G4

Änderungsraten *und* Bestände

Lernheft

G4

Änderungs- raten und Bestände

Kompetenzen

Sie sollen

(1) die Ableitungsregeln und deren präformale Begründungen und die einfachen Integrationsregeln (Summen-, Faktorregel) kennen

(2) Ihr Wissen um die Bedeutung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung vertiefen

(3) die Differential- und Integralrechnung in einfachen mathematischen und realitätsnahen Problemstellungen sachgerecht einsetzen, die Auswahl der Funktionsklassen im Aufgabenkontext begründen und den Einsatz der Differential- und Integralrechnung im Modellierungsprozess deuten *(bezogen auf die Funktionsklassen: Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten, Exponential- und Logarithmusfunktionen, Sinus, Cosinus und deren einfache Verknüpfungen und Verkettungen).*

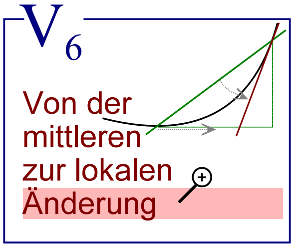
Autoren: Winfried Euba
Jens Weitendorf

Version 1.1 vom 22. September 2006

Inhalt

Die in V6 und G1 erworbenen Kenntnisse zum Ableitungs- und Integralbegriff werden in diesem Themenbereich erweitert und vertieft.
So erarbeiten Sie weitere Ableitungsregeln sowie Ableitungen und Stammfunktionen von diversen Funktionsklassen. Es wird auch um die Frage gehen, unter welchen Bedingungen eine Funktion differenzierbar und integrierbar ist, wann also die Ableitung bzw. das Integral ermittelt werden kann.

Rückblick



ABLEITUNG ←→ INTEGRAL

Sie haben in der Vorstufe (V6) den Ableitungsbegriff kennen gelernt mit den Deutungen *lokale Änderungsrate* und *Steigung der Tangente* und haben für ganzrationale Funktionen die zugehörigen Ableitungsfunktionen ermittelt und die dazu nötigen Regeln.

Ableitungsregeln: ✎

Zu Beginn der Studienstufe (G1) haben Sie den Integralbegriff kennen gelernt mit den Deutungen *Umkehrung der Differentialrechnung* bzw. *Rekonstruktion des Bestandes*. Für ganzrationale Funktionen haben Sie das Integral ermittelt und auch die dazu nötigen Regeln.

Integrationsregeln: ✎

Und Sie haben den Ableitungsbegriff in verschiedenen Sachkontexten zur Lösung bestimmter Probleme eingesetzt.
Wählen Sie eines oder zwei davon aus und notieren Sie stichwortartig im Kasten, welche Probleme Sie gelöst haben und wie Sie dabei vorgegangen sind.

Was? ✎

Wie? ✎

Sie haben auch den Integralbegriff in verschiedenen Sachkontexten, aber auch innermathematisch benutzt. Schauen Sie in Ihre Unterlagen!
Versuchen Sie, die Ihnen aufgefallenen Aspekte des Integrals im nachfolgenden Kasten stichwortartig zu charakterisieren:

✎

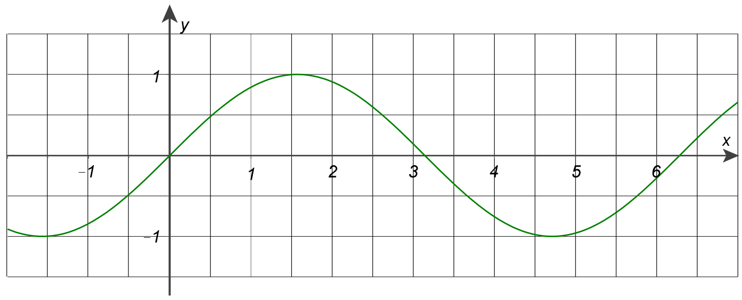
Aufgabe 1

Vergleichen Sie die zum Ableitungs- und Integralbegriff gehörenden Bereiche der Mathematik nach Ihrem bisherigen Kenntnisstand:

- Welche Verbindungen sehen Sie, welches Trennende?
- Überwiegt für Sie das Verbindende oder eher das Trennende? Begründen Sie Ihre Antwort.

I. Trigonometrische Funktionen

und Ableitungsregeln



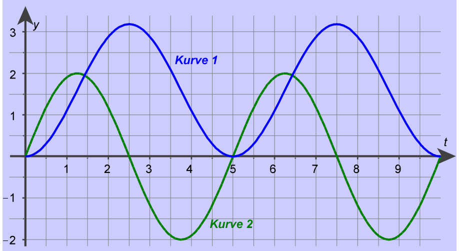
❶ Skizzieren Sie in nebenstehende Abbildung mit dem Graphen der Sinusfunktion möglichst genau den Graphen der Ableitungsfunktion.

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis und leiten Sie daraus die Ableitungsfunktion der Cosinusfunktion her.

❷ Tragen Sie Ihre Ergebnisse von (1) in die Tabelle ein und leiten Sie daraus die Stammfunktionen her

Funktion	Ableitungsfunktion	Stammfunktion
sin x		
cos x		

Aufgabe aus V1: Das Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge und den zeitlichen Verlauf der Änderungsrate des Luftvolumens.



a) Welche der beiden Kurven beschreibt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge? Begründen Sie Ihre Wahl im Sachkontext der Aufgabenstellung.

❸ *Erinnern Sie sich an die Aufgabe mit dem Luftvolumen in der Lunge? In die zugehörige Graphik war auch der zeitliche Verlauf der Änderungsrate des Luftvolumens eingetragen.*

Aus dem Sachkontext haben Sie geschlossen, dass Kurve 1 das Luftvolumen und Kurve 2 die Änderungsrate des Luftvolumens darstellt. Weiter haben Sie in Aufgabenteil b) geschlossen, dass der Term für das Luftvolumen (Kurve 1)

$g(t) = \frac{5}{\pi} \cdot (1 - \cos(0{,}4\pi \cdot t))$ *lautet und für die Änderungsrate*

$g'(t) = f(t) = 2 \cdot \sin(0{,}4\,\pi \cdot t)$.

Wie ergibt sich diese Ableitungsfunktion?

Versuchen Sie aus der obigen Vorgabe und Ihren bisherigen Kenntnissen herzuleiten, wie die Ableitung von cos (0,4 π x) lautet.
(Die Variable heißt jetzt wie zumeist üblich x.)

Die eben betrachtete Funktion besteht aus der Cosinus-Funktion verkettet mit der linearen Funktion h mit h(x) = 0,4 π ·x, also cos(h(x)). Diese Ableitungsregel heißt daher Kettenregel:

Wechsel der Sichtweise:
g(x) als Ganzes (als Variable)
g(x) als Funktion von x

f und g seien differenzierbar, f(g(x)) sei für alle $x \in D_f$ definiert.

Kettenregel: (f(g(x)))′ =

Es fehlt noch die Ableitungsfunktion der Tangensfunktion. Da der Tangens als Quotient aus dem Sinus und dem Cosinus definiert werden kann, ist die Ableitung des Tangens aus den Ableitungen von Sinus und Cosinus herleitbar.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$

Dazu ermitteln wir zuerst die Ableitung von $\frac{1}{\cos x}$, allgemein über den Differenzenquotienten der Funktion $\frac{1}{f}$:

Steigung der Sekante = Differenzenquotient $= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Siehe Applet zum Differenzenquotient.

$$\frac{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}}{h} = \frac{f(x)-f(x+h)}{f(x+h)\cdot f(x)}\cdot\frac{1}{h} = \frac{1}{f(x+h)\cdot f(x)}\cdot\frac{-f(x+h)+f(x)}{h}$$

Geht nun h gegen 0 (Sekante → Tangente), so wird aus dem 1. Faktor im Nenner $f^2(x)$, dem 2 Faktor $-f'(x)$.

Also folgt

$$\boxed{\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{-\textit{Ableitung Nenner}}{\textit{Nenner ins Quadrat}}}$$

Bestimmen Sie mit dieser Formel $\left(\frac{1}{\cos x}\right)'$

Es wird jetzt noch eine Regel für die Ableitung eines Produkts gebraucht, also für $(f(x) \cdot g(x))'$:

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x+h)\cdot g(x)+f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)$$

In der Mitte des Zählers sind zwei Summanden eingefügt:
$-f(x+h)\,g(x) + f(x+h)\,g(x)$
was offenbar Null ist und damit kein Fehler.
Warum dieses Einfügen? Umformen in Vertrautes wird möglich (durch Ausklammern).

Wenn h wieder gegen 0 geht, folgt als Produktregel:

f und g seien differenzierbar für alle $x \in D_{f\cdot g}$.

Produktregel: $(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

(1. Faktor · 2. Faktor) abgeleitet =
1. Faktor nicht abgeleitet · 2. Faktor abgeleitet +
1. Faktor abgeleitet · 2. Faktor nicht abgeleitet

Die Reihenfolge der Aufträge ❹ und ❺ kann auch vertauscht werden:

❹ Bestimmen Sie jetzt die Ableitungsfunktion des Tangens.

Oben haben Sie berechnet $\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

❺ Leiten Sie aus den beiden Formeln für die Ableitung der Kehrfunktion und der Produktregel die Quotientenregel her:

f und g seien differenzierbar für alle $x \in D_{f/g}$.

✎ Quotientenregel: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$ ____________________

Die Ableitungsregel für die Kehrfunktion brauchen Sie sich nicht extra zu merken, wenn Sie die Quotientenregel hergeleitet haben. Sie ergibt sich als Sonderfall der Quotientenregel.

Damit haben Sie alle wichtigen Ableitungsregeln kennen gelernt!

Aufgabe 2

Zurück zur Aufgabe mit dem Luftvolumen:

a) Es sei nur die Änderungsrate des Luftvolumens vorgegeben mit f(t) = 2 · sin (0,4 π · t).
Bestimmen Sie den Funktionsterm, der das Luftvolumen in der Lunge angibt.

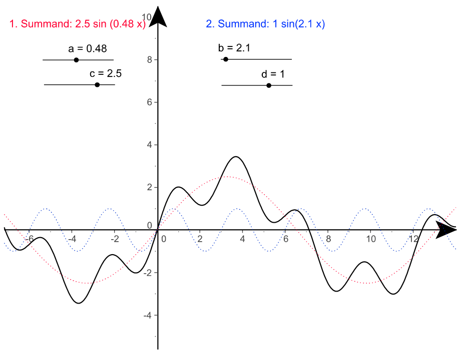
Warum ist dieser Term nicht eindeutig bestimmt? Welche zusätzliche Angabe ist erforderlich, um diesen Term eindeutig zu bestimmen?

b) Zu welchem Zeitpunkt ist die pro Zeiteinheit eingeatmete bzw. ausgeatmete Luftmenge am größten?

c) Wie viel Luftvolumen wird beim Einatmen im Durchschnitt pro Sekunde eingeatmet?

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe wird die Bewegung des Wassers an einem (ansteigenden) Strand beobachtet, wie es einmal mehr einmal weniger weit auf den Strand fließt und sich wieder zurückzieht. Diese Bewegung geschieht jeweils über eine gedachte Null-Linie hinweg. Sie setzt sich zusammen aus der (eher langsamen) Bewegung durch die Gezeiten und der (eher schnellen) Bewegung des Auflaufens der Wellen.



Diese Bewegung soll, beginnend mit Mittelwasser (t = 0) bei Flut, durch die Funktion

$$f(t) = c \cdot \sin(a \cdot t) + d \cdot \sin(b \cdot t)$$

modelliert werden, wobei f(t) angibt, wie weit das Wasser auf den Strand läuft – relativ zu der gedachten Null-Linie (und nicht den Tidenhub).
Wegen der besseren Darstellbarkeit sind t die Zeit in Stunden, a und b die Frequenzen in Stunden^{-1} und c und d die Amplituden in m.

Damit Sie eine Vorstellung von dieser zusammengesetzten Funktion erhalten, schauen Sie sich das zu dieser Aufgabe gehörende Applet an.
Es zeigt den Graphen obiger Funktion f, wobei Sie die Parameter a, b, c und d mit Schiebereglern einstellen können.

Überlegen Sie, welche Periodenlänge und welche Amplitude Sie für die Gezeiten wählen möchten und welche für die Wellenbewegung.

Hinweis: Die Skalierung ist so gewählt, dass die Modellierung der Gezeiten sichtbar ist.

Änderungen sind möglich über den Menü-Punkt „Einstellungen" und dort auf „Zeichenblatt". Jetzt sollten die Einstellungen der x-Achse sichtbar sein. Gehen Sie in das Feld „max" und geben Sie dort einen anderen Wert ein, gegebenenfalls auch bei „min". Abschließend „Übernehmen".

a) Bestimmen Sie, wie weit in Ihrem Modell das Wasser maximal auf den Strand laufen wird, und beschreiben Sie im Sachkontext der Aufgabe, wann dieser Fall eintritt.

b) Ermitteln Sie die größte Geschwindigkeit, mit der das Wasser auf den Strand strömt.

Siehe auch Projektaufgabe 4.

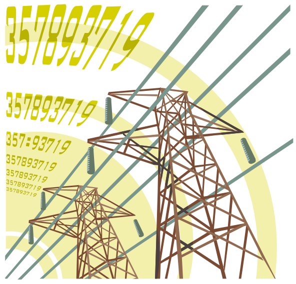
c) Sehen Sie Schwächen im vorgegebenen Modell? Beschreiben Sie, was nach Ihrer Meinung nicht zutreffend modelliert wird, und gegebenenfalls, wie dies geändert werden könnte.

Aufgabe 4

Die elektrische Wechselspannung hat einen durchschnittlichen Wert von 230 V. Der Verlauf der Spannung ist sinus-förmig und kann mit folgender Gleichung beschrieben werden:

$$U(t) = u_{max} \cdot \sin(2\pi \cdot 50Hz \cdot t)$$

(u_{max} = maximal mögliche Spannung, 50 Hz = in Europa übliche Frequenz.)



Der Strom ist in der Regel mit der Spannung in Phase (Extrem- und Wendestellen stimmen überein), es gilt daher die Gleichung: $I(t) = i_{max} \cdot \sin(2\pi \cdot 50Hz \cdot t)$ *(i_{max} = maximal möglicher Strom)* .

Um Wechsel- und Gleichstrom miteinander vergleichen zu können, misst man die Leistungen, für die P = U · I gilt.
Bestimmt man die Leistung im Wechselstromkreis, so erhält man eine Gleichung der folgenden Art:

$$P(t) = u_{max} \cdot i_{max} \cdot \sin^2(2\pi \cdot 50Hz \cdot t).$$

Zeigen Sie, dass gilt $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

Ermitteln Sie den Durchschnittswert der Leistung und berechnen Sie daraus die maximale in Deutschland mögliche Spannung.

Den Durchschnittswert der Leistung kann man bestimmen mit dem durchschnittlichen Wert der Funktion $f(x) = \sin^2(x)$.

II. Exponential- und Logarithmus-Funktionen

mit Wachstumsmodellen

Aufgabe 5

Spätestens in der Klassenstufe 10 haben Sie exponentielles Wachstum kennen gelernt.

a) Geben Sie in einem konkreten Sachkontext ein Beispiel für eine Funktion an, die exponentielles Wachstum beschreibt.

b) Die „einfachste“ Funktion, die exponentielles Wachstum beschreibt, ist

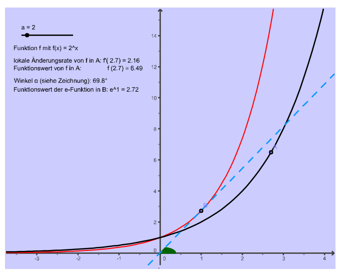
$$w \text{ mit } w(x) = a^x \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}).$$

Untersuchen Sie, wie sich das Wachstum jeweils in Abhängigkeit von a verhält bzw. verändert.

c) Sie haben vielleicht schon mit der speziellen Exponentialfunktion

$$\exp(x) = e^x$$

gearbeitet, zumindest aber die zugehörige Taste auf Ihrem Taschenrechner bemerkt.
Untersuchen Sie, wodurch sich diese spezielle Exponentialfunktion besonders auszeichnet. Dazu können Sie das zugehörige Applet verwenden.

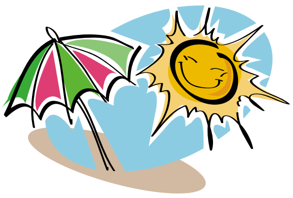


e ist die irrationale Zahl 2,718281..., die zu Ehren des Mathematikers Leonhard Euler (1707 - 1783) auch Eulersche Zahl genannt wird.

Funktion	Ableitung
e^x	e^x

❶ Sie haben herausgefunden, dass die e-Funktion beim Ableiten unverändert bleibt, die lokale Änderungsrate des Bestandes (die Wachstumsgeschwindigkeit) also direkt dem Bestand entspricht.
Damit ist e^x ein wichtiger Baustein für viele Wachsumsprozesse.

Aufgabe 6



Eine Herstellerfirma von Markisenstoff hat für ihre beste Qualität Grenzkosten pro Rolle von $K'(x) = 20\ x\ e^{0{,}01x^2}$ Geldeinheiten (GE), wobei x die Anzahl der produzierten Rollen ist.

Bestimmen Sie die Kostenfunktion K, wenn sich die Fixkosten zur Produktion auf 1.500 GE belaufen,
und berechnen Sie die Produktionskosten von 10 Rollen.

Aufgabe 7

Die Aktivität N′ einer radioaktiven Substanz kann beschrieben werden durch die Gleichung

$$N'(t) = -5 \cdot 10^7\ e^{-0{,}001\,t}.$$

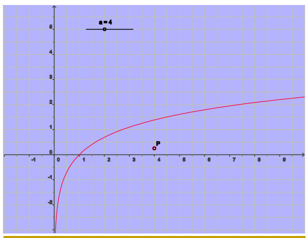
Dabei ist t die Zeit in Sekunden und N′(t) die Anzahl der Atome, die pro Sekunde zerfallen.

a) Berechnen Sie das Maß der Fläche zwischen der Kurve und der t-Achse im Bereich von t = 0 bis t = 1200.

Interpretieren Sie diese Zahl im Kontext der Aufgabe.

Radioaktives Zerfallsgesetz: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$
N_0 ist der Anfangsbestand, N(t) der Bestand zur Zeit t.
Die Zerfallskonstante λ ist hier bekannt, damit lässt sich die Halbwertszeit berechnen.

b) Ermitteln Sie die Zeit, nach der die Hälfte der Atome zerfallen ist (Halbwertszeit).



Funktion	Ableitung
ln x	

❷ Der Logarithmus zur Basis a ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $x \to a^x$.
Der Logarithmus zur Basis e heißt *natürlicher Logarithmus* oder lateinisch ***l**ogarithmus **n**aturalis* mit dem Funktionszeichen *ln*.
Bearbeiten Sie das zugehörige Applet, um die Ableitungsfunktion zu ermitteln.

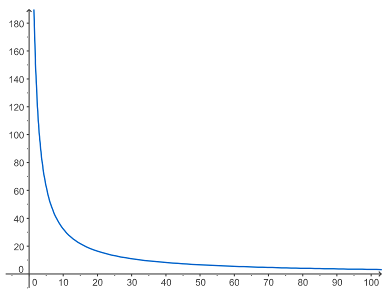
Aufgabe 8

Die Wachstumsrate einer Bakterienpopulation in einer Petri-Schale sei

$$N'(t) = \frac{1000}{1+3t}.$$

Dabei ist t die Zeit in Stunden seit Beginn des Versuchs.

Ermitteln Sie das Anwachsen der Population innerhalb der Inkubationszeit von 8 Stunden.



Skizzieren Sie N′(t) in ein Koordinatensystem und versuchen Sie dann, die Stammfunktion einzuzeichnen.

Aufgabe 9

a) Zeigen Sie, dass gilt $a^x = e^{x \cdot \ln a}$, und ermitteln Sie, für welche a und x diese Gleichung gilt.

b) Bestimmen Sie die Ableitungsregel für f: $x \to a^x$ und die maximale Definitionsmenge der Ableitungsfunktion.
Bestimmen Sie analog eine Stammfunktion zu f.

c) Bestimmen Sie die Ableitungsregel für g: $x \to \log_a x$ und die Definitionsmenge der Ableitungsfunktion.

Funktion	Ableitung	Stammfunktion
a^x		
$\log_a x$		*nicht verlangt*

Aufgabe 10

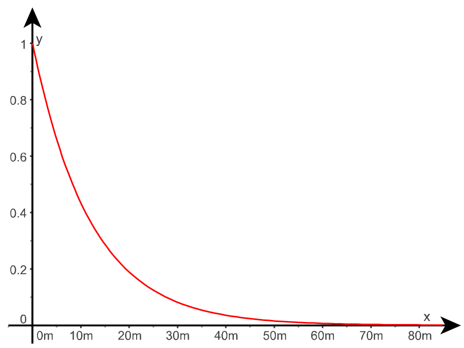
Ein Ehepaar gewinnt in einer Lotterie 100.000 €, die allerdings zu einem festen Zinssatz auf einer Bank liegen. Sobald der Betrag sich verdoppelt hat, werden die dann anfallenden Zinsen lebenslang quasi als kleine Rente ausbezahlt.
Ermitteln Sie eine Funktion, die in Abhängigkeit vom Zinssatz die Anzahl von Jahren angibt, nach denen die Rentenzahlung einsetzt und erstellen in einem realistischen Definitionsbereich eine Wertetabelle.
Wie groß ist die durchschnittliche Wartezeit auf die Rentenzahlung bei einer Verzinsung zwischen 5% und 8%?

Aufgabe 11

In einem See nimmt die Helligkeit (Intensität von Licht) pro 1 m Wassertiefe um 8% ab.

a) Leiten Sie aus diesen Angaben den Term einer Funktion her, welche in Abhängigkeit von der Tiefe in m die Intensität des Lichts in Prozent (bezogen auf die Intensität an der Wasseroberfläche) angibt.

b) Bestimmen Sie die Tiefe, in der nur noch die halbe Lichtintensität herrscht.
Welche Lichtintensität herrscht in n-facher ($n \in \mathbb{N}$) der eben berechneten Tiefe?



Aufgabe 12

Bei einem gesunden Menschen werden nach einer Infektion Antikörper gebildet. Es sei

$$A(t) = \frac{1000 \cdot t}{t^2 + 16}$$

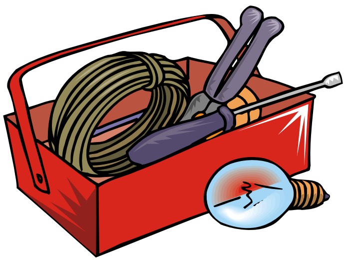
die Anzahl der Antikörper, die pro Sekunde vom Körper produziert werden und zwar t Sekunden nach Eintritt der Infektion.

Ermitteln Sie die Gesamtzahl der Antikörper, die nach diesem Modell am ersten Tag nach der Infektion produziert wird.

Das Ermitteln der Stammfunktion ist schwierig.
Mit Nachdenken und Probieren wird es gelingen!

III. Potenzfunktionen

mit rationalen Exponenten



Mathematik verwendet oft bekanntes Werkzeug, um damit Neues herzuleiten.

Funktion	Ableitung	Stammfunktion
x^b		
$\sqrt{x}$		

Potenzfunktionen haben die Form p: $x \to x^b$.

Aufgabe 13

a) Stellen Sie den Funktionsterm mit Hilfe der e-Funktion und des natürlichen Logarithmus dar und ermitteln Sie so den Term der Ableitungsfunktion p'.

b) Welche Bedingungen für Basis und Exponent müssen gelten, damit die Ableitungsfunktion wie in a) angegeben ermittelt werden kann?
Gibt es zusätzliche Einschränkungen für die Ableitungsfunktion?
Begründen Sie jeweils Ihre Angaben.

c) Geben Sie speziell die Ableitung der Quadratwurzel-Funktion an und ermitteln Sie eine Stammfunktion zu w: $x \to \sqrt{x}$.

d) Ermitteln Sie eine Stammfunktion zur allgemeinen Potenzfunktion p: $x \to x^b$.
Gibt es dabei für Basis und Exponent Bedingungen? Begründen Sie Ihre Angaben.

Aufgabe 14

a) Ermitteln Sie eine Stammfunktion zu f: $x \to x \cdot \sqrt{x^2+d}$, wobei $d \in \mathbb{R}^+$ gelte.

Die Grenzkosten K' bei der Produktion von Schuh-Paaren sind gegeben durch

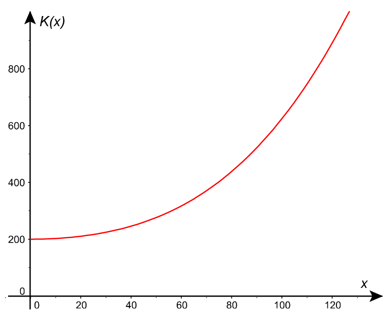
$$K'(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x^2+2500}}{1000}.$$

Dabei ist x die Anzahl der produzierten Paare und $K'(x)$ sind sozusagen die Kosten für das x-te Paar in Geldeinheiten (GE).
Die Fixkosten betragen 200 GE.

Fast alles, was Sie zu dieser Funktion brauchen, haben Sie eben schon ermittelt.

b) Bestimmen Sie die durchschnittlichen Kosten (pro Paar) bei einer Produktion von 20, 50 und 200 Paaren.

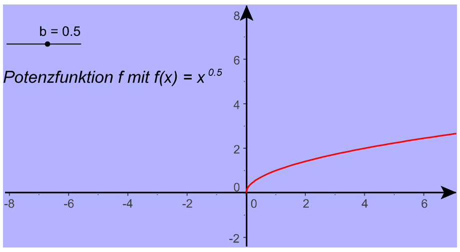
<u>Zusatz</u>: Ermitteln Sie die Funktion der durchschnittlichen Kosten und Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion und der Grenzkosten-Funktion in ein (gemeinsames) Koordinatensystem.
Interpretieren Sie die Graphen im Sachkontext.



c) Bestimmen Sie die Kostenfunktion K und skizzieren Sie deren Graphen in ein Koordinatensystem.

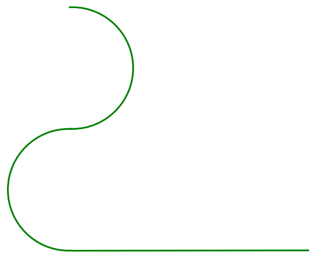
Aufgabe 15

Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten können sehr unterschiedlich aussehen.
Versuchen Sie dennoch mit Hilfe des zugehörigen Applets die möglichen Graphen und deren Eigenschaften zu beschreiben.



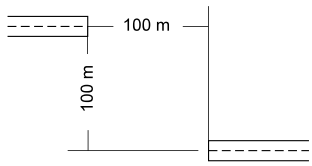
Dargestellt wird zu Beginn die Funktion f mit $f(x) = x^{0,5}$, also die Quadratwurzelfunktion.
Verändern Sie mit dem Schieberegler den Exponenten der Potenzfunktion $x \to x^b$ in den Grenzen von – 5 bis 5.
Achten Sie dabei auf Gemeinsamkeiten beim Kurvenverlauf und auf prinzipielle Unterschiede.
Das Programm kann derzeit nicht alle Sonderfälle korrekt darstellen, auch wenn Exponenten als Bruch eingegeben werden.

Aufgabe 16



a) Auf Ihrem Schulhof wird mit Kreide eine insgesamt 100m lange Spur aufgezeichnet, deren Form die Abbildung verdeutlicht: Zuerst ist der Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve durch Aneinandersetzen zweier Kreisbögen realisiert, danach der Übergang einer Linkskurve in ein gerades Stück durch Ansetzen der Kreistangente.

   Können Sie mit dem Fahrrad genau diese Spur fahren? Versuchen Sie eine mathematische Beschreibung.

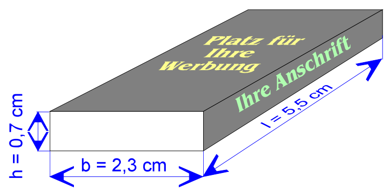


b) Ein Bauingenieur steht vor folgender Aufgabe:
   Die beiden parallelen, geradlinigen Straßenstücke sollen geeignet miteinander verbunden werden.

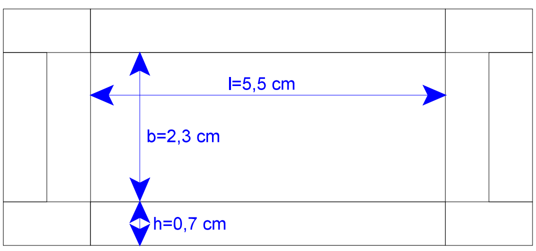
   Entwerfen Sie eine Lösung, indem Sie die gesuchte Verbindung als Teil des Graphen einer Funktion sehen.

Aufgabe 17

Eine Zündholzschachtel, die für Werbezwecke hergestellt wird, hat neben stehende Maße:
Länge l = 5,5 cm · Breite b = 2,3 cm · Höhe h = 0,7 cm.



a) Die Länge ist wegen der verwendeten Streichhölzer unveränderbar, und weil deren Anzahl pro Schachtel etwa gleich bleiben soll, auch das Volumen. Könnte man dennoch bei vergleichbarer Bauweise den Materialverbrauch (für die Umhüllung und das Schubfach) vermindern?



b) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachkontext der Aufgabe.

IV. Existenz von Ableitung und Integral

Bedingungen an Funktion

Ableitung

Kann man jede Funktion ableiten oder integrieren? In der Schule ist es fast immer so, allerdings gibt es auch dort die Ausnahmen.
Sie haben sich bereits mehrfach mit Steuerfunktionen beschäftigt und vielleicht schon festgestellt, dass die verschiedenen Bauteile gut zusammen passen müssen, damit der Steuertarif nicht als ungerecht empfunden wird. Das soll jetzt an einer alten Version des Einkommensteuertarifs präzisiert werden:

Einkommensteuertarif 1958 (Kurzform)

1.	bis 1.680 DM (Grundfreibetrag):	*0*
2.	von 1.681 DM bis 8.009 DM:	$0{,}2 \cdot (x - 1680)$
3.	von 8.010 DM bis 23.999 DM:	$1.264 + 272 \cdot y + 2{,}9 \cdot y^2$
4.	von 24.000 DM bis 110.039 DM:	$6.358 + 382 \cdot z + 1{,}572 \cdot z^2 - 0{,}006 \cdot z^3$
5.	ab 110.040 DM:	$0{,}53 \cdot x - 11.281$

Dabei gilt:
x = zu versteuerndes Einkommen
y = (x − 8.000)/1.000
z = (x − 24.000)/1.000

Argumentieren kann man mit Tangenten als Annäherung von Sekanten, aber auch rein rechnerisch.

Bei Problemen kann vielleicht der unten stehende Tipp helfen.

Aufgabe 18

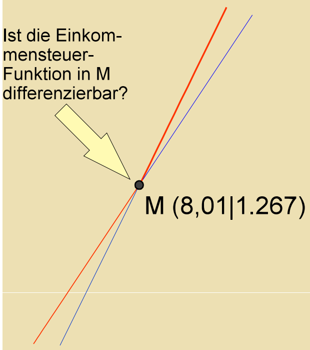
a) Erstellen Sie nach nebenstehendem Tarif die Einkommensteuer-Funktion, zusammengesetzt aus den fünf Termen.

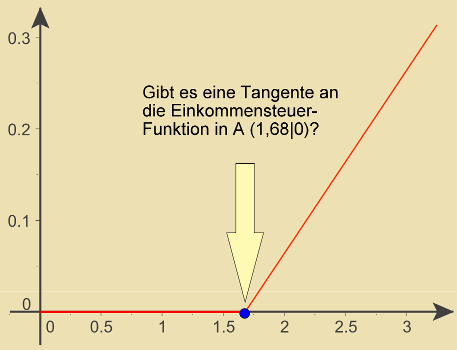
Untersuchen Sie die Übergangsstellen auf Differenzierbarkeit *(gibt es dort eine Tangente, gibt es dort eine Ableitung?)*.

b) Finden Sie Beispiele von Funktionen (Term und/oder Graph), die an einzelnen Stellen nicht differenzierbar sind.

c) Versuchen Sie Regeln aufzustellen, unter welchen Bedingungen die Ableitung existiert und unter welchen nicht.

Tipp *(falls gewünscht)*





Links sind zwei Ausschnitte des Graphen der Einkommensteuer-Funktion (in rot) abgebildet, bei denen jeweils der definierende Term wechselt. Die Einheiten auf den Achsen sind in 1.000 DM. Die blauen gestrichelten Linien links sind Hilfslinien.
Nehmen Sie zur Untersuchung an, dass die verschiedenen Terme keine Definitionslücken an den Übergangsstellen aufweisen.

Gibt es an der Übergangsstelle eine Tangente und damit die Ableitung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Integral

Der Verbrauch an elektrischer Energie wird im Haushalt zumeist mit Zählern gemessen, die den Gesamteffekt der elektrischen Leistung in einem Zeitintervall anzeigen. Dieser Energieverbrauch zwischen den Zeitpunkten a und x werde mit $E_a(x)$ bezeichnet. Die Leistung aller zu einem bestimmten Zeitpunkt x eingeschalteten Verbraucher heiße W(x).
Der Energieverbrauch $E_a(x)$ besteht aus einer Summe von Teilprodukten $W(x) \cdot \Delta x$ *(Leistung mal kleines Zeitintervall)*, wobei x ein beliebig gewählter Zeitpunkt im betrachteten Intervall ist. Jedes Teilprodukt trägt also zum Gesamteffekt ein bisschen bei: $\Delta E_a(x) = E_a(x + \Delta x) - E_a(x) = W(x) \cdot \Delta x$. Je kleiner das Zeitintervall gewählt wird, desto genauer entspricht diese Summe dem Energieverbrauch.

$$E_a(x) = \int_a^x W(t)\,dt$$

$$\int_a^x W(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{n} W(x_i) \cdot \Delta x$$

Integral als Summe von Teilprodukten

Anders ausgedrückt: Bildet man die mittlere Änderungsrate $\Delta E_a(x) / \Delta x$, so kann diese durch W(x) beliebig genau angenähert werden. Die lokale Änderungsrate ist also gleich der momentanen Leistung der eingeschalteten Verbraucher.
Es gilt daher Teil 1 des nachfolgenden Hauptsatzes:

„Beliebig genau“ klappt nur, wenn W keine Sprungstellen im betrachteten Intervall aufweist (W heißt dann *stetig*)

Das Differenzieren macht das Integrieren rückgängig.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Teil 1: Ist f stetig auf [a,b], so ist für jedes $x \in [a,b]$ die Integralfunktion I_a differenzierbar mit $I_a' = f$.

Teil 2: Für jede integrierbare Funktion f, die eine Stammfunktion F besitzt, gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Mit der Integralfunktion I_a ist gemeint

$$I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Zum Teil 2:
Da die Existenz einer Stammfunktion F vorausgesetzt wird, kann f als Ableitung einer Funktion F gedeutet werden. Diese muss dann aus ihrer Ableitung rekonstruierbar sein (bis auf eine additive Konstante).

Übungsmaterial:
„mathe online“, Ableitungspuzzle 1 bis 3

In einen Behälter fließe Wasser mit der momentanen Zuflussrate $f(x) = F'(x)$ (die bei negativen Werten auch als Abflussrate gedeutet werden kann), x sei ein beliebiger Zeitpunkt zwischen dem Anfang a und dem Ende b. Dann ist das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

das Volumen des Wassers, das zwischen den Zeitpunkten a und b in den Behälter geflossen ist.
Die momentane Zuflussrate kann beliebig genau angenähert werden durch die mittlere Zuflussrate $\Delta F(x)/\Delta x$ für kleine Zeitintervalle Δx, in die man das Gesamtintervall [a,b] zerlegen kann. Die Zuflussrate f(x) trägt also in jedem solchen Zeitintervall Δx einen Volumenanteil von $\Delta F(x) \approx f(x) \cdot \Delta x$ bei. Die Summe über alle $\Delta F(x)$ gibt das Volumen um so genauer an, je kleiner die Δx gewählt werden. Und diese Summe ist F(b) – F(a) *(siehe rechts).*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F'(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a) \text{ mit } a = x_0 \text{ und } b = x_n.$$

Zusammenfassung

- Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existiert für in [a,b] stetige Funktionen f.

  Vergleiche mit G1 zeigen, dass das Integral auch existieren kann, wenn f nicht stetig ist.

- Man bekommt eine Stammfunktion nicht automatisch geliefert und manchmal findet man auch keine, wie z.B. zu der in der Stochastik wichtigen Funktion $x \to e^{-0{,}5\,x^2}$, die ja ersichtlich stetig ist.

- Integralrechnung ist die Umkehrung der Differentialrechnung und umgekehrt.

- Wichtige Grundvorstellung für das Integral: <u>Summe</u> von Teil<u>produkten</u> *(neben „Rekonstruktion des Bestandes“, „Berechnen des Flächenmaßes“).*

V. Rückschau

mit Selbsteinschätzung

Überblick-Grafik

Versuchen Sie, einen Überblick über die Inhalte dieses Themenbereichs zu gewinnen. Überlegen Sie dabei auch, was Ihnen dabei wichtig erschien.

Stellen Sie das nach Ihrer Meinung Zentrale in nebenstehendem Kasten dar und verwenden Sie dazu graphische Elemente (z.B. Mind Map, Concept Map, eine Grafik, ...).
Wichtig ist, dass Sie diese Übersicht selbst gestalten und nicht irgendwo kopieren.

G4 · Änderungsraten und Bestände

Überblick-Text

Wenn Sie möchten, können Sie hier maximal drei Punkte nennen, die Ihre obige Darstellung ergänzen oder erläutern.

Vernetzungen

Welche Verbindungen zu früheren Themenbereichen sehen Sie?
Sind Ihnen Inhalte und/oder Methoden aus diesem Themenbereich schon außerhalb des Mathematikunterrichts begegnet und wenn ja, wo?
(Kann z.T. in obige Grafik eingebaut werden)

Im Rückblick sollten Sie sich auch fragen, ob Sie die am Anfang des Heftes stehenden Kompetenzen erworben haben. Schätzen Sie sich selbst ein und kreuzen Sie in der Tabelle jeweils die am ehesten zutreffende Antwort an:

Kompetenzen	**ja**	**ein wenig**	**eher nicht**	**nein**
Ich kenne die Ableitungsregeln und deren präformale Begründungen und die einfachen Integrationsregeln (Summen-, Faktorregel).				
Ich habe mein Wissen um die Bedeutung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung vertieft.				
Ich setze die Differential- und Integralrechnung in einfachen mathematischen und realitätsnahen Problemstellungen sachgerecht ein, begründe die Auswahl der Funktionsklassen im Aufgabenkontext und deute den Einsatz der Differential- und Integralrechnung im Modellierungsprozess *(bezogen auf die Funktionsklassen: Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten, Exponential- und Logarithmusfunktionen, Sinus, Cosinus und deren einfache Verknüpfungen und Verkettungen)*				

Haben Sie Kompetenzen nicht erworben oder nicht so, wie Sie es sich erhofft hatten, notieren Sie sich, woran es gelegen haben könnte. Überlegen Sie zugleich, ob Sie in Ihrem eigenen Verantwortungsbereich Möglichkeiten sehen, den Erwerb von Kompetenzen zu verbessern.

✎

VI. Lösungsvorschläge

Aufgabe 1
basiert auf eigenem Kenntnisstand und eigener Vorstellung, daher kein Lösungsvorschlag.

Aufgabe 2
a) $g(t) = \int f(t)\,dt = -2\cdot\frac{2{,}5}{\pi}\cdot\cos(0{,}4\pi\cdot t) + c$, wobei die Konstante c im Sachkontext berechnet werden kann, weil g(0) = 0 galt im Modell: $g(0) = -\frac{5}{\pi} + c = 0 \;\Rightarrow\; c = \frac{5}{\pi}$.

b) Wenn die Änderungsrate maximal ist – also bei den Wendepunkten der Ausgangsfunktion – ist das eingeatmete Luftvolumen am größten. *Das kann aus der Kenntnis der trigonometrischen Funktionen geschlossen werden oder aber mit Hilfe der Ableitung von f.* Der Zeitpunkt ist t = 1,25 (+5n, n∈IN) für's Einatmen und t = 3,75 (+ 5n) für's Ausatmen.

c) $0{,}4\cdot\int_0^{2{,}5} f(t)\,dt = 0{,}4\cdot[-\frac{5}{\pi}\cdot\cos(0{,}4\pi\cdot t)]_0^{2{,}5} = 0{,}4\cdot[\frac{5}{\pi}+\frac{5}{\pi}] = \frac{4}{\pi}$,

im Durchschnitt wird im Modell etwa 1,3 Liter pro Sekunde an Luft eingeatmet.
Das kann aus Symmetriegründen auch direkt berechnet werden: Bei t = 2,5 ist das Volumen V maximal,
V(2,5) ≈ 3,18 und V(0) = 0 ⇒ durchschnittlich etwa 1,3.

Aufgabe 3, Beispiel:
Bewegung durch Gezeiten: 5 ·sin(0,48 t). Das bedeutet 5m Amplitude und eine Periode von ca. 13 Stunden.
Bewegung durch Wellen: 1·sin(2500 t). Das heißt 1m Amplitude und ca. 0,0025 Stunden = 9 Sekunden Periode.

a) Das Wasser läuft bezogen auf eine Null-Linie 6m weit auf den Strand, nämlich beim Maximum der Tide (5m) und wenn eine Welle gerade auf den Strand gelaufen ist (1m). Die Bandbreite der Bewegung ist also 12m.

b) f′(t) = (c·sin(a·t) + d·sin (b·t))′ = c·a ·cos(a·t) + d·b cos (b·t) ist die Geschwindigkeit zur Zeit t und maximal kann dieser Term c·a + d·b sein (z.B. für t = 0). Obiges Beispiel eingesetzt ergibt 2502,4 m/h, das sind etwa 2,5 km/h oder 0,7 m/sec.

Aufgabe 4

$$\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\cdot(1-(1-2\cdot\sin^2 x)) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin^2 x = \sin^2 x$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2\pi}[x-\frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}$$

Analog: $\int_0^1 \sin^2(100\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot[x-\frac{1}{200\pi}\sin(200\pi x)]_0^1 = \frac{1}{2}$.

Das bedeutet, dass die Leistung im Durchschnitt genau die Hälfte des Produkts der maximal möglichen Werte von Spannung und Strom ist. Wegen der Proportionalität dieser Werte ist die maximal mögliche Spannung daher $\sqrt{2}\cdot 230 \approx 325\,V$.

Aufgabe 6
Strategie für Stammfunktion: $(e^{0{,}01x^2})' = 0{,}01\cdot 2x\cdot e^{0{,}01x^2}$.
Vergleich mit K′(x) zeigt, dass 0,02 dort zu 20 wurde, also mal 1000. ⇒ Stammfunktion $K(x) = 1000\cdot e^{0{,}01x^2} + c$
Weil K(0) = 1500 sein muss, folgt 1000 + c = 1500, und daher $K(x) = 1000\cdot e^{0{,}01x^2} + 500$.

K(10) = 1000 · e + 500 ≈ 3.218. Die Produktionskosten von 10 Rollen hochwertigen Markisenstoffes betragen etwa 3.220 GE.

Aufgabe 7
a) $\int_0^{1200} N'(t)\,dt = \left[5\cdot 10^{10}\cdot e^{-0{,}001t}\right]_0^{1200} = 5\cdot 10^{10}\,[e^{-1{,}2} - 1] \approx$

$-3{,}4940\cdot 10^{10}$: Der Betrag davon ist die Anzahl der innerhalb von 1200 Sekunden (20 Minuten) zerfallenen Atome.

b) $e^{-0{,}001t} = 0{,}5 \Rightarrow -0{,}001\,t = \ln 0{,}5 \Rightarrow t = -1000\cdot\ln 0{,}5 \approx 693$.
Die Halbwertszeit beträgt etwa 693 sec bzw. gut 11½ min.

Aufgabe 8
Strategie für Stammfunktion: In (1 + 3t) ist jedenfalls Bestandteil, denn $(\ln(1+3t))' = \frac{1}{1+3t}\cdot 3$. Der Faktor 1000 (als Zähler) ergibt sich mit geeigneter Multiplikation.

$\int_0^8 \frac{1000}{1+3t}\,dt = \frac{1000}{3}\cdot[\ln(1+3t)]_0^8 \approx 1073$. Die Population ist auf etwa 1073 angewachsen.

Aufgabe 9
a) $e^{x\cdot\ln a} = e^{\ln a\cdot x} = (e^{\ln a})^x = a^x$ mit a > 0, x ∈ IR.

b) $(a^x)' = (e^{x\cdot\ln a})' = \ln a\cdot e^{x\cdot\ln a} = \ln a\cdot a^x$ mit a > 0, x ∈ IR.
Stammfunktion ist $\frac{1}{\ln a}\cdot a^x$ mit a > 0, x ∈ IR.

c) $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$ mit a > 0 und x ∈ IR^+

Aufgabe 10
Sei x der Zinssatz und f(x) = z die Zeit in Jahren. Dann folgt aus dem Ansatz $100.000\cdot(1+x)^z = 200.000 \Rightarrow z\cdot\ln(1+x) = \ln 2$ der Funktionsterm $f(x) = \frac{\ln 2}{\ln(x+1)}$. Einige Werte:

2%: 35 Jahre | 3%: 23,5 Jahre | 5%: 14 Jahre | 7%: 10 Jahre.
Im Durchschnitt muss bei einer Verzinsung von 5 bis 8% gut 11 Jahre gewartet werden: $\frac{1}{0{,}03}\int_{0{,}05}^{0{,}08} f(x)\,dx \approx 11{,}20$.

Aufgabe 11
a) $I(x) = 0{,}92^x$
b) $0{,}5 = 0{,}92^x \Rightarrow x = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0.92} \approx 8{,}3$.

In einer Tiefe von etwa 8,3m herrscht in diesem See nur noch die halbe Lichtintensität, in n-facher Tiefe davon die $0{,}5^n$ -fache, denn $0{,}5^n \approx (0{,}92^{8{,}3})^n = 0{,}92^{n\cdot 8{,}3}$

Aufgabe 12

<u>Strategie für Stammfunktion</u>: $(\ln(t^2+16))' = \frac{1}{t^2+16}\cdot 2t$, da aber im Zähler 1000 t stehen soll, lautet die Stammfunktion $500\cdot\ln(t^2+16)+c$. Und 1 Tag = 86400 Sekunden.

$$\int_0^{86400} A(t)\,dt = 500\cdot\left[\ln(t^2+16)\right]_0^{86400} \approx 9980.$$

Es werden also fast 10.000 Antikörper am 1. Tag nach der Infektion produziert.

Aufgabe 13

a) $x^b = e^{b\cdot\ln x} \Rightarrow (x^b)' = b\cdot\frac{1}{x}\cdot x^b = b\cdot x^{b-1}$

b) $x > 0$, *damit der Logarithmus definiert ist. Für x^0 (b = 0) erhält man das richtige Ergebnis. Die sich ergebenden Terme sind z.T. auch für $x \leq 0$ zutreffend.*

Die Funktion $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ z.B. ist auch für $x \leq 0$ definiert und die Ableitung für $x < 0$.

c) Ableitung: $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

Welche Funktion ist abgeleitet die Quadratwurzelfunktion? Der Term muss $x^{1,5}$ beinhalten, weil für den Exponenten $1,5 - 1 = 0,5$ gilt. Die Konstante muss aber entfallen:

Stammfunktion: $\int\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}+c$

d) *Strategie wie eben, also x^{b+1} wichtiger Bestandteil der Stammfunktion, Konstante muss wieder entfallen:*

Stammfunktion: $\int x^b dx = \frac{1}{b+1}x^{b+1}+c$, aber $b \neq -1$.

Aufgabe 14

<u>Strategie für Stammfunktion</u>: $((x^2+d)^{1,5})' = \frac{3}{2}\cdot 2x\cdot\sqrt{x^2+d}$,

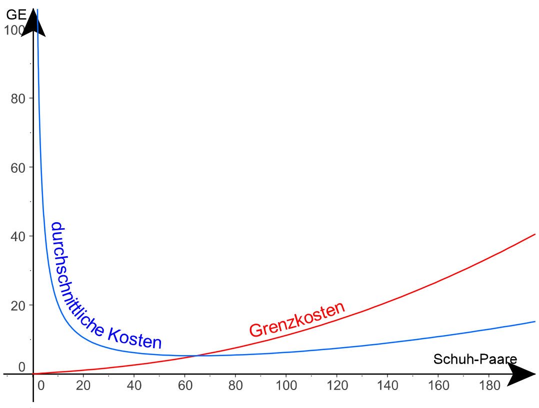
also muss nur noch die Konstante angepasst werden:

a) Stammfunktion: $\int x\cdot\sqrt{x^2+d}\,dx = \frac{1}{3}\cdot(x^2+d)^{\frac{3}{2}}+c$

b) Die durchschnittlichen Kosten bei einer Produktion von 20 Paar Schuhen betragen etwa 10,52 GE pro Paar:

$$\frac{1}{20}\cdot\left(\int_0^{20} x\cdot\frac{\sqrt{x^2+2500}}{1000}\,dx+200\right) = \frac{1}{20}\cdot\left[\frac{(x^2+2500)^{1,5}}{3000}\right]_0^{20}+10,$$

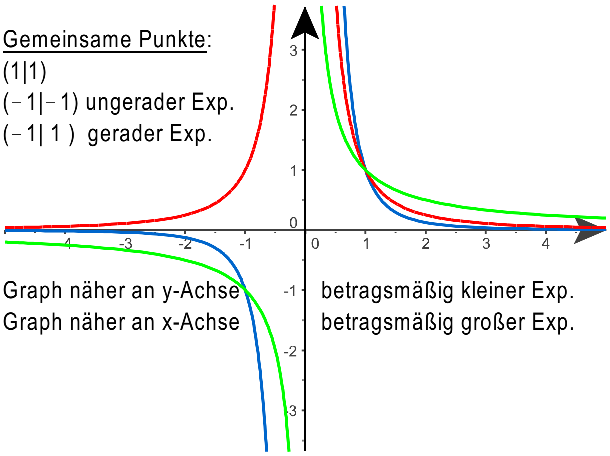
analog 5,52 GE bei 50 und 15,39 GE bei 200 Paaren.



c) $K(x) = \frac{(x^2+2500)^{1,5}}{3000}+c$ und weil $K(0) = 200$ muss $c = \frac{475}{3}$ sein. Die Skizze zu K ist bei der Aufgabe (S. 8) abgebildet..

Aufgabe 15

In der folgenden Abbildung sind die Graphen zu den Funktionen mit den Termen $f_1(x) = x^{-1}$, $f_2(x) = x^{-2}$ und $f_3(x) = x^{-3}$ zu sehen *(welcher Graph gehört zu welcher Funktion?)*.



<u>Gemeinsame Punkte</u>:
(1|1)
(−1|−1) ungerader Exp.
(−1| 1) gerader Exp.

Graph näher an y-Achse betragsmäßig kleiner Exp.
Graph näher an x-Achse betragsmäßig großer Exp.

Analoges kann man für $x^{0,5}$, $x^{0,6}$, $x^{0,7}$ usw. machen, ungerade Wurzeln können eingebaut werden.

Aufgabe 16

a) An den Schnittstellen müsste das Lenkrad herumgerissen werden. Es ist also nicht möglich, genau in der Spur zu bleiben. Teile des Krümmungsverhaltens beschreibt die 2. Ableitung. Wir betrachten den Punkt, an dem die Linkskurve in eine Gerade mündet. Der untere Kreis habe seinen Mittelpunkt im Nullpunkt und den Radius 1 (in Längeneinheiten). Dann hat er die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ bzw. $y^2 = 1 - x^2$. Der unter der x-Achse liegende Halbkreis hat daher die Funktionsgleichung

$f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ $(x \in [-1{,}0])$, die Gerade $g(x) = -1$ $(x > 0)$.

Betrachtet wird der Punkt $P(0|-1)$, an dem die beiden Funktionen zusammengesetzt werden.

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ und $f''(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{1,5}}$, $g''(x) = 0$. Am Punkt P ist $f''(0) = 1$, aber $g''(0) = 0$, die Krümmungen gehen nicht „nahtlos“ ineinander über ⇒ Krümmungsruck.

Die beiden Kurventeile gehen aber „glatt“ ineinander über, weil $f'(0) = g'(0) = 0$.

b) Als Skalierung wählt man z.B. 1 Einheit = 100m. Eine geeignete Lage des Koordinatensystems ist genau der „Mittelpunkt": die linke Straße endet bei $(-0,5|\,0,5)$, die rechte bei $(0,5|-0,5)$. Dann ist für die gesuchte Funktion h zu erfüllen

(i)	$h(-0,5) = 0,5$	(ii)	$h(0,5) = -0,5$	(stetig)
(iii)	$h'(-0,5) = 0$	(iv)	$h'(0,5) = 0$	(differenzierbar)
(v)	$h''(-0,5) = 0$	(vi)	$h''(0,5) = 0$	(kein Krümmungsruck)

6 Bedingungen führen auf ein Polynom 5. Grades, das aber symmetrisch zum Ursprung ist (daher nur 3 Bedingungen nötig!): $h(x) = -6x^5 + 5x^3 - 1,875x$.

Aufgabe 17

a) Volumen (bleibt) = 5,5 · 2,3 · 0,7 = 8,855 = l · b · h

Flächenmaß Schachtel: $A_1(l,b,h) = l \cdot (2b + 3h)$

Flächenmaß Schubfach: $A_2(l,b,h) = (l + 4h)(b + 2h)$

Gesamtfläche: $A(l,b,h) = 2bl + 3hl + bl + 2hl + 4hb + 8h^2$

$A(l,b,h) = 8h^2 + 5hl + 4hb + 3bl$

Nebenbedingungen: l = 5,5 und 8,855 = 5,5 b h $\Rightarrow$ $b = 1{,}61h^{-1}$

Eingesetzt in A: $A(h) = \dfrac{1600h^3 + 5500h^2 + 1288h + 5313}{200h}$,

$$A(h) = 8h^2 + \frac{55}{2}h + \frac{161}{25} + \frac{5313}{200h} \Rightarrow A'(h) = 16h + \frac{55}{2} - \frac{5313}{200h^2}$$

Lösen durch ausprobieren: $A'(0{,}7) \approx -15{,}5$, $A'(0{,}8) \approx -1{,}2$, $A'(0{,}9) \approx 9{,}1$ $\Rightarrow$ Nullstelle zwischen 0,8 und 0,9, nahe an 0,8: $A'(0{,}81) \approx -0{,}03$. Es kann h = 0,81 als optimal angesehen werden. Daraus folgt $b \approx 1{,}99$.

Der alte Materialverbrauch war 67,56 cm^2, der neue ergibt etwa 66,8 cm^2, eine Einsparung von etwa 0,8 cm^2.

b) Die Breite ist geringer, daher die Werbefläche oben und unten kleiner. Der geringe Höhenzuwachs bringt in dieser Hinsicht wohl nichts ein.

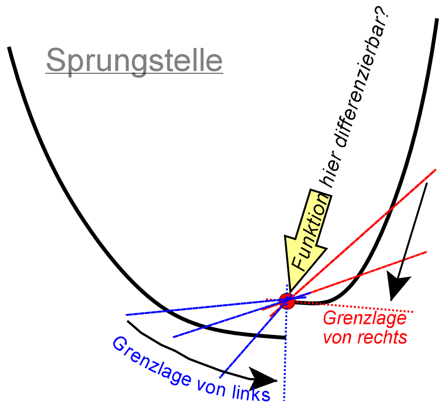
Ob wirklich Material gespart wird, hängt von der Größe der Pappebögen ab, mit denen der Zuschnitt erfolgt.

Aufgabe 18

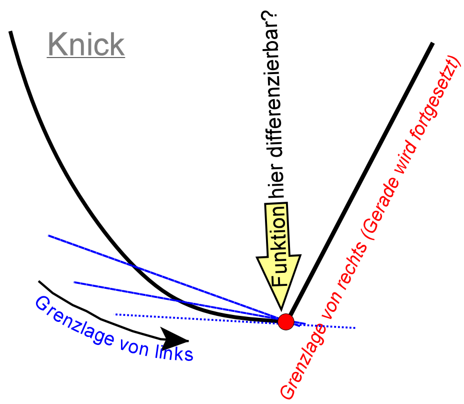
Wenn Sie die Stellen untersucht haben, an denen je zwei Terme aufeinander stoßen, so haben Sie vermutlich bemerkt, dass

- die „Sprünge" sich in Grenzen halten (der größte Sprung liegt bei etwa 90 Pfennig)
- die „Glattheit" aber jedenfalls an zwei Stellen zu wünschen lässt: der Graph hat dort einen Knick. Der Übergang vom Grundfreibetrag zur ersten Steuer bei 1681 DM beginnt mit einer Steigung von 0,2 (vergl. rechte der Abbildungen auf S. 10), beim folgenden Übergang bei 8010 DM ändert sich die Steigung von 0,2 abrupt in etwa 0,27. Auch dies ein deutlicher Knick ((vergl. linke der Abbildungen auf S. 10). Die anderen Übergangsstellen sind glatter.

Weist der Graph einer Funktion eine Sprungstelle oder einen Knick auf, so ist an dieser Stelle die Funktion nicht differenzierbar, weil der Grenzwert der Sekante nicht oder nicht eindeutig bestimmt werden kann.



Eine Funktion, die keine Sprungstelle(n) aufweist, heißt stetig. Man kann den Graphen einer stetigen Funktion durchzeichnen ohne den Stift hochzunehmen, falls die Definitionsmenge keine Lücken aufweist So ist $f: x \to \frac{1}{x}$ stetig, obwohl man nicht durchzeichnen kann, weil die Definitionsmenge IR eine Lücke aufweist.*



Informationen

Die folgenden Aufgaben verwenden Quellen in:

Aufgabe 3 [1], S. 130
Aufgaben 6, 7, 8 [1], S. 232f
Aufgabe 11 [3], S. 166
Aufgaben 12, 14 [2], S. 293

Der Text zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung basiert auf [4], S. 280ff.

Die Clipart-Bilder stammen aus WordPerfect® Office 12

[1] R. Brodie, S. Swift · Qmaths 12b
Moreton Bay Publishing, Melbourne 1996

[2] R. Brodie, S. Swift · Qmaths 12c
Moreton Bay Publishing, Melbourne 1996

[3] Georg Glaeser · Der mathematische Werkzeugkasten
Elsevier, München 2004

[4] Tietze, Klika, Wolpers · Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1 · Vieweg, Braunschweig 1997

VII. Projektaufgaben

Projektaufgabe 1 · U-Bahn

In dieser Aufgabe sollen Sie die Fahrt eines U-Bahn-Zuges zwischen zwei Haltestellen modellieren. Die sich ergebende Funktion darf aus mehreren Termen zusammengesetzt sein (muss es aber natürlich nicht).

Für eine Fahrt zwischen zwei Haltestellen wird eine Funktion f gesucht, sodass der zurückgelegte Weg f(x) eine Funktion der Zeit x ist (Weg in m, Zeit in s).

Es geht um eine Fahrtstrecke der Hamburger Hochbahn AG, nämlich die letzte Strecke der U1 von der Haltestelle „Richtweg" zur Haltestelle „Norderstedt Mitte", die ca. 1200 m lang ist. Die DT4-Züge (die neuesten Züge, die in Hamburg eingesetzt werden) dürfen dort die Höchstgeschwindigkeit von 80 km/h fahren.

Verwenden Sie für Ihre Modellierung die rechts stehenden Daten der Hamburger Züge.
Dokumentieren und analysieren Sie Ihre Modellierung

(z.B. Skizze des Graphen, Beschreibung der Bewegung Zuordnung der Terme auf Situationen der Zugfahrt ...)

Haben Sie irgendwelche zusätzliche Annahmen gemacht, um Ihr Modell zu realisieren?

Welche Fahrtzeit ergibt sich in Ihrem Modell? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Fahrplan.

Ändern Sie Ihr Modell gegebenenfalls ab.

DT 4 **Technische Daten**

Motorleistung:	**8 x 125 KW**
Höchstgeschwindigkeit:	**80 km/h**
Anfahrtzeit	**0 – 80 km/h in 25 s**
Bremszeit	**80 – 0 km/h in 20 s**

Projektaufgabe 2 ·Logistisches Wachstum

Die reinen exponentiellen Wachstumsfunktionen sind für längere Zeiträume zumeist nicht geeignete Modelle, da z.B. die Beschränktheit des Lebensraumes und der Lebensmittel ein unbeschränktes exponentielles Wachstum gar nicht zulassen. Oft beobachtet man ein so genanntes „logistisches" Wachstum (diesen Namen wählte der belgische Mathematiker PIERRE-FRANCOIS VERHULST (1804 - 1849), wobei unbekannt ist, warum er den Namen gewählt hat. Man nennt dieses Wachstum nach seinem „Entdecker" auch Verhulst-Wachstum), das durch die Funktion w mit

$$w(x) = \frac{K}{1 + a \cdot e^{-\lambda \cdot K \cdot x}} \quad (x \geq 0)$$

Konstante: K > 0 und größer als w(0) *(K heißt Kapazität)*; a, λ > 0

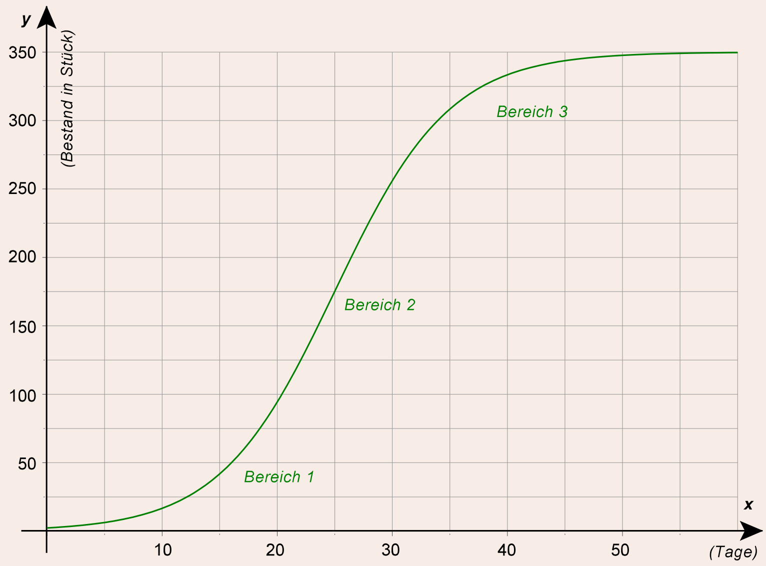
beschrieben wird.

a) Betrachten Sie zunächst ein Beispiel aus der Zoologie, nämlich das Wachstum einer Drosophila-Population:

Der Funktionsterm des logistischen Wachstums lautet hier $w(x) = \frac{350}{1 + 148e^{-0{,}2x}}$.

Welche konkreten Zahlenwerte haben jetzt die Konstanten K, a und λ?

Versuchen Sie, möglichst viele Eigenschaften des logistischen Wachstums zu erkennen (Graph, Zusammenhang mit Konstanten, ...). Siehe auch das zugehörige Applet.



b) Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung von w(x) folgende Beziehung gilt:

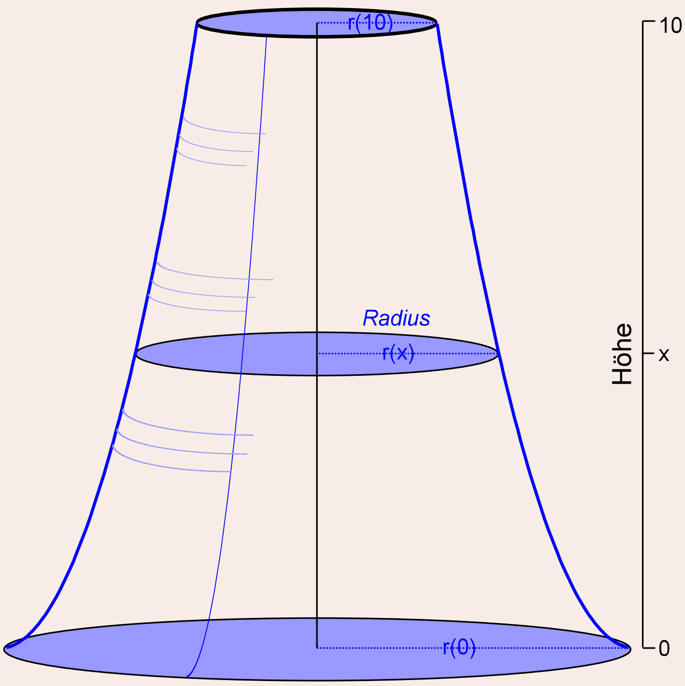
$$w'(x) = \lambda \cdot w(x) \cdot (K - w(x)).$$

Interpretieren Sie diese Gleichung im Wachstumsmodell.

Projektaufgabe 3 · Volumenberechnung

Versuchen Sie, das Volumen des abgebildeten Körpers zu berechnen.

- Die Grundfläche ist ein Kreis mit dem Radius 5.
- Die Höhe des Körpers ist 10 (Längeneinheiten).
- Jede dazu parallele Ebene hat als Schnittfläche mit dem Körper ebenfalls einen Kreis mit dem Radius r(x) (für $0 \le x \le 10$, in LE).
- Die Mittelpunkte aller Kreise liegen auf einer Senkrechten zur Grundfläche.
- Für den Radius gilt $r(x) = 5 - \sqrt{x}$.

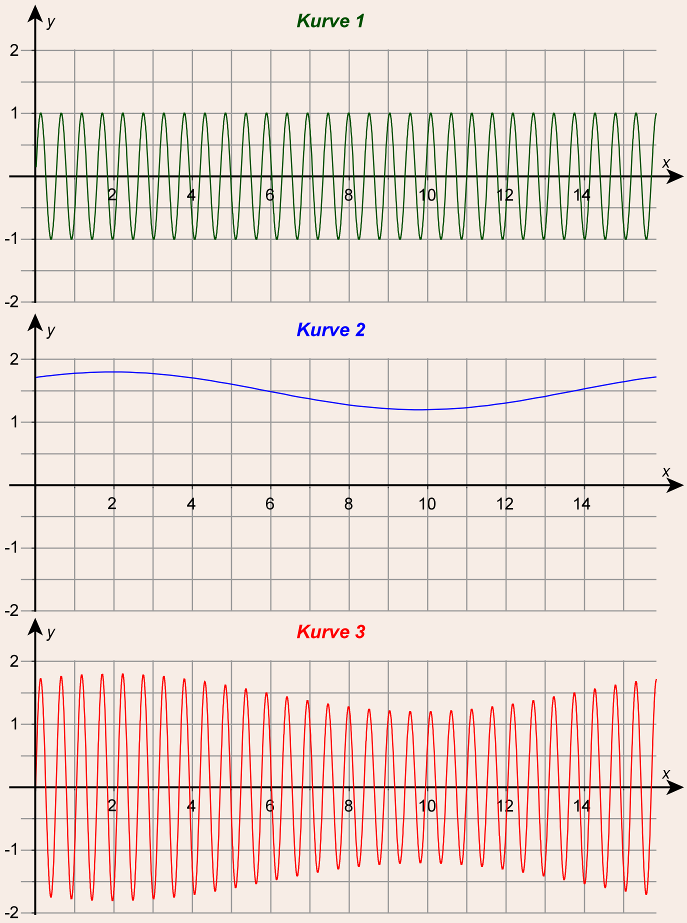


Entwickeln Sie an Hand des Beispiels eine allgemeinere Formel zur Volumenberechnung.

Projektaufgabe 4 ·Gezeiten

Für die gesamte Aufgabe können Sie Ihr Wissen über Eigenschaften der Sinus-Funktion verwenden, Methoden der Differenzialrechnung sind dann kaum nötig.

Die Deutsche Bucht als Teil der Nordsee unterliegt den Gezeiten. In einem regelmäßigen Rhythmus von gut 6 Stunden verändert sich die Wassertiefe abwechselnd zu einem Hochstand (Hochwasser) und einem Niedrigstand (Niedrigwasser). Es stellen sich also an jedem Tag etwa 2 Hoch- und 2 Niedrigwasser ein.
Hinzu kommt, dass sich im Laufe eines Monats in Abhängigkeit von den Mondphasen die Hoch- und Niedrigwasserstände ändern mit jeweils zwei Maximal- und zwei Minimalwerten. Zur „Springzeit“ und in zeitlicher Nähe (ca. ± 4 Tage) sind die Hochwasserstände besonders hoch und die Niedrigwasserstände besonders niedrig und zur „Nippzeit“ und in zeitlicher Nähe sind die Hochwasserstände relativ gering und die Niedrigwasserstände relativ hoch.



Nebenstehend sind drei Kurven abgebildet. Die y-Achsen zeigen an einem festen Ort (Hafen, z.B. Norderney) jeweils den Wasserstand (Pegel) in Metern bezogen auf den mittleren Wasserstand an, die x-Achse ist eine Zeitachse mit einer Einteilung in Tagen. Jeder Monat des Jahres wird mit 30 Tagen verrechnet.

a) Die Kurven 1 bis 3 haben folgende Funktionsgleichungen:

$$f(x) = \frac{3}{10} \cdot \sin\left(\frac{12}{30}x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}, \qquad g(x) = \sin(12x) \quad \text{und} \qquad h(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Entscheiden Sie, welche Kurve zu welcher Funktionsgleichung gehört.

Fortsetzung nächste Seite ➜

Seite 2 von Projektaufgabe 4 · Gezeiten

Die Funktion h modelliert grob die Gezeiten in dem betreffenden Hafen.
$x = 0$ markiert den Beginn eines Monats.

b) Bestimmen Sie innerhalb der ersten 7 Tage des Monats die genauen Zeitpunkte (in Tagen, Stunden und Minuten) und die zugehörigen Wasserstände zur Springzeit für das höchste Hochwasser und für das niedrigste Niedrigwasser.

Berechnen Sie dabei zunächst die Extremstellen der beiden Funktionen f und g im Intervall [0;7], um mit diesen Ergebnissen die Hoch- und Tiefpunkte der Gezeitenfunktion h zu bestimmen.

c) Durch die Gezeiten entstehen Strömungen, zum Beispiel in den engen Durchfahrten zwischen den ostfriesischen Inseln. Die Stärke dieser Wasserströmungen (die für die Schifffahrt wichtig ist) wird wesentlich auch davon bestimmt, wie stark das Wasser steigt oder fällt, mit anderen Worten durch die jeweiligen Änderungsraten des Wasserstandes. Deshalb sollen hier die absolut maximalen Änderungsraten des Wasserstandes und zugehörige Zeitpunkte bestimmt werden. Dazu müssten – nach üblichem Verfahren – Nullstellen der 2.Ableitung der Funktion h ermittelt werden, was aber – wenn man exakt rechnen will – relativ schwierig bzw. umständlich ist. Nun ändert sich aber die Funktion f im Vergleich zur Funktion g relativ wenig, so dass in der Nähe jedes Zeitpunktes x_0 der Wert $f(x_0)$ näherungsweise als konstanter Faktor auf g(x) wirkt.

Betrachten Sie deshalb zunächst vereinfachend Gezeitenfunktionen, bei denen Hoch- und Niedrigwasser jeweils immer den gleichen Wasserstand erreichen, bei denen also der Wasserstand zum Zeitpunkt x durch $k \cdot g(x)$ beschrieben wird mit einer Konstanten k ($k > 0$) und bestimmen Sie unter dieser Annahme die Stellen (Zeitpunkte), bei denen der Betrag der Änderungsrate des Wasserstandes maximal wird.

Bestimmen Sie nun unter diesen vielen Zeitpunkten die beiden, die benachbart zum ersten Springzeitpunkt sind, und begründen Sie, dass die dem Betrage nach absolut höchsten Änderungsraten ziemlich genau hier zu erwarten sind. Bestimmen Sie deshalb diese beiden Änderungsraten und rechnen Sie das Ergebnis auch in die Einheit cm/min um.

d) Die Funktion f ist vom Typ $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$.
Beschreiben Sie die mathematische Bedeutung der Variablen a, b, c und d und interpretieren Sie im Kontext der Gezeitenfunktion h die dafür gewählten Zahlen

$\frac{3}{10}$ für a, $\frac{12}{30}$ für b, $\frac{\pi}{4}$ für c, $\frac{3}{2}$ für d.

e) Auf Java verhalten sich die Gezeiten aufgrund der geographischen Gegebenheiten und damit verbundenen Wellenüberlagerungen völlig anders. Hier treten eintägige Gezeiten auf, das heißt, dass im Laufe eines Tages lediglich ein Hochwasser und ein Niedrigwasser verzeichnet werden. Das maximale Hochwasser beträgt 0,60 m und das minimale 0,40 m. Am ersten Tag des betrachteten Monats findet das niedrigste Hochwasser statt.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, die diese Gezeitenkurve wiedergibt.

Zentralabitur, Hamburg 2006