgt:
$Pos_1 \approx (17{,}4°\text{ O}; 57{,}2°\text{ N})$ und $Pos_2 \approx (68{,}9°\text{ O}; 37{,}6°\text{ N})$.
Pos_1 liegt nordöstlich von Hamburg in Nordeuropa, Pos_2 liegt in Asien (Tadschikistan), kommt also nicht in Frage. Die Person befindet sich daher in Pos_1.

Aufgabe 13 S. 13

a) Sei $X = (4 | 3 | 5)$ und $\vec{x}$ der Pfeil vom Ursprung nach X. Berechnen Sie die Länge von $\vec{x}$, also $|\vec{x}|$.

b) Versuchen Sie, die eben verwendete Formel zur Berechnung der Länge zu beweisen.



a) $|\vec{x}| = \sqrt{16 + 9 + 25} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$

b) Sei $X = (x_1 | x_2 | x_3)$ und die Hilfslinie heiße h. Dann ist Länge des Pfeils$^2 = h^2 + x_3^2$ und $h^2 = x_1^2 + x_2^2$. Eingesetzt ergibt sich die Behauptung.
Der Beweis lässt sich analog mit den konkreten Koordinaten führen.

Auch hier gelingt ein Beweis mit der Strategie der Zerlegung des dreidimensionalen Problems in mehrere zweidimensionale.

Aufgabe 14 S. 15

Verwenden Sie für die Gerade g_2 aus dem Beispiel nun den Richtungsvektor $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie erneut den Schnittwinkel der beiden Geraden. Deuten Sie das Ergebnis im Vergleich zum Beispiel.

Es ändert sich das Vorzeichen des Skalarprodukts:

$\vec{q} \cdot \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -28 - 32 - 9 = -69$. Damit ist

$\cos\alpha \approx -0{,}9756$ und $\alpha \approx 167{,}3°$.

Berechnet wird also der Winkel quasi zwischen den Pfeilspitzen, die beiden möglichen Ergebnisse ergänzen sich zu 180°.

Man könnte hier noch weiter gehen, denn der eben berechnete Fall führt bei Geraden und Ebenen in Abhängigkeit von der Richtung der Vektoren zu zwei möglichen Schnittwinkeln. Nur der spitze Winkel kann sich ergeben, wenn der Betrag des Bruches oder des Zählers gewählt wird.

Aufgabe 15 S. 15

a) Das Skalarprodukt zweier Vektoren (jeweils ungleich dem Nullvektor) zeigt bei einem bestimmten Winkel zwischen den Vektoren diesen unmittelbar an.
Um welchen Winkel handelt es sich, und welchen Wert hat dabei das Skalarprodukt?
Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass die Formel zum Berechnen eines Winkels zwischen zwei Vektoren auch so geschrieben werden könnte:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}.$$

Wie unterscheidet sich der Vektor $\vec{a}$ vom Vektor $\dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$?

c) Untersuchen Sie, ob das Skalarprodukt kommutativ ist, also ob das Vertauschen der Faktoren das Ergebnis unverändert lässt.

a) $\cos 90° = 0$, also folgt aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{a} \perp \vec{b}$. Stehen zwei Vektoren senkrecht zueinander, folgt umgekehrt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Weil die Berechnungsformel nur Null wird, wenn der Zähler Null ist, spielen die Längen der Vektoren (jeweils positiv) in diesem Fall keine Rolle.

b) Der Betrag eines Vektors ist eine Zahl, daher auch der Kehrbruch, vorausgesetzt, der Vektor ist nicht der Nullvektor. Zu untersuchen ist, ob $s\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (s\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}$ mit $s \in$ IR.

$s \cdot ((a_1|a_2|a_3) \cdot (b_1|b_2|b_3)) = s \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$
$= s \cdot a_1b_1 + s \cdot a_2b_2 + s \cdot a_3b_3 = (sa_1)\,b_1 + (sa_2)\,b_2 + (sa_3)b_3$
denn die Multiplikation reeller Zahlen kann beliebig beklammert werden (ist assoziativ)
$= (sa_1|sa_2|sa_3) \cdot (b_1|b_2|b_3) = (s\cdot(a_1|a_2|a_3)) \cdot (b_1|b_2|b_3)$.
Der Rest folgt mit c).
Der Betrag eines Vektors gibt seine Länge an. Multipliziert man einen Vektor mit dem Kehrbruch seiner Länge, hat der sich ergebende Vektor die Länge 1.

c) $(x_1|x_2|x_3) \cdot (y_1|y_2|y_3)$
$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3$
denn die Multiplikation von Zahlen ist kommutativ
$= (y_1|y_2|y_3) \cdot (x_1|x_2|x_3)$.

Bei b) sollte man auch Ansätze von Beweisideen akzeptieren, ebenso bei c). Wichtig ist, dass Lernende darüber reflektieren, ob man beim Skalarprodukt „normal" rechnen darf.
Im zweiten Teil von b) kann der Name „Einheitsvektor" eingeführt werden.

Aufgabe 16 S. 16

a) Versuchen Sie, die Behauptung im Kasten wenigstens an einem Beispiel zu überprüfen.
Wählen Sie dazu die Ebene F aus Aufgabe 7b), S. 10.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe von Normalenvektoren den Schnittwinkel der Ebenen E und F aus Aufgabe 7, S. 10.

c) Die Länge eines Vektors **p** kann auch als *Abstand zweier Punkte* gedeutet werden: *der Abstand vom Nullpunkt zum Punkt P (an dem der Pfeil **p** endet).*
Bestimmen Sie den Abstand der beiden Punkte P und Q mit $P = (-1|2|3)$ und $Q = (4|-2|1)$ (siehe Abb.).

a) Normalenvektor zu F sollte $n_F = (1|2|0)$ sein. Die Parameterform zu F lautet $X = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und es gilt $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = -2+2+0 = 0$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 0$.
Der Vektor $(1|2|0)$ steht also senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren und damit auch auf jeder Linearkombination der beiden:
$$\left(s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2s\\s\\r\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = -2s+2s = 0.$$
Es handelt sich also um einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene F steht, denn der Stützpunkt bewirkt lediglich eine Parallelverschiebung der Ebene.

b) Für sich nicht senkrecht schneidende Ebenen gilt wie für entsprechende Geraden, dass es theoretisch zwei Schnittwinkel gibt, nämlich einen spitzen und einen stumpfen Winkel, die sich zu 180° ergänzen. Normalerweise gibt man den spitzen Winkel an.
Der Winkel zwischen den Normalenvektoren ist offenbar einer der möglichen Schnittwinkel, denn es entsteht dabei ein Viereck mit zwei 90° Winkeln und dem Schnittwinkel α der Ebenen. Der Winkel zwischen den Normalenvektoren ist daher $180° - \alpha$.
Es ist $n_E = (2|-3|1)$ und $n_F = (1|2|0)$.
$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{|2-6+0|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}} \approx 0{,}4781$$
$\Rightarrow \alpha \approx 61{,}4°$.

c) $Q - P = (4|-2|1) - (-1|2|3) = (5|-4|-2)$ beschreibt den Pfeil von P nach Q (siehe z.B. Skizze, S. 13 unten, Beispiel, S. 14). Das ist auch schnell nachgeprüft mit einer Probe: $P + (Q-P) = (-1|2|3) + (5|-4|-2) = (4|-2|1) = Q$
Abstand der beiden Punkte: $|Q-P| = |PQ| = \sqrt{45} \approx 6{,}7$.

Für Teil a) sind Überlegungen erforderlich, wie eine Ebene „aufgespannt" wird und was daher ein Vektor für Eigenschaften haben muss, der senkrecht auf der Ebene steht. Auch bei Überlegungen am Beispiel wird deutlich, dass jedenfalls für den betrachteten Fall das Distributivgesetz für das Skalarprodukt gilt und auch verwendet werden muss.
In b) ist zu überlegen, wie der gesuchte Schnittwinkel der Ebenen mit dem Schnittwinkel der beiden Normalen zusammenhängt.
c) ist zwar schon mehrfach indirekt aufgetaucht. Da der Abstand zweier Punkte aber als Grundlage für alle anderen Fälle gelten kann, wird dieser an einem Beispiel konkret berechnet.

Aufgabe 17 S. 16

Erstellen Sie eine Übersicht der bisher behandelten Inhalte, die auch noch Ergänzungen zulässt.
Diese Übersicht soll Ihnen einerseits helfen, die folgenden Aufgaben zu bearbeiten, andererseits werden einige der Aufgaben auch zu Ergänzungen oder Korrekturen in Ihrer Übersicht Anlass sein.

Diese Aufgabe kann auch kursbegleitend bearbeitet werden.
Eventuell lässt man die Schülerinnen und Schüler ihre Übersicht in einer Klausur verwenden.
Siehe auch Portfolio-Vorschlag, S. 16.

Aufgabe 18 S. 19

a) Berechnen Sie den sphärischen Abstand zwischen Hamburg und Osnabrück. (Koordinaten in Aufgabe 12)

b) Langstreckenflüge haben zumeist eine Flughöhe von ca. 12 km (über dem Meeresspiegel).
Welche Länge hat in dieser Höhe der kürzeste Weg zwischen (12 km über) Frankfurt und (12 km über) Los Angeles?

c) Wie ändert sich eigentlich der Umfang eines Kreises mit dem Radius 6371 km, wenn dieser um x km vergrößert oder verkleinert wird?
Definieren Sie eine Funktion, welche für jede Änderung des Radius die prozentuale Änderung des Umfangs ausgibt (bezogen auf r = 6371).

a) $H = (3732|658|5121)$, $O = (3858|542|5041)$ *gerundet*.
Der sphärische Winkel ist etwa $\alpha \approx 1{,}8°$. Daraus ergibt sich als sphärischer Abstand etwa 200 km.

b) $F = (4039|616{,}6|4888{,}3)$,
$LA = (-2497{,}7|-4650{,}4|3567{,}2)$ *jeweils gerundet*.
Der sphärische Winkel ist so $\beta \approx 83{,}7°$. Daraus folgt für

die Weglänge in 12 km Höhe etwa 9325 km.
Mit weniger Rundung ergibt sich nur 9320 km.

c) $f(x) = \frac{\text{neuer Umfang} - \text{alter Umfang}}{\text{alter Umfang}} \cdot 100 =$

$f(x) = \frac{2\pi \cdot (6371 + x) - 2\pi \cdot 6371}{2\pi \cdot 6371} \cdot 100 = \frac{2\pi \cdot x}{2\pi \cdot 6371} \cdot 100 =$

$f(x) = \frac{x}{6371} \cdot 100$

Mit Aufgabenteil c) lässt sich auch b) berechnen unter Verwendung des Beispiels.

Aufgabe 19 · Abstände S. 20

a) Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P mit

$g\colon\ X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $P = (1\,|\,1\,|\,2)$.

Gesucht ist der Abstand des Punkte P zur Geraden g.

b) Gegeben ist eine Ebene F und ein Punkt Q mit
F: $3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$ und $Q = (1\,|\,0\,|\,15)$.
Gesucht ist der Abstand des Punktes Q zur Ebene F.

c) Beschreiben Sie, wie Sie den Abstand zweier paralleler Geraden, zweier paralleler Ebenen bzw. einer Geraden von einer Ebene, zu der sie parallel verläuft, berechnen würden *(gemeint ist jeweils parallel und verschieden)*.

d) Gegeben ist eine Kugel K und ein Punkt T mit
K: Mittelpunkt $M = (-1\,|\,2\,|\,1)$, Radius $r = 4$
und $T = (5\,|\,4\,|\,-2)$.
Gesucht ist der Abstand des Punktes T zur Kugeloberfläche. *Die Abbildung zeigt eine Strategie zur Lösung.*

e) Der Fußpunkt des Lots von T auf die Kugel in Aufgabe d) heiße U.
Bestimmen Sie eine Tangente an die Kugel im Punkt U.
Wieso ist die Lösung nicht eindeutig?
Bestimmen Sie eine Ebene, welche die Kugel im Punkt U berührt, also eine Tangentialebene in U.

a) ① Ebenengleichung:
Senkrecht zur Geraden heißt senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden: als linke Seite der Ebenengleichung wählt man $1x_1 + 2x_2 - 1x_3$. Da P auf der Ebene liegen soll, muss die rechte Seite $1 + 2 - 2 = 1$ sein. Daher ist
$E : x_1 + 2x_2 - x_3 = 1.$
② Schnittpunkt S (Gerade g mit Ebene E):
$1 + s + 4s - 2 + s = 6s - 1 = 1 \Rightarrow s = ⅓$. Damit ist
$S = ⅓(4\,|\,2\,|\,5)$.
③ Abstand $|PS|$:
$|S - P| = |⅓(4\,|\,2\,|\,5) - (1\,|\,1\,|\,2)| = |⅓(1\,|\,-1\,|\,-1)| \Rightarrow$
$|PS| = ⅓\sqrt{3}$ = Abstand von Punkt P zur Geraden g.

b) ① senkrechte Gerade h zu F durch Q:
Richtungsvektor von h = Normalenvektor von F und
Stützpunkt von h = Q. $\Rightarrow$ $h\colon\ X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
② Schnittpunkt R (Gerade h mit Ebene F):
$3 + 9t + 4t - 15 + t = 14t - 12 = 2 \Rightarrow t = 1$
Daher ist $R = (4\,|\,2\,|\,14)$.
③ Abstand $|QR|$:
$|R - Q| = |(4\,|\,2\,|\,14) - (1\,|\,0\,|\,15)| = |(3\,|\,2\,|\,-1)| \Rightarrow$
$|QR| = \sqrt{14}$ = Abstand von Punkt Q zur Ebene F.

c) Die genannten Fälle können z.B. auf die Teilaufgaben a) und b) zurückgeführt werden:
Parallele Geraden: Irgend einen Punkt auf Gerade 1 wählen, dann wie a).
Parallele Ebenen: analog, dann wie b).
Gerade / Ebene: Irgend einen Punkt auf der Geraden wählen, dann wie b).

d) Strategie: Länge der Strecke TM abzüglich Radius, denn jede Gerade durch den Mittelpunkt einer Kugel steht senkrecht auf der Oberfläche.
Berechnung: $|MT| = |T - M| = |(5\,|\,4\,|\,-2) - (-1\,|\,2\,|\,1)| =$
$= |(6\,|\,2\,|\,-3)| = 7$ und $7 - 4 = 3 \Rightarrow$
Abstand von T zur Kugeloberfläche = 3.

e) Berechnen des Schnittpunktes von MT mit Kugel:
Gerade i: $X = M + \lambda \cdot (T - M)$.
Kugel K : $|X - M| = 4$. Geradengleichung einsetzen:
$|M + \lambda \cdot (T - M) - M| = |\lambda \cdot (6\,|\,2\,|\,-3)| = |\lambda|\ 7 = 4.$
Es kommt nur die positive Lösung in Frage, da nur mit dieser der Abstand zu T 3 bleibt: $U = \frac{1}{7}(17\,|\,22\,|\,-5)$.

Die Tangente in U muss senkrecht auf der Geraden i stehen, also senkrecht zum Richtungsvektor $\mathbf{r} = (6\,|\,2\,|\,-3)$.
Das gilt z.B. für $\mathbf{s}_1 = (1\,|\,0\,|\,2)$, denn $(6\,|\,2\,|\,-3) \cdot (1\,|\,0\,|\,2) = 0$. Es gilt aber auch für $\mathbf{s}_2 = (1\,|\,-3\,|\,0)$ und dieser Vektor ist kein Vielfaches von $\mathbf{s}_1$, zeigt also in eine andere Richtung. Es steht daher auch der Vektor $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ und jede beliebige Linearkombination dieser beiden Vektoren senkrecht auf $\mathbf{r}$, also eine ganze Ebene.
Mögliche Darstellungen: TE: $X = U + \mu\, \mathbf{s}_1 + \nu\, \mathbf{s}_2$
oder TE: $6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 23$, denn $\mathbf{r}$ ist der Normalenvektor zur Ebene TE und U eingesetzt ergibt 23.

Die in den Aufgaben a) und b) genannten Strategien können durch andere ersetzt werden. Vielleicht führt das auch zu verschiedenen Lösungsvorschlägen, die unbedingt besprochen werden sollten.
Die Aufgabenteile a) – c) decken die vorkommenden Abstandsprobleme bezüglich Geraden und Ebenen ab. Der Abstand windschiefer Geraden ist nicht vorgesehen, ließe sich aber ebenfalls auf einen der Fälle zurückführen.
Teil d) behandelt ein einfaches Abstandsproblem bei der Kugel, die Tangentialebene in Teil e) hat die Gerade durch T und M als Lotgerade und passt so auch in den Gesamtkontext der Aufgabe.

Aufgabe 20 · Erdkugel S. 21

a) Auf einem Schiff wird mit GPS die Position bestimmt. Der Empfänger erhält von drei Satelliten Daten, nämlich jeweils deren Mittelpunkt Sat_i und den zum Empfänger gemessenen Abstand d_i ($i = 1, 2, 3$):
$Sat_1 = (7.625\,|\,-18.872\,|\,17.080)$ $d_1 = 22.171$
$Sat_2 = (13.677\,|\,-5.806\,|\,22.028)$ $d_2 = 20.536$
$Sat_3 = (15.023\,|\,16.111\,|\,14.858)$ $d_3 = 22.726$
Angaben in km.
Berechnen Sie aus diesen Angaben die Position.

b) Zur Modellierung von Flugbahnen verwendet man häufig Ebenen bzw. Geraden.
Vergleichen Sie diese Modellierung mit jener durch einen

Großkreis ☞

☞ • bei einem Langstreckenflug von Frankfurt nach Los Angeles (Flughöhe 12 km)
• bei einem Flug von Hamburg nach München (Flughöhe 10 km).

Der Start- und Landevorgang wird vereinfachend nicht betrachtet, die Flüge beginnen bzw. enden im Modell in Flughöhe über dem jeweiligen Ort.

a) *Es handelt sich zwar um realistische Daten, die aber gerundet sind. Daher kann DERIVE keine Lösung auf direktem Weg berechnen.*
Gesucht sind die Koordinaten eines Punktes X auf der Erdoberfläche, X muss also der Gleichung I genügen:

$$\text{I} \quad E: \quad X^2 = 6371^2.$$

Weiter liegt X auf einer Kugel, deren Mittelpunkt der Satellit S_1 bildet. Der Radius dieser Kugel ist der mit GPS gemessene Abstand d_1:

$$\text{II} \quad S_1: \quad (X - S_1)^2 = d_1^2.$$

Analoges gilt für die beiden weiteren Satelliten S_2 und S_3:

$$\text{III} \quad S_2: \quad (X - S_2)^2 = d_2^2,$$

$$\text{IV} \quad S_3: \quad (X - S_3)^2 = d_3^2.$$

Die vier Gleichungen I, II, III und IV müssen also gleichzeitig erfüllt werden. Diese Forderung führt nach Vereinfachungen zu einem linearen Gleichungssystem in den drei gesuchten Variablen x_1, x_2 und x_3, die den gesuchten Ort auf der Erdoberfläche beschreiben.

$$\begin{array}{lllllllll} \text{I} & X^2 & & & & & = & r^2 & \\ \text{II} & X^2 & - & 2\cdot XS_1 & + & S_1^2 & = & d_1^2 & \\ \text{III} & X^2 & - & 2\cdot XS_2 & + & S_2^2 & = & d_2^2 & \xrightarrow[\text{IV}-\text{I}]{\text{II}-\text{I},\ \text{III}-\text{I}} \\ \text{IV} & X^2 & - & 2\cdot XS_3 & + & S_3^2 & = & d_3^2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \text{I}' & -2\cdot XS_1 & + & S_1^2 & = & d_1^2 - r^2 \\ \text{II}' & -2\cdot XS_2 & + & S_2^2 & = & d_2^2 - r^2 \\ \text{III}' & -2\cdot XS_3 & + & S_3^2 & = & d_3^2 - r^2 \end{array}$$

Nach dem Einsetzen der entsprechenden für die drei Satelliten folgt

$$\text{I} \quad -2\cdot\begin{pmatrix}7625\\-18872\\17080\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7625\\-18872\\17080\end{pmatrix}^2 = 22171^2 - 6371^2$$

$$\text{II} \quad -2\cdot\begin{pmatrix}13677\\-5806\\22028\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}13677\\-5806\\22028\end{pmatrix}^2 = 20536^2 - 6371^2$$

$$\text{III} \quad -2\cdot\begin{pmatrix}15023\\16111\\14858\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}15023\\16111\\14858\end{pmatrix}^2 = 22726^2 - 6371^2$$

Das bedeutet:

$$\text{I} \quad -15.250x_1 + 37.744x_2 - 34.160x_3 = -255.055.809$$

$$\text{II} \quad -27.354x_1 + 11.612x_2 - 44.056x_3 = -324.865.094$$

$$\text{III} \quad -30.046x_1 - 32.222x_2 - 29.716x_3 = -230.133.579$$

und ergibt gerundet (4687 | −1082 | 4179). Um diesen Ort auf dem Globus wieder zu finden, transformieren wir ihn in geographische Koordinaten und erhalten einen Ort mit ungefähr 13° westlicher Länge und 41° nördlicher Breite. Das ist westlich der iberischen Halbinsel im Atlantik (siehe Abbildung bei der Aufgabe).

b) *Berechnungen in der Derive-Datei „G5-20b.dfw".*
Die Gerade von F nach LA mit den kartesischen Koordinaten F_k bzw. L_k: X = F_k + λ · (L_k − F_k) wird auf Schnittpunkte mit der Erdkugel überprüft. Man erhält, dass schon nach 18 km die Gerade die Erdkugel schneidet (und 18 km vor LA wieder aus der Erde herauskommt). Die Entfernung auf der Geraden wäre etwa 8520 km, trotz fast 800 km „Gewinn" immer noch viel größer als der Kugelradius. So kann man z.B. über das regelmäßige 5-Eck auch elementargeometrisch schließen, dass das Modell der Geraden hier völlig unangemessen ist.
Der sphärische Abstand von Hamburg nach München beträgt (auf einer Bahn mit dem Radius 6381 km) etwa 592,7 km, es handelt sich hier also um einen vergleichsweise kleinen Teil des Bogens. Die analog aufgestellte Gerade schneidet hier die Erdkugel nicht, die niedrigste Flughöhe wäre etwa 3 km über n.N. Die Entfernung längs der Geraden wäre fast 592,5 km, also nur 200 m weniger.
Das Modell „Gerade" ist bei dieser kurzen Strecke offenbar möglich.

Diese Aufgabe ist nur sinnvoll, wenn ein CAS zur Verfügung steht. Die Lösungsansätze können aber natürlich behandelt werden, sie sollten ohnehin vor dem Rechnen überlegt sein. Den Hinweis zu a) sollte man an die Lernenden weiter geben. Schwächeren Schülerinnen und Schülern kann man bei Teilaufgabe b) die Derive-Datei weitergeben zum Nachvollziehen der Rechnungen (mit Verbesserungsvorschlägen). Elementargeometrische Lösungsvorschläge können über eine 2D-Skizze angeregt werden.

Aufgabe 21 · lineares Kombinieren S. 21

a) In einem linearen Gleichungssystem mit drei Variablen kann man jede der Gleichungen als Ebene deuten. Beschreiben Sie für ein System mit drei Gleichungen (und drei Variablen) innerhalb dieser Deutung die möglichen Lösungen in Abhängigkeit von der Beziehung der Ebenen untereinander.

b) Ein lineares Gleichungssystem wird oft so dargestellt:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \text{II} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \text{III} & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array} \text{ oder } \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right),$$

selten jedoch $x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3 = B$ oder

$$x_1\cdot\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}+x_2\cdot\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}+x_3\cdot\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

als Linearkombination hier von drei Vektoren. ☞

☞ Die Lösungsmenge ist dann die Menge aller $(x_1 | x_2 | x_3)$, sodass die Linearkombination der Vektoren A_1, A_2, A_3 den Vektor B ergibt.
Betrachten Sie den Fall, dass die Vektoren A_1 und A_2 linear abhängig sind.

- Untersuchen Sie, welche Auswirkungen dies auf die Lösungsmenge hat.
- Vergleichen Sie Ihre Überlegungen mit jenen zu a).

a) System eindeutig lösbar (Punkt):
die drei Ebenen schneiden sich in genau einem Punkt (zwei der Ebenen schneiden sich in einer Geraden, welche die dritte Ebene in einem Punkt schneidet).
Lösung weist einen Parameter auf (Gerade):
je zwei Ebenen schneiden sich in derselben Geraden bzw. eine Ebene ist doppelt im System. Das System lässt sich also mit nur zwei Ebenengleichungen ausdrücken.
Lösung weist zwei Parameter auf (Ebene):
alle drei Ebenen sind identisch *(was man nicht unbedingt auf den ersten Blick sieht)*.
System unlösbar:
zwei parallele aber verschiedene Ebenen sind im System bzw. die Schnittgerade zweier Ebenen hat keine gemeinsamen Punkte mit der dritten Ebene.

b) A_1 und A_2 linear abhängig $\Rightarrow$
Es gibt eine Zahl d mit $A_1 = d \cdot A_2$.
Ist die Lösungsmenge nicht leer, so ist die Lösung nicht eindeutig. Denn ist (a, b, c) ein Element der Lösungsmenge, so auch (0, a·d+b, c): (a, b, c) löst das System, heißt $a\,A_1 + b\,A_2 + c\,A_3 = B$. Ersetzt man A_1 durch $d\,A_2$, folgt $a \cdot d\,A_2 + b\,A_2 + c\,A_3 = 0\,A_1 + (ad+b)\,A_2 + c\,A_3 = B$.
Ohne zusätzliche Informationen sind also die Fälle 2,3 und 4 aus Teil a) möglich.

Die geometrischen Deutungen der verschiedenen Formen der Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme sind unterschiedlich formulierbar. Die angegebenen Deutungen sind also Beispiele. Man könnte diese Aufgabe immer ansprechen, wenn gerade eine entsprechende Beziehung untersucht wird. Aufgabenteil b) ist eher theoretischer Natur. Er kann z.B. auch auf die Interpretation der Form der Dreieckmatrix ausgeweitet werden. Dieser Teil der Aufgabe ist eher zur Binnendifferenzierung geeignet, weniger für den ganzen Kurs.

Aufgabe 22 · Winkel S. 22

a) Gegeben sind die Ebene E: $x_1 + x_2 + 3x_3 = 6$ und zwei Punkte A und B, mit $A = (3|10|5)$ und $B(2|0|5)$.
Gesucht ist ein Punkt R auf der Ebene E, sodass ein Lichtstrahl von A nach R, der an der Ebene E reflektiert wird, durch B geht.
Ermitteln Sie dann den Einfalls- und Ausfallswinkel für den Lichtstrahl.

b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Ebene E (s.o.) und der Geraden g: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Die GPS-Satelliten sind gruppenweise auf sechs verschiedene Bahnebenen verteilt, die jeweils eine Neigung von 55° zur Äquatorebene haben und um 60° längenversetzt sind. ☞

☞
- Beschreiben Sie die mögliche Lage dieser sechs Ebenen mit einem Schaubild und/oder mit Text.
- Links sind zwei dieser Ebenen zusammen mit der Äquatorebene (blau bzw. dunkel) abgebildet.
  Entwickeln Sie für eine der beiden Ebenen eine zugehörige Gleichung (Parameter- oder Koordinatenform) und führen Sie diese in die andere Art der Darstellung über.
  Geben Sie auch eine Gleichung der zweiten Ebene an

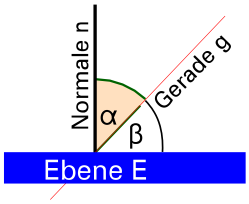
d) *In G2 haben Sie das Skalarprodukt als algebraische Kurzschreibweise kennen gelernt. In dieser Aufgabe geht es um eine geometrische Interpretation.*
Die Vektoren **a** und **b** schließen den spitzen Winkel α ein. Den Vektor $\mathbf{b}_a$ (ein Vielfaches des Vektors **a**) bezeichnet man als senkrechte Projektion von **b** auf die durch **a** festgelegte Gerade (siehe Abbildung).

- Zeigen Sie, dass $|\mathbf{b}_a| = |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha$ gilt.
- $\mathbf{a}_0$ sei der Einheitsvektor zu **a**, also $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ und daher $|\mathbf{a}_0| = 1$.
  Zeigen Sie, dass dann folgt: $\mathbf{b}_a = |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha \cdot \mathbf{a}_0$.
- Zeigen Sie, dass $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_a$.
- Überlegen Sie, was sich bei den vorstehenden Teilaufgaben ändert und was gültig bleibt, wenn für α gilt $\alpha = 90°$ oder $90° < \alpha \le 180°$.

a) Rechenschritte nach der angegebenen Strategie. Man überprüft leicht, dass A und B nicht auf E liegen.
① Lot von A auf E: Normalenvektor von E = Richtungsvektor; zusammen mit Stützpunkt A folgt Gleichung der Lotgeraden g: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
② Schnittpunkt g mit E: g einsetzen in E hat zur Folge $3+s + 10+s + 15+9s = 11s + 28 = 6 \Rightarrow s = -2$.
$\Rightarrow$ Schnittpunkt $L = (1|8|-1)$
③ A' ist A gespiegelt an L: errechnet mit $s = -4$ (doppelter Abstand von A) $A' = (-1|6|-7)$. Probe:
$|L-A| = |(-2|-2|6)| = |A'-L| = |(-2|-2|-6)|$.
④ Verbindungsgerade BA' ist z.B. $B + t \cdot (A'-B)$, also
v: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$.
⑤ Schnittpunkt R mit Ebene: v einsetzen in E ergibt $2-3t + 6t + 15-36t = 17 - 33t = 6 \Rightarrow t = ⅓$. Daraus folgt für $R = (1|2|1)$.
Winkelmessung zur Normalen mit R−A
(einfallender Strahl): $\cos\alpha = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{22}{\sqrt{11 \cdot 84}}$,
also $\alpha \approx 43{,}6°$. Das ergibt auch die Probe mit dem reflektierten Strahl.
Der Winkel zwischen Strahl und Ebene ist $\alpha' \approx 46{,}4°$.

b) Normalenvektor der Ebene E und Richtungsvektor der Geraden g werden verwendet:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}\right|} = \frac{11}{\sqrt{11\cdot 21}} \approx 0{,}72375 \Rightarrow \alpha \approx 43{,}6°.$$

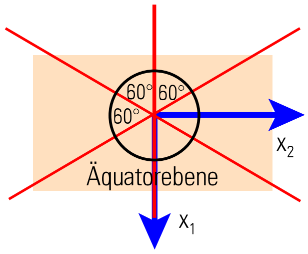


Das ist der in der Skizze eingetragene Winkel, der zwischen Normalenvektor und Gerade liegt, nicht jedoch zwischen der Ebene und der Geraden: letzteres ist der Winkel $\beta = 90° - \alpha \approx 46{,}4°$.

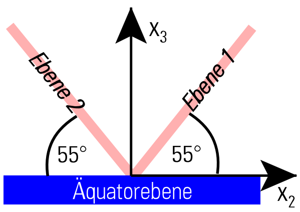
Bei einer wie oben durchgeführten Berechnung des Winkels zwischen Gerade und Ebene ist der gesuchte Winkel die Ergänzung des berechneten Winkels auf 90°.

Daher steht in einigen Formelsammlungen auf der linken Seite der Formel: cos (90° − β) oder auch sin β.

c) Die Bahnebenen könnten so aussehen (Sicht senkrecht auf Äquatorebene). Dabei teilen sich die Schnittgeraden der Bahnebenen mit der Äquatorebene jeweils 2 Bahnebenen, die 55° gegen die Äquatorebene geneigt sind und daher einen Winkel von 70° einschließen.



Die beiden in der Aufgabe abgebildeten Bahnebenen schneiden die Äquatorebene längs der x_1-Achse. Die Neigung der Ebenen kann z.B. gegen die x_2-Achse bestimmt werden durch den Ansatz für die erste Ebene



E_1: $X = s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix}$ mit a so aus IR, dass der Winkel zwischen dem Richtungsvektor und der x_2-Achse etwa 55° ergibt:

$$\cos 55° = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow a \approx 0{,}7.$$ Daher lautet

die Gleichung der Ebene E_1: $X = s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0{,}7\\1\end{pmatrix}$

oder in Koordinatenform $x_2 - 0{,}7\,x_3 = 0$.

Analog ergibt sich Ebene E_2: $X = s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\-0{,}7\\1\end{pmatrix}$

und in Koordinatenform $x_2 + 0{,}7\,x_3 = 0$.

d) • Der erste Spiegelpunkt folgt direkt aus der Definition des Kosinus im rechtwinkligen Dreieck als „Ankathete durch Hypotenuse".

• Die Länge von b_a wurde eben bestimmt, nun geht es um den Vektor selbst. Und der zeigt in dieselbe Richtung wie **a**. Damit die Länge des Vektors nicht beeinflusst wird, bestimmt die Richtung ein Einheitsvektor.

• $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\alpha = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}_a| = |\mathbf{a}|\cdot|c\cdot\mathbf{a}|$, denn es gibt eine Zahl $c > 0$ mit $\mathbf{b}_a = c\cdot\mathbf{a}$. Und weiter ist $|\mathbf{a}|\cdot|c\cdot\mathbf{a}| = c\cdot|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{a}| = c\cdot|\mathbf{a}|^2 = c\cdot|\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}|$, was analog $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_a|$ ergibt.

Da für die betrachteten Winkel diese beiden Vektoren gleiche Orientierung haben, ist $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_a| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_a$.

Nachweis der Zwischenschritte:

$$|c\cdot\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix}ca_1\\ca_2\\ca_3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{c^2a_1^2 + c^2a_2^2 + c^2a_3^2} =$$

$$\sqrt{c^2\cdot(a_1^2+a_2^2+a_3^2)} = c\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = c\cdot\left|\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right| = c\cdot|\vec{a}|.$$

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = a_1^2+a_2^2+a_3^2$$ und

$$|\vec{a}\cdot\vec{a}| = |a_1^2+a_2^2+a_3^2| = a_1^2+a_2^2+a_3^2.$$

• $\alpha = 90° \Rightarrow \mathbf{b}_a =$ Nullvektor $= \mathbf{0}$, der auch die Länge 0 hat. Alle der Spiegelpunkte erfüllt, denn $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

$90° < \alpha \le 180° \Rightarrow \mathbf{a}$ und $\mathbf{b}_a$ haben entgegengesetzte Orientierung und $\cos\alpha < 0$. Daher muss in der ersten Formel $|\cos\alpha|$ eingesetzt werden, die zweite Formel bleibt richtig, ebenso die dritte, denn beide Skalarprodukte sind negativ.

Die Teilaufgabe a) sollte wegen der angegebenen Strategie jedenfalls in Gruppenarbeit lösbar sein. Vielleicht fällt dort auch einzelnen Lernenden auf (oder ein), dass die Konstruktion zum kürzesten Streckenzug von A über einen Punkt der Ebene nach B führt.

In Teilaufgabe b) wird der Winkel zwischen einer Ebene und einer Geraden berechnet. Möglicherweise ist die Überlegung zur Winkelberechnung schon in Teil a) aufgetaucht.

Die ersten beiden Punkte von Teilaufgabe d), die ja eng miteinander zusammenhängen, eignen sich z.B. auch für ein Unterrichtsgespräch, aber auch die Deutung (ohne Beweis) des dritten Punktes – neben der senkrechten Projektion auch als Flächenmaß – und der vierte Punkt. Der Nachweis des dritten Punktes kann entfallen oder zur Binnendifferenzierung verwendet werden.

Aufgabe 23 · Flugbahn S. 23

Es geht es noch einmal um die Flugroute von Frankfurt nach Los Angeles (siehe 18b), S. 19), wobei Sie ein einfaches Modell für den Start der Maschine in Frankfurt bearbeiten.

- Bestimmen Sie die Ebene des Großkreises (Radius = 6383 km), auf dem im Wesentlichen der Flug verläuft.

In dieser Ebene soll auch die Startgerade verlaufen. Dabei hebt das Flugzeug mit einem Winkel von ca. 11,5° von der Startbahn ab und bewegt sich näherungsweise auf dieser Geraden, bis die Flughöhe erreicht ist (sehr starke Vereinfachung der Realität in diesem Modell).

- Ermitteln Sie diese Startgerade. Bestimmen Sie, wie viele Kilometer das Flugzeug auf dieser Gerade zurücklegt, bis es die Flughöhe erreicht.

Da graphische Darstellungen hier sehr sinnvoll sind, die kartesischen Koordinaten aber große Zahlenwerte aufweisen, kann man in der Rechnung z.B. den Radius des Großkreises der Flugroute (6383 km) auf 1 Längeneinheit setzen.

Ebene des Großkreises:

Sind F und L die Punkte auf dem Großkreis für Frankfurt bzw. Los Angeles und **f** und **l** die zugehörigen Vektoren, so kann diese Ebene beschrieben werden durch

$$E: X = s \cdot \mathbf{f} + t \cdot \mathbf{l}$$

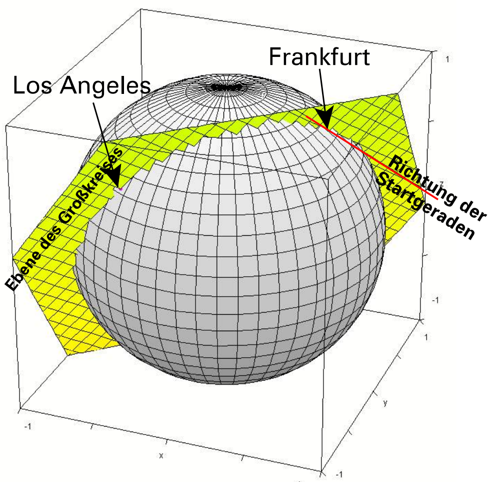
(und die beiden Richtungsvektoren haben die Länge 1).

Nach der Aufgabenstellung liegt die Startgerade auch in dieser Ebene. Der angegebene Winkel bezieht sich auf die Startbahn, deren Verlauf man als Tangente modellieren kann, als Tangente im Punkt F_1 = Frankfurt auf der Erdoberfläche. Dieser Punkt liegt ebenfalls auf der Ebene E, aber unterhalb des Großkreises. Mit der Tangente muss die gesuchte Startgerade einen Winkel von 11,5° einschließen und natürlich derart, dass die Gerade in Richtung von Los Angeles ansteigt. Ist **b** der Richtungsvektor der Geraden, so kann sie beschrieben werden durch

$$g: X = F_1 + v \cdot \mathbf{b}.$$

Um die Entfernung, die das Flugzeug bis zum Erreichen des Großkreises auf der Startgerade zurücklegt, zu ermitteln, berechnet man v, sodass $|X| = 1$ ist, also die Startgerade den Großkreis erreicht hat. Der Abstand dieses Punktes zu F_1 multipliziert mit 6383 km liefert das Ergebnis (ca. 60 km).

Veranschaulichung mit DERIVE,
Beschriftung nachträglich hinzugefügt



Hinweise zu DERIVE:

Die Kugel kann man erhalten durch die Eingabe

SPHERE(6371/6383,s,t)

und den Befehl zur 3D-Zeichnung. Sie sieht dann aber noch nicht so schön rund aus. Dazu mit der rechten Maustaste auf die Kugel klicken und „Bearbeiten“ wählen. In die Maske zu „Graphen-Parameter“ eintragen in Zeile s:

Minimum −pi *Maximum* pi *Anzahl der Felder* 50

in Zeile t:

Minimum 0 *Maximum* pi *Anzahl der Felder* 25.

Wählt man den Reiter „Graphen-Farbe“, kann auch noch die Farbgestaltung gewählt werden.

Die Aufgabe enthält einerseits viele der Inhalte dieses Themenbereiches, andererseits ist sie sehr rechenintensiv, auch wenn 18 b) verwendet werden kann. Das Ermitteln einer Lösungsstrategie ist aber möglich und führt zu interessanten Diskussionen, falls die Schülerinnen und Schüler verschiedene Strategien vorschlagen.

Hinweis: Die Datei „G5-23_2.dfw“ enthält eine Beispielrechnung mit einfacheren Zahlenwerten, die jedoch nicht mehr den realen entsprechen. Gibt man für die beiden gesuchten Richtungsvektoren die Parameter vor (Tangente: s = −0,17 und t = 1; Startgerade: s = −0,02 und t = 1), so sind die Rechenschritte mit einem Taschenrechner durchführbar.

Aufgabe 24 · GPS-Zeitfehler S. 23

GPS Empfänger mit Atomuhr wären zu teuer und zu schwer, statt dessen werden normale Quarzuhren verwendet. Das hat zur Folge, dass die Zeit zwischen Satellit und Empfänger nicht synchron ist. Es ergibt sich ein „Zeitoffset“ *dt*.

Dieser Uhren-Offset *dt* des Empfängers ist gegenüber den Satellitenuhren für alle Satelliten gleich. Alle Entfernungsmessungen sind um den gleichen Anteil $c \cdot dt$ zu kurz oder zu lang *(c = Lichtgeschwindigkeit)*.

Da die Messungen nicht die wirklichen Entfernungen r_i liefern, werden sie auch ,,Pseudo-Entfernungen“ ρ_i (pseudo-range) genannt. Anstelle von $r_i = |S_i - P|$ messen wir

$$\rho_i = |S_i - P| + c \cdot dt = r_i + c \cdot dt.$$

Das bedeutet z.B. für die Ebene, dass die Kreise jetzt geänderte Radien haben, nämlich ρ_i statt r_i, und sich daher nicht mehr in einem Punkt schneiden (siehe Abbildung. Hier sind alle Kreise größer geworden.). Das liegt an der 4. Unbekannten *dt*.

Eine Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, wären die Daten eines weiteren Satelliten: eine weitere Gleichung.

Moderne GPS-Empfänger synchronisieren ihre interne Uhr durch Beispielrechnungen: sie ändern ihre Uhrzeit so lange ab, bis sich die Kreise in einem Punkt schneiden.

Mit beiden Methoden ist die Empfänger-Uhr synchron zu den Atomuhren, jedenfalls für kurze Zeit.

- Entwickeln Sie ein konkretes Beispiel in der Ebene (analog der Abbildung) und führen Sie damit beide Methoden zur Zeitsynchronisierung durch.

Methode 2:

Die ursprünglichen Gleichungen der drei Kreise im Applet 3 lauten zu S1: $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 5^2$, zu S2: $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 3^2$ und zu S3: $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4{,}044^2$. Die mit Zeitfehler f gemessenen Radien lauten 5,2 (S1), 3,2 (S2) und 4,244 (S3). Das führt auf folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & (x-5)^2+(y-4)^2 & = & (5{,}2+f)^2 \\ \text{II} & (x+2)^2+(y-5)^2 & = & (3{,}2+f)^2 \\ \text{III} & (x+1)^2+(y+1)^2 & = & (4{,}244+f)^2 \end{array}$$

Nun wird f so lange abgeändert, bis das System eindeutig lösbar ist (mit f = −0,2).

Methode 1: Siehe Datei „G5-24.dfw“

Zum Verstehen von Methode 2 reicht möglicherweise Applet 3, zu Methode 1 das Aufstellen eines passenden Gleichungssystems. Der Versuch, die eindeutige Lösung in DERIVE zu berechnen, schlägt fehl wegen Rundungsfehlern.

III. Informationen

1. Dateien zu den Aufgaben

Aufgabe	Datei(en)
5	G5-05b.dfw
7	G5-07.dfw
10	G5-05b.dfw
12	G5-12.dfw *und G5-05b.dfw für 12 c)*
18	G5-18.dfw
19	G5-19e.dfw
20	G5-20a.dfw ; G5-20b.dfw
22	G5-22a.dfw ; G5-22b.dfw
23	G5-23_1.dfw ; G5-23_2.dfw
24	G5-24.dfw ; *Applet 3*

2. Literaturangaben

Zur Schreibweise

[1] GÜNTHER MALLE · Neue Wege in der Vektorgeometrie · in: „mathematik lehren“ 133 (Dezember 2005), S. 8ff · Friedrich Verlag, Velber

Ideen zu Aufgaben, Beispielen und verbindenden Texten lieferten:

[2] http://www.toralf-schumann.de/html/gps_main.html
Ein gut verständliches Skript zum Aufbau und der Funktion von GPS, das vor einigen Jahren auf den Seiten der TU-Ilmenau veröffentlicht wurde.

[3] HEINRICH ABEL · GPS, Funktionsweise und mathematische Grundlangen in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2001 · Franzbecker, Hildesheim

[4] DANIEL HAUBROCK · GPS in der analytischen Geometrie
in: Materialien für einen realitätsbezogenen Unterricht, Band 6 · Franzbecker, 2000 Hildesheim

[5] R. RASCHER-FRIESENHAUSEN · Orientierung mit Mathematik – Was hat GPS mit linearer Algebra zu tun?
Lehrerakademie Bremen 2003 · Material-CD

[6] Mathematik · Studienbriefe zur Fachdidaktik für Lehrer der Sekundarstufe II, Geometrie und lineare Algebra MG3, Analytische Geometrie · DIFF (Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen, Projektgruppe Mathematik S II, Freiburg) 1984 *(vergriffen)*

Link-Liste

[7] http://www.gps-nav.de/index-Links.html
Eine Liste mit Links verschiedener Art rund um GPS

Clipart-Bilder

Die Clipart-Bilder stammen aus Corel WordPerfect Office.

IV. Portfolio

„Ein Portfolio ist eine zielgerichtete Sammlung von Schülerarbeiten, welche die Anstrengung des Lernenden, den Lernfortschritt und die Leistungsresultate auf einem oder mehreren Gebieten zeigt. Die Sammlung schließt die Beteiligung des Schülers bei der Auswahl der Inhalte, Kriterien für die Auswahl und zur Beurteilung sowie selbstreflexive Gedanken ein.“ (siehe [8], S. 304)
Die Inhalte eines Portfolios haben nicht notwendig Textform, sondern es könnte auch ein Video oder eine Kassette z.B. von einem Interview sein, aber auch ein Programm zur Lösung einer Aufgabe.
Das Portfolio enthält Entwürfe, um die Entwicklung zum endgültigen Inhalt zu dokumentieren. Es wird (im Idealfall) in der Zeit des Entstehens mehrmals der Lehrperson vorgelegt, damit diese beraten kann. Eine Zwischenbeurteilung findet nicht statt.
Nach [8], S. 308, sind die Aufgaben der Beurteilung durch Portfolios

- das Lernen diagnostizieren, um die Stärken und Schwächen des Lernenden zu beschreiben
- den Lernenden beurteilen
- die besten Arbeiten des Lernenden zeigen
- eine Entwicklung dokumentieren
- den Lernenden vorstellen.

Siehe dazu auch den Rahmenplan Mathematik gyO, letzte Seite.

<u>Zitierte Quelle</u>

[8] Urban Lissmann · Beurteilung und Beurteilungsprobleme bei Portfolios, in: Reinhold Jäger · Von der Beobachtung zur Notengebung, Ein Lehrbuch
Verlag Empirische Pädagogik, Landau 2001

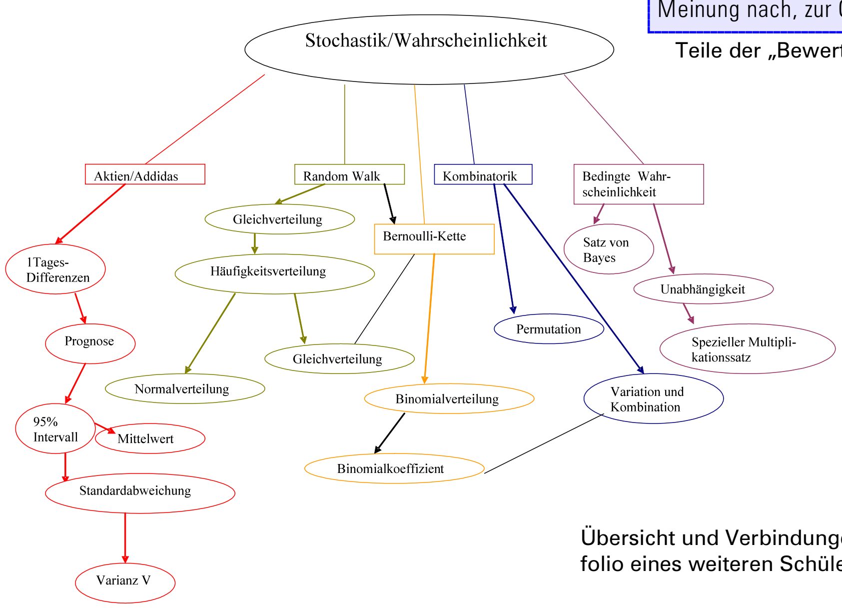
Beispiele aus Portfolios zum Thema Stochastik

Während dieses (kurzen) Semesters haben wir sehr viel mit dem PC gearbeitet, v.a. als es um die Aktienkurs-Prognosen ging.
Diese Art von Mathematikunterricht fand ich sehr interessant, obwohl ich meine Probleme mit dem PC hatte.
Da Stochastik in der „Realität“ anzuwenden ist, ist es ein wichtiges Thema.
Die Informationen im Mathematikunterricht reichten über seinen Fachbereich hinaus (in gewissem Sinne).
Die „Börse“ näher zu betrachten war neu und informativ für mich. Auch der Umgang mit Statistiken, Problemstellungen, Hintergründen und deren Verwertungen war lehrreich.
Die verschiedenartigen „realen“ Aufgaben haben mich angesprochen, da sie nicht nur theoretische Sachverhalte ansprechen.

Teile der „Anmerkungen“ aus dem Portfolio einer Schülerin

Im Grunde genommen finde ich, dass mir ein recht akzeptables Portfolio gelungen ist. Ich habe mich bemüht es klar zu strukturieren und somit dem Leser einen einfacheren Über- und Durchblick zu ermöglichen.
Auch ist der Informationsgehalt meines Erachtens im guten Bereich anzusiedeln. Alle Themenbereiche, die wir im 4.Semester abgehandelt haben, sind hier in komprimierter Form zusammengefasst und aufgedröselt. Ebenso ist mir die Grafik einigermaßen gut und übersichtlich gelungen. [...]
Die Tatsache, dass ich keinerlei wirkliche Wochenprotokolle in das Portfolio integriert habe, könnte ein Minuspunkt sein. Jedoch möchte ich dies kurz erklären. Im Grunde genommen habe ich die erwartete Leistung erbracht, jedoch mit dem kleinen Unterschied, dass ich keine Daten genannt habe, wann welches Thema durchgenommen wurde. Im Endeffekt jedoch habe ich in etwa das getan, was von mir verlangt wurde, [...], es kommt doch eher darauf an, zu zeigen, dass man denn Stoff verstanden hat, und das habe ich, meiner Meinung nach, zur Genüge getan. [...]

Teile der „Bewertung“ aus dem Portfolio eines Schülers



Übersicht und Verbindungen zwischen den Inhalten aus dem Portfolio eines weiteren Schülers *(stark verkleinert)*

Portfolio

Beispiel · Beispiel · Beispiel · Beispiel

Erstellen Sie bis zum .... ein Portfolio mit folgenden Inhalten:

1. Nach jeder Woche eine Zusammenfassung der behandelten Themen

Notieren Sie dabei auch Ihren persönlichen Eindruck: was fanden Sie interessant, informativ, ... und was nicht (und warum).

Aus Ihren Notizen sollte sich zum Schluss eine Themenbereichsübersicht ergeben:

2. Übersicht zum Themenbereich G5 – Analytische Geometrie

Geben Sie eine Übersicht der behandelten Inhalte und wie sie nach Ihrer Meinung mit einander und mit früheren Themen zusammenhängen. Verwenden Sie zur Darstellung auch graphische Elemente (siehe „Rückschau“ · G5-Lernheft, S. 24).

Erläutern Sie Inhalte und Zusammenhänge an Aufgaben-Beispielen oder mit eher theoretischen Überlegungen.

Sie können sich dabei auf den Unterricht und das dort verwendete Material beziehen, dürfen aber auch gerne andere Quellen heranziehen (bitte Quellen immer angeben).

Form

Schriftform (auch handschriftlich), HTML, Präsentation, ...

Lassen Sie Entwürfe in Ihrer Mappe!

Bewertung

Ich schaue mir Ihre Arbeit mehrmals zwischendurch an, um einen Überblick zu erhalten und gegebenenfalls beraten zu können.

Der Stand Ihrer Arbeit zu diesem Zeitpunkt wird nicht benotet.

Bewerten Sie selbst Ihre Leistungen und begründen Sie, wie Sie zu Ihrer Einschätzung gelangt sind.

„Portfolios ersetzen bzw. ergänzen mündliche – ggf. auch schriftliche – Lernerfolgskontrollen.“

(RP Mathematik gyO)