G3

Der ZUFALL

steht

MO
DELL

Lernheft

G3

Der ZUFALL steht MODELL

Lernheft

Kompetenzen

- Sie erläutern die Bedeutung des Begriffs „Zufall“ in der Umgangssprache und die historische Entwicklung des Begriffs „Wahrscheinlichkeit“ und der Wahrscheinlichkeitstheorie
- Sie berechnen z.B. bei Aktienkursen Vorhersagen für den Kurs in einem begrenzten Vorhersagezeitraum und wissen um die Abhängigkeit der Vorhersagequalität von der Anzahl der Daten
- Sie erkennen und beschreiben bei empirischen Phänomenen annähernd normalverteilte Daten
- Sie berechnen bei empirischen normalverteilten und bei binomialverteilten Daten Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung und erläutern deren Bedeutung z.B. mit Hilfe der σ-Regeln
- Sie kennen den Random Walk als Modell zur Vorhersage vom Zufall bestimmter Phänomene
- Sie kennen die Bernoulli-Kette als Modell für ein Zufallsexperiment, das aus einer Folge gleicher Experimente mit nur zwei möglichen Ergebnissen zusammengesetzt ist, und die Binomialverteilung als zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Sie wissen um die Bedeutung der Unabhängigkeit für die Entwicklung stochastischer Modelle
- Sie vergleichen Zufallsexperimente mit Hilfe von Zufallsgrößen

Autoren: Dr. Martina Döhrmann
Winfried Euba

Version 1.0 vom 23. September 2005

Inhalt

Worum geht's eigentlich?

In der Sicht auf „zufällig" ablaufende Vorgänge werden „Muster" erkannt, um in gewisser Weise den Zufall modellieren und damit prognostizieren zu können. Ein solches Vorgehen wird hier am Beispiel von Aktienkursen betrachtet.

1. Zufall und Aktien

Was ist Zufall?

Der Begriff „Zufall" wird in der Umgangssprache häufig benutzt und führt dort auch selten zu Missverständnissen. Betrachtet man ihn und seine Verwendungsmöglichkeiten jedoch näher, so stellt man fest, wie vielfältig und schwer zu fassen er doch ist.
Bezeichnet man in der Umgangssprache ein Ereignis als zufällig, dann verwendet man den Begriff meistens im Sinne von unvorhergesehen, unerwartet u.ä..
Manchmal soll die Verwendung des Begriffes aber auch ausdrücken,

- dass man ein Ereignis für höchst unwahrscheinlich hält,
- dass das bestreffende Ereignis eines von vielen möglichen ist, die alle die gleiche Chance haben einzutreten,
- dass man ein Ereignis für unbeeinflussbar hält,
- dass etwas ohne Grund geschieht
- oder dass etwas keinerlei Regelmäßigkeiten aufweist.

Die Entscheidung, ob ein Ereignis als zufällig oder nicht zufällig bewertet wird, ist in vielen Fällen strittig und kann von grundsätzlichen und beispielgebundenen Faktoren abhängen. Einige Menschen sind z.B. der Ansicht, dass es überhaupt keinen Zufall gibt, sondern alle Ereignisse im Leben Schicksal oder auch Gottes Wille sind. Sie lehnen also die Bezeichnung eines Ereignisses als zufällig grundsätzlich ab.
Für zwei Personen, die über einen unterschiedlichen Wissensstand verfügen, kann das gleiche Ereignis als zufällig und nicht zufällig beschrieben werden. Ein plötzlicher Regenguss kann z.B. vom einen als zufällig und vom anderen, der durch die Wettervorhersage vorgewarnt wurde, als nicht zufällig empfunden werden.

Ob ein Ereignis als *zufällig* empfunden wird,
hängt z.B. vom Wissensstand ab.

Eine weitere Rolle für die Beurteilung eines Ereignisses als zufällig spielt auch die Frage ob man zufällig im Sinne von praktisch / subjektiv unvorhersagbar oder prinzipiell unvorhersagbar benutzt. Das Ergebnis eines Würfelwurfes ist praktisch nicht vorhersagbar, könnte aber theoretisch mit den Gesetzen der Mechanik, bei genauer Kenntnis der Anfangsbedingungen, berechnet werden.

Sind Aktienkurse zufällig?

Ein Aktienkurs ist der Preis, zu dem eine Aktie zu einem bestimmten Zeitpunkt gehandelt wird. Er wird bestimmt durch Angebot und Nachfrage, das heißt, Käufer und Verkäufer handeln ihn aus.
Wie viel Geld ein einzelner potentieller Käufer für eine Aktie zu zahlen bereit ist, hängt von vielen Faktoren ab (allgemeine Wirtschaftslage, erwartete Wertsteigerung, Gemütslage ...).
Niemand kann exakt den Kurs vorhersagen, den eine Aktie morgen oder in zwei Wochen haben wird. Aus diesem Grunde kann man Aktienkurse als zufällig bezeichnen. Zufällig im Sinne von unvorhersagbar, wie das Ergebnis eines Würfelwurfes. Diese Charakterisierung schließt nicht aus, dass man Prognosen über zukünftige Kurse erstellen kann.

alles zufällig?

Ebenso kann man Aktienkurse als nicht zufällig bezeichnen, wenn „zufällig" im Sinne von „unbeeinflussbar" oder auch „undeterminiert" verstanden wird. Aktienkurse können durchaus beeinflusst werden und hängen von vielen Faktoren ab.

Vorhersagen über zukünftige Aktienkursentwicklungen

Obwohl Aktienkurse im Detail unvorhersagbar sind, gibt es eine Vielzahl von Methoden, um Prognosen für einen möglichen Kursverlauf zu erstellen (astrologische, psychologische, technische, betriebswirtschaftliche,...). Diese Prognosen liefern keine exakten Werte, sondern in der Regel Intervalle, in denen sich der zukünftige Kurs vermutlich bewegen wird.

Prognosen liefern in der Regel **Intervalle**

Wie gut oder schlecht diese Methoden sind, kann daran gemessen werden, ob die in der Vergangenheit gestellten Prognosen eingetroffen sind.

Es gibt für die Analyse und Prognose von Aktienkursen nicht eine einzige richtige Methode, sondern viele Methoden, deren Prognosen vielleicht häufiger oder seltener zutreffen. Jeder Anleger muss für sich entscheiden, welcher Methode er am meisten vertraut und diese auswählen (oder auch mehrere Methoden kombiniert anwenden).

2. Prognosemöglichkeiten für den Aktienkurs von morgen

Was ist eine Technische Aktienanalyse und wie wird sie angewendet?

Eine mögliche Form der Aktienanalyse ist die Technische Analyse. Sie untersucht die zurückliegenden Kursdaten einer Aktie anhand verschiedener Analysemethoden und erstellt daraus Prognosen für die Zukunft.

Wie entsteht ein Prognoseintervall?

Für den Kurs von morgen wird also z.B. ein Intervall

$$[K_{heute} - G_1; K_{heute} + G_2]$$

prognostiziert, wobei die Werte G_1 und G_2 aus den Daten der Vergangenheit bestimmt werden.

Ziel dabei ist es, ein möglichst kleines Intervall anzugeben, in dem der morgige Kurs mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit liegen wird.

Bestimmung eines min/max-Intervalls als Prognose für den morgigen Aktienkurs

Eine Möglichkeit G_1 und G_2 zu bestimmen besteht darin, die täglichen Kurssprünge der zurückliegenden Daten zu berechnen und zu prognostizieren, dass der Kurssprung von heute auf morgen vermutlich nicht größer sein wird als der größte positive bzw. negative Kurssprung der Tage zuvor. Damit ergibt sich das Prognoseintervall für den Kurs von morgen:

$$[K_{heute} + \min(K_n - K_{n-1}); K_{heute} + \max(K_n - K_{n-1})].$$

Ein auf diese Weise erstelltes Prognoseintervall wird im Folgenden als min/max-Intervall bezeichnet.

Die Anzahl n der untersuchten Kurse sollte möglichst groß sein, um die Treffsicherheit der Prognose zu erhöhen.

Schätzen einer Wahrscheinlichkeit für den morgigen Kursanstieg

Aus den Kursdaten der Vergangenheit kann auch eine Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden, dass ein Kurs von heute auf morgen steigt. Dazu wird die Anzahl der positiven 1-Tages-Differenzen des Datensatzes gezählt und durch die Anzahl aller 1-Tages-Differenzen geteilt. Man erhält so die relative Häufigkeit der positiven 1-Tages-Differenzen. Dieser Wert kann als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit eines Kursanstieges verwendet werden.

statistische Wahrscheinlichkeit

Wird eine Wahrscheinlichkeit über die relative Häufigkeit eines Ereignisses geschätzt, so bezeichnet man sie auch als **statistische Wahrscheinlichkeit.**

3. 95%-Intervall als Prognose für den morgigen Kurs

Kann man ein Intervall schätzen, in dem der Kurs von morgen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegen wird?

Aus den zurückliegenden Kursdaten einer Aktie ist es möglich ein Intervall $[g_1,g_2]$ zu bestimmen, in dem 95% der 1-Tages-Differenzen dieser Kursdaten lagen. Dieses Intervall kann z.B. aus den vorliegenden Daten einfach ausgezählt werden. Dann beträgt die relative Häufigkeit des Ereignisses „Eine 1-Tages-Differenz liegt im Intervall $[g_1,g_2]$“ 95%.
Verwendet man die relative Häufigkeit als Schätzwert für eine Wahrscheinlichkeit, so kann man folgern:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis „Eine 1-Tages-Differenz liegt im Intervall $[g_1,g_2]$“ eintrifft, beträgt 95%.
Somit kann man auch annehmen, dass eine zukünftige 1-Tages-Differenz, also z.B. der Kurssprung von heute auf morgen, mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% in diesem Intervall liegt.
Daraus ergibt sich als Intervall, in dem der morgige Kurs mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt:

$$[K_{heute} + g_1; K_{heute} + g_2].$$

Solch ein Prognoseintervall wird im folgenden als 95%-Intervall bezeichnet.

Sind die 1-Tages-Differenzen gleichverteilt?

Die durchgeführten Untersuchungen haben ergeben, dass die 1-Tages-Differenzen nicht auf dem min/max-Intervall gleichverteilt sind.
Als gleichverteilt würde man sie bezeichnen, wenn bei einer Aufteilung des min/max-Intervalls in j gleich große Teilintervalle Ti (i = 1, ..., j), die relative Häufigkeit des Ereignisses „Eine 1-Tages-Differenz liegt im Teilintervall Ti“ für alle j Teilintervalle annähernd gleich wäre.
Wenn die 1-Tages-Differenzen gleichverteilt wären, dann könnte man ein Intervall, in dem 95% der 1-Tages-Differenzen liegen, berechnen durch:

$$[0{,}975 \cdot \min(K_n - K_{n-1});\ 0{,}975 \cdot \max(K_n - K_{n-1})].$$

Dieses Intervall entspricht 95% des min/max-Intervalls. Die empirisch ermittelten Grenzen g_1 und g_2 stimmen jedoch nicht mit den Grenzen dieses Intervalls überein.

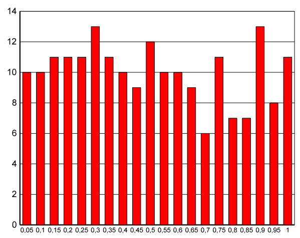


Abbildung 2 *Häufigkeitsverteilung in Form eines Stabdiagramms für eine annähernd gleichverteilte Größe.*

Wie sind die 1-Tages-Differenzen verteilt?

Um diese Frage zu beantworten, kann eine Häufigkeitsverteilung erstellt werden: Man teilt das min/max-Intervall in j gleich große Teilintervalle T_i auf und berechnet aus den vorliegenden Daten die relative Häufigkeit der Ereignisse „Eine 1-Tages-Differenz liegt im Teilintervall T_i“ für alle T_i mit i = 1, ..., j.
Die Ergebnisse lassen sich am übersichtlichsten in einem Stabdiagramm darstellen. Abbildung 2 zeigt die Häufigkeitsverteilung einer annähernd gleichverteilten Größe, Abbildung 3 die Häufigkeitsverteilung der 1-Tages-Differenzen der Aktie Adidas vom 6. August 2004 bis zum 20. Mai 2005.
Abbildung 3 zeigt, dass die relative Häufigkeit für eine 1-Tages-Differenz in einem Teilintervall nahe der Grenzen des Gesamtintervalls sehr viel kleiner ist als für ein Teilintervall nahe der Mitte des Gesamtintervalls, wenn man die beiden Ausreißer nicht mitzählt. Sehr kleine Kurssprünge (nahe des Mittelwertes 0,11) kommen demnach sehr viel häufiger vor als sehr große („groß“ in Bezug auf den Betragswert).
In Abbildung 4 wurde über die Stabenden aus Abbildung 4 eine Kurve gelegt. Diese Kurve hat annähernd die Form einer Glockenkurve, auch **Gauß-Kurve** genannt.

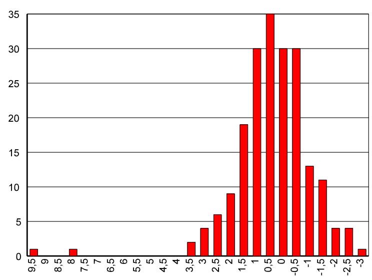


Abbildung 3 *Häufigkeitsverteilung für die 1-Tages-Differenzen der Aktie Adidas vom 06.08.04 bis 20.05.05.*

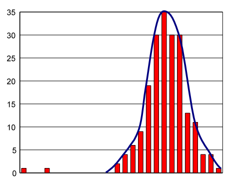


Abbildung 4

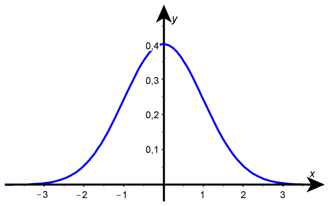


Abbildung 5 *Gaußsche Glockenkurve*

Die Gauß-Kurve (Abb. 5) und die dazugehörige **Gauß-Funktion** φ

$$\varphi: x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

wurden benannt nach dem Mathematiker CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855).

Wenn eine Häufigkeitsverteilung einer Größe / eines Merkmals annähernd diese Form aufweist, dann spricht man davon, dass sie / es annähernd **normalverteilt** ist.

Unterscheiden sich die Häufigkeitsverteilungen der 1-Tages-Differenzen verschiedener Aktien?

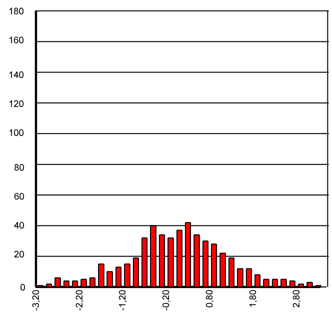
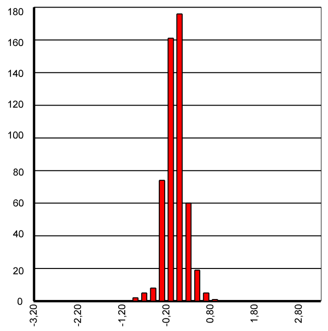


Abbildung 6 *Aktie Adidas*

Abbildung 7 *Aktie Infineon*


Untersucht man die 1-Tages-Differenzen der Aktien des gegebenen Datensatzes, so kann man für alle Aktien bei ausreichender Datenzahl eine annähernde Normalverteilung der 1-Tages-Differenzen feststellen.
Abbildung 6 zeigt eine Häufigkeitsverteilung für die 1-Tages-Differenzen der Aktie Adidas, Abbildung 7 für die Aktie Infineon, beide über dem gleichen Gesamtintervall erstellt. Die Skalierung der y-Achse ist bei beiden Diagrammen gleich, um sie miteinander vergleichen zu können. Die Unterschiede in den Verteilungen lassen sich durch folgende Merkmale beschreiben:

- **min($K_n - K_{n-1}$) und max($K_n - K_{n-1}$)**
  Die Werte min($Kn - K_{n-1}$) und max($K_n - K_{n-1}$) der 1-Tages-Differenzen der Aktie Adidas sind höher als bei der Aktie Infineon. Bei der Aktie Adidas sind die 1-Tages-Differenzen also auf einem größeren Gesamtintervall verteilt.

- **Mittelwert**
  Der Mittelwert der 1-Tages-Differenzen der Aktie Adidas beträgt -0,1136, für die Aktie Infineon 0,0016. Diese relativ geringen Abweichungen machen sich in der graphischen Darstellung nicht bemerkbar. Bei Aktien liegt der Mittelwert der 1-Tages-Differenzen in der Regel nahe bei Null. Für einen Anleger sind diese geringen Abweichungen jedoch schon von Bedeutung. Ein negativer Mittelwert beschreibt das Fallen des Kurses im Beobachtungszeitraum und dass bei einem Verkauf im Beobachtungszeitraum das Risiko eines Verlustes relativ hoch gewesen wäre.

- **Varianz und Standardabweichung**
  Die 1-Tages-Differenzen der Aktie Allianz streuen insgesamt stärker um ihren Mittelwert. Diese Streuung kann durch die (empirische) Varianz bzw. Standardabweichung beschrieben werden. Die Varianz V von N 1-Tages-Differenzen mit dem Mittelwert μ kann berechnet werden durch:

  $$V = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} (X_n - \mu)^2$$

  die Standardabweichung σ durch: $\sigma = \sqrt{V}$

In der Finanzmathematik dient die Standardabweichung auch als Maß für die **Risikoabschätzung**. Je höher die Standardabweichung der 1-Tages-Differenzen ist, desto stärkere Kursschwankungen treten auf und damit ist das Risiko für einen großen Verlust auch höher.

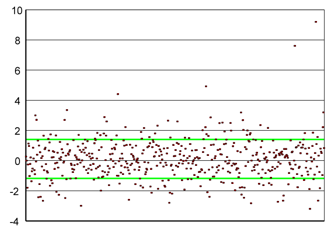
2. Verfahren für die Bestimmung eines 95%-Intervalls

Da die 1-Tages-Differenzen annähernd normalverteilt sind, kann ein 95%-Intervall auch durch ein weiteres Verfahren bestimmt werden. Für eine normalverteilte Größe gelten nämlich die

σ-Regeln:
Ist die Anzahl der beobachteten Werte ausreichend groß, so liegen

rund	68% der Werte im Intervall [$\mu-\sigma$; $\mu+\sigma$]
rund	95% der Werte im Intervall [$\mu-2\sigma$; $\mu+2\sigma$]
mehr als	99% der Werte im Intervall [$\mu-3\sigma$; $\mu+3\sigma$].

Aktie Adidas · 1-Tages-Differenzen, in grün die Grenzen von [$\mu-\sigma$; $\mu+\sigma$]



Diese Regeln lassen sich mit Hilfe der Gauß-Funktion herleiten. Für die annähernd normalverteilten 1-Tages-Differenzen kann somit ein 95%-Intervall durch die Berechnung des Intervalls [$\mu-2\sigma$; $\mu+2\sigma$] bestimmt werden. Ein Vergleich des Intervalls [$\mu-2\sigma$; $\mu+2\sigma$] mit dem Intervall [g_1; g_2], das durch Auszählung ermittelt wurde, zeigt in der Regel für Aktienkurse, dass beide Verfahren relativ ähnliche Werte liefern.

4. Entwicklung eines Modells für die Kursbewegung einer Aktie

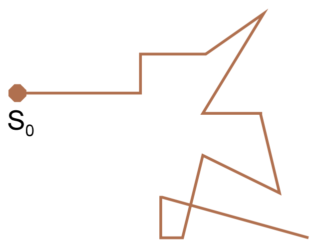
Möglichkeiten zur Bestimmung eines Prognoseintervalls für den Kurs in 2 Wochen

Es sind unter anderem folgende Möglichkeiten zur Bestimmung eines Prognoseintervalls für den Kurs in 2 Wochen denkbar:

- Das Prognoseintervall kann auf die gleiche Weise bestimmt werden wie für den morgigen Kurs. Statt der 1-Tages-Differenzen werden einfach 10-Tages-Differenzen[1] berechnet und dann ebenfalls ein min/max -Intervall bzw. ein 95%-Intervall ausgezählt.
- Das Prognoseintervall kann aus den 1-Tages-Differenzen der Aktie geschätzt werden.

Was ist ein Random Walk?

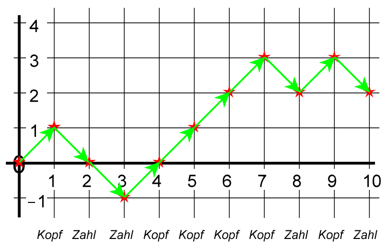
Ein **Random Walk**, im Deutschen auch Zufallspfad genannt, ist ein schrittweise erzeugter Pfad, bei dem die Richtungsauswahl bei jedem Schritt zufällig (im Sinne von willkürlich und unabhängig von der Richtung der vorherigen Schritte) erfolgt.
Nebenstehende Abbildung zeigt einen auf diese Weise entstandenen Pfad, der im Punkt S_0 begonnen wurde.



Betrachtet man einen eindimensionalen Pfad, also eine Bewegung auf einer Geraden, bei der ein Schritt nur in zwei Richtungen erfolgen kann, so kann die Position S_i des Pfades nach i Schritten kann durch folgendes Modell beschrieben werden:

$$S_i = S_{i-1} + Z_i.$$

Z_i (i = 1,...,n) ist eine Variable, durch die bei jedem Schritt die Länge des Schrittes und seine Richtung beschrieben wird. Die Richtung kann durch das Vorzeichen von Z_i und die Schrittlänge durch den Betragswert von Z_i ausgedrückt werden.
Z_i ist eine **Zufallsvariable**, das heißt, Z_i nimmt einen Wert aus einer zuvor festgelegten Menge zufällig im Sinne von willkürlich an. Welchen Wert ein Z_i annimmt, ist unabhängig von der Wahl des/der Vorgänger/s oder Nachfolger/s. Außerdem besitzen alle Z_i die gleiche Häufigkeitsverteilung.
Die Werte von Z_i (i = 1,...,n) werden als Zuwächse bezeichnet.



Beispiel für einen Zufallspfad mit $Z_i \in \{-1;+1\}$ und $P(Z_i = -1) = P(Z_i = +1) = ½$

[1] 10 Börsentage entsprechen 2 Wochen, da an den Wochenenden kein Kurs notiert wird.

Der Random Walk als Modell für eine Aktienkursentwicklung

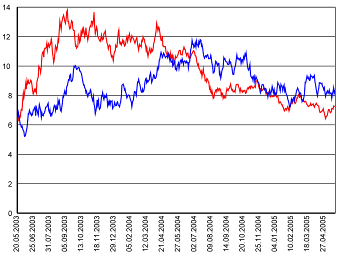


Abbildung 11 Welches ist der echte Aktienchart, welches der simulierte?

Bei Aktienkursen geht man meistens intuitiv davon aus, dass die Kurssprünge nicht unabhängig voneinander sind, sondern irgendwie miteinander in Beziehung stehen, dass ein Kurssprung oder mehrere das weitere Kaufverhalten beeinflussen.
Die Ähnlichkeit eines Random Walks mit normalverteilten Zuwächsen und einem Aktienchart stellt diese Annahme in Frage (vgl. Abb. 11).

Diese Ähnlichkeit veranlasste bereits 1900 Louis Bachelier ein Random Walk Modell für Aktienkurse vorzuschlagen. Aber erst Ende der 50-er Jahre wurde diese Idee wieder aufgegriffen.
Mit Hilfe eines 1-dimensionalen Random Walk kann der Aktienkurs von morgen auf folgende Weise modelliert werden:

$$K_{morgen} = K_{heute} + X_i$$

Für die Zuwächsen X_i gilt: Sie sind alle normalverteilte Zufallsvariablen, die willkürlich gewählt werden und voneinander unabhängig sind.

Anwendung des Random Walk Modells bei der Optionspreisbewertung

Prognosen über zukünftige Aktienkursverläufe, die mit Hilfe des Random Walk Modells aufgestellt wurden, werden in der Börsenpraxis vor allem zur Preisbewertung von Optionen genutzt.
Eine Option auf eine Aktie zu kaufen bedeutet, das Anrecht zu erwerben nach einem bestimmten Zeitraum eine Aktie zu einem vorher festgelegten Preis kaufen zu können (oder auch verkaufen zu können).
Käufer und Verkäufer schließen dazu einen Vertrag ab. Darin wird vereinbart, ob es sich um eine Call-Option (Käufer der Option möchte Aktie kaufen) oder eine Put-Option (Käufer der Option möchte Aktie verkaufen) handelt, zu welchem Ausübungstermin (oder auch in welcher Ausübungsfrist) der Kauf / Verkauf stattfinden soll und zu welchem Ausübungspreis.
Hat der Käufer der Option z.B. eine Call-Option gekauft und der tatsächliche Kurs der Aktie liegt zum Ausübungstermin über dem vereinbarten Ausübungspreis, so kann der Käufer durch den günstigen Kauf der Aktie und evtl. teuren Weiterverkauf einen Gewinn erzielen.
Liegt der tatsächliche Kurs der Aktie unter dem vereinbarten Ausübungspreis, so kann der Käufer der Option sein Anrecht verfallen lassen und braucht die Aktie nicht zu kaufen.
Mit einer Option sichert sich der Käufer also gegen mögliche Verluste durch einen Wertverlust der Aktie ab. Das Risiko trägt der Verkäufer der Option. Dieser verlangt deshalb einen gewissen Preis für die Option, der sein Risiko einigermaßen abdeckt. Wie hoch muss dieser Preis angesetzt werden, damit er für Käufer und Verkäufer fair ist?
Um diesen fairen Preis bestimmen zu können, muss man Prognosen machen können, in welchem Intervall sich der Kurs zum Ausübungszeitpunkt ungefähr befinden wird. Dies kann mit Hilfe der Aussagen des Random Walk Modells geschehen.

Eine normalverteilte Zufallsvariable wird **standardnormalverteilt** genannt, wenn ihr Mittelwert 0 und ihre Standardabweichung/Varianz 1 beträgt.

Zufallszahlen sind willkürlich ausgewählte Zahlen, die voneinander unabhängig sind.

1-Tages-Rendite =

$$\frac{K_n - K_{n-1}}{K_{n-1}} = \frac{1\text{-Tages-Differenz}}{K_{n-1}}$$

Im Jahre 1997 wurden die amerikanischen Wissenschaftler Myron S. Scholes und Robert C. Merton für ihre bahnbrechenden Erforschungen von Finanzmarktinstrumenten mit dem Nobelpreis für Ökonomie ausgezeichnet. Scholes hatte 1973 gemeinsam mit Fischer Black, der 1995 verstorben ist, eine Formel zur Bewertung von Aktienoptionen entwickelt. Diese Formel wurde nach ihnen Black-Scholes-Formel genannt und findet seitdem vielfach Anwendung. Die Formel enthält als entscheidende Elemente standardnormalverteilte Zufallszahlen und den Mittelwert sowie die Standardabweichung der 1-Tages-Renditen der zurückliegenden Kurswerte der entsprechenden Aktie. Auch hier wird also davon ausgegangen, dass der zukünftige

Kurs einer Aktie anhand von normalverteilten, unabhängigen und willkürlich ausgewählten Zufallsvariablen modelliert werden kann.

5. Untersuchung des Random Walk Modells

Vom Random Walk zur Binomialverteilung

Ein Schritt im Random Walk basiert auf einem Experiment mit zwei möglichen Ergebnissen, z.B. dem Münzwurf, dessen Ergebnisse „Kopf" oder „Zahl" in −1 bzw. +1 umgewandelt werden, um die Darstellung im Koordinatensystem zu erleichtern.

Ein Experiment mit zwei möglichen Ergebnissen heißt **Bernoulli-Experiment**.
Wird das Experiment mehrmals hintereinander durchgeführt und beeinflusst das Ergebnis eines Versuchs nicht das Ergebnis des nachfolgenden, so spricht man von einer **Bernoulli-Kette**.
Das alles trifft auf das Grundmodell des Random Walk zu.

Benannt nach
JAKOB BERNOULLI (1654 − 1705)
Schweizer Mathematiker

Eines der beiden möglichen Ergebnisse des Experiments in einer Bernoulli-Kette wird üblicherweise mit *Treffer* bezeichnet.
Dessen Wahrscheinlichkeit ist beim Münzwurf $\frac{1}{2}$.

Wird das Ergebnis eines Experiments z.B. mit einem Würfel herbeigeführt, so könnte die Augenzahl 6 als *Treffer* gelten, alle übrigen als Niete. Dann wäre die *Treffer* -Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.

Bei der Bernoulli-Kette interessiert die

- Kettenlänge n
- Treffer-Wahrscheinlichkeit p
- Anzahl der Treffer k

B(n ; p ; k) = *Wahrscheinlichkeit für k Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p*

BEISPIEL:

Ein Random Walk mit 10 Schritten weist 4 Treffer auf, er endet also in dem Punkt (10|−2).
Wie wahrscheinlich ist das bei einer Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,5?

Möglichkeiten:

Der 1. Treffer kann in jedem der 10 Schritte sein, der 2. Treffer in den restlichen 9 Schritten usw., es gibt 10 · 9 · 8 · 7 Möglichkeiten der Anordnung für die Treffer, falls diese unterscheidbar wären.

Die Treffer sind aber nicht unterscheidbar, daher muss durch die Anzahl der möglichen Anordnungen der 4 Treffer untereinander dividiert werden, also durch 4 · 3 · 2 · 1 = 4! *(4 Fakultät)*

Insgesamt $\binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210$ Möglichkeiten.

$\Rightarrow B(10\,;0{,}5\,;4) = 210 \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^6 \approx 0{,}205$

Gäbe es nur eine Möglichkeit, in einer Kette der Länge n genau k Treffer zu erzielen, so wäre die Wahrscheinlichkeit dafür

$$p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

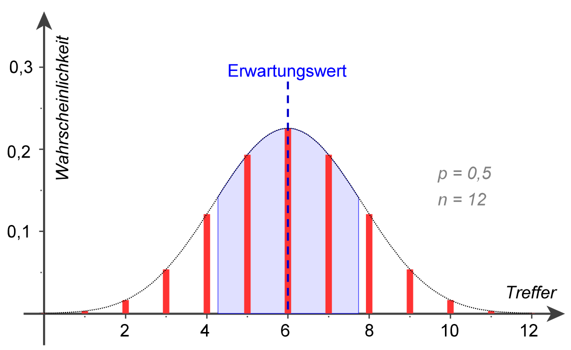
Dieses Produkt ist also noch mit der Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten für k Treffer zu multiplizieren. Und die berechnet sich mit dem **Binomialkoeffizienten**:

$$B(n\,;p\,;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ wird gesprochen *n über k*.

Mit der Wahrscheinlichkeit B(n ; p; k) für k Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n wird die **Binomial-Verteilung** definiert, die Ähnlichkeiten zur Normalverteilung aufweist.

Siehe dazu die Übungsaufgaben und Seite 9.



Begriffe und Formeln

Normalverteilung

Häufig hört man davon, dass ein bestimmtes Merkmal, eine Größe etc. normalverteilt sei. Gemeint ist damit in der Regel, dass eine zugehörige Häufigkeitsverteilung bei einer ausreichend großen Zahl von Daten durch die Gauß-Funktion φ angenähert werden kann.

Mittelwert μ = 0, Standardabweichung σ = 1 „Standard-Normalverteilung"

$$\varphi: x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Mit beliebigem μ und σ:

$$\varphi_{\mu,\sigma}: x \longrightarrow \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Mittelwert

μ = x-Koordinate der Symmetrieachse
bei endlich vielen Daten (Aktienkursen) arithmetisches Mittel

Standardabweichung

$\sigma = \sqrt{V}$ ist ein Maß für die Streuung

wobei für die Varianz V gilt $V = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} (X_n - \mu)^2$.

N ist dabei die Anzahl aller betrachteten Werte und X_n durchläuft jeweils alle diese Werte.

σ-Regeln

Für eine normalverteilte Größe gelten die **σ-Regeln**:
Ist die Anzahl der beobachteten Werte ausreichend groß, so liegen
rund 68% der Werte im Intervall [μ – σ ; μ + σ]
rund 95% der Werte im Intervall [μ – 2σ ; μ + 2σ]
mehr als 99% der Werte im Intervall [μ – 3σ ; μ + 3σ].

Summierte (kumulative) Normalverteilung

Das Aufsummieren der Normalverteilung geschieht über das Integrieren.
Die zugehörige Funktion wird mit dem großen griechischen Buchstaben Φ (phi) bezeichnet:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt.$$

Das kleine φ unter dem Integral steht für die Gauß-Funktion (s.o.).
Für eine normalverteilte Zufallsgröße X mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ gilt

$$P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Random Walk

(auch Zufallspfad genannt) ist in der Mathematik ein schrittweise erzeugter Pfad, bei dem die Richtung und gegebenenfalls die Länge jeden Schrittes *zufällig* gewählt wird.
Betrachtet man einen eindimensionalen Pfad, also eine Bewegung auf einer Geraden, bei der ein Schritt nur in zwei Richtungen erfolgen kann, so kann die Position S_i des Pfades nach i Schritten kann durch folgendes Modell beschrieben werden:

z.B. bei der Simulation von Aktienkursen: Kurs kann steigen oder fallen (Vorzeichen) um einen bestimmten Wert (Betrag)

$$S_i = S_{i-1} + Z_i.$$

Z_i (i = 1,...,n) ist eine Variable, durch die bei jedem Schritt die Länge des Schrittes und seine Richtung beschrieben wird. Die Richtung kann durch das Vorzeichen von Z_i und die Schrittlänge durch den Betragswert von Z_i ausgedrückt werden.
Welchen Wert ein Z_i annimmt, ist unabhängig von der Wahl des/der Vorgänger/s oder Nachfolger/s

Bei 1-Tages-Differenzen normalverteilt

Außerdem besitzen alle Z_i die gleiche Häufigkeitsverteilung.
Die Werte von Z_i (i = 1,...,n) werden als Zuwächse bezeichnet.

Zufallsvariable

dient der einfacheren Beschreibung von Zufallsexperimenten.
Eine Zufallsvariable Z nimmt einen Wert aus einer zuvor festgelegten Menge zufällig – im Sinne von willkürlich – an.

Beim Random Walk, der mit einem Münzwurf erzeugt wird, gibt es nur zwei mögliche Ergebnisse, die z.B. mit −1 und +1 beschrieben werden können.
Es ist daher $Z \in \{-1;+1\}$ und $P(Z = -1) = P(Z = +1) = ½$.

Binomialverteilung

Bernoulli-Experiment

Ein Experiment, bei dem genau zwei verschiedene Ergebnisse möglich sind, heißt Bernoulli-Experiment.

Bernoulli-Kette

Führt man das Experiment mehrmals hintereinander durch – unbeeinflusst durch das vorhergehende Ergebnis, so spricht man von einer Bernoulli-Kette.
Mit
n = Anzahl der Versuche (Kettenlänge),
p = Trefferwahrscheinlichkeit (und q = 1 − p),
k = Anzahl der Treffer

$\binom{n}{k}$ heißt **Binomialkoeffizient**

ist $$B(n;p;k) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot\ 1}\cdot p^k\cdot q^{n-k} = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$
die Wahrscheinlichkeit, in einer Bernoulli-Kette der Länge n und mit der Trefferwahrscheinlichkeit p genau k Treffer zu erzielen.

Damit die Formel für alle $k \in IN$ mit $k \le n$ verwendbar ist, definiert man für k = 0: $\binom{n}{0} = 1$. Denn bei 0 Treffern hat man genau eine Möglichkeit, diese zu „platzieren".

Eine Zufallsgröße X heißt **binomialverteilt** mit den Parametern n und p, wenn für k = 0,1,...,n gilt:
$$\mathbf{P(X = k) = B(n;p;k)}$$

Erwartungswert

Diese Zahl $\mu = n \cdot p$ heißt Erwartungswert.
Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X schreibt man auch $E(X) = \mu = n \cdot p$.
Dabei deutet der griechische Buchstabe μ wieder an, dass der Erwartungswert eine Art Mittelwert ist, jedoch bei der Binomialverteilung nicht das arithmetische Mittel wie bei der Normalverteilung.

Standardabweichung

Für die Varianz gilt $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot q$, für die Standardabweichung daher $\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q}$

Summierte Binomialverteilung mit Hilfe der Normalverteilung berechnen

Die Binomialverteilung kann unter bestimmten Voraussetzungen durch die Normalverteilung angenähert werden. Der Vorteil ist, dass dazu eine Tabelle ausreicht, da diese Annäherung mit der Standardnormalverteilung erreicht wird:
Sei X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ.
Dann ist
$$P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$$

Die Formel liefert brauchbare Werte für $\mathbf{n > \frac{1}{4\cdot p^2\cdot(1-p)^2}}$.
Ist $\sigma^2 > 9$, so kann in den beiden Argumenten von Φ jeweils 0,5 entfallen.

Rückschau

G3 · Der Zufall steht Modell

Überblick-Grafik

Versuchen Sie, einen Überblick über die Inhalte dieses Themenbereichs zu gewinnen. Überlegen Sie dabei auch, was Ihnen dabei wichtig erschien.

Stellen Sie das nach Ihrer Meinung Zentrale in nebenstehendem Kasten dar und verwenden Sie dazu graphische Elemente (z.B. Mind Map, Concept Map, eine Grafik, ...).
Wichtig ist, dass Sie diese Übersicht selbst gestalten und nicht irgendwo kopieren.

Überblick-Text

Wenn Sie möchten, können Sie hier maximal drei Punkte nennen, die Ihre obige Darstellung ergänzen oder erläutern.

Vernetzungen

Welche Verbindungen zu früheren Themenbereichen sehen Sie?
Sind Ihnen Inhalte und/oder Methoden aus diesem Themenbereich schon außerhalb des Mathematikunterrichts begegnet und wenn ja, wo?

Im Rückblick sollten Sie sich auch fragen, ob Sie die am Anfang des Heftes stehenden Kompetenzen erworben haben. Schätzen Sie sich selbst ein und kreuzen Sie in der Tabelle jeweils die am ehesten zutreffende Antwort an:

Kompetenzen	ja	ein wenig	eher nicht	nein
Sie erläutern die Bedeutung des Begriffs „Zufall" in der Umgangssprache und die historische Entwicklung des Begriffs „Wahrscheinlichkeit" und der Wahrscheinlichkeitstheorie				
Sie berechnen z.B. bei Aktienkursen Vorhersagen für den Kurs in einem begrenzten Vorhersagezeitraum und wissen um die Abhängigkeit der Vorhersagequalität von der Anzahl der Daten				
Sie erkennen und beschreiben bei empirischen Phänomenen annähernd normalverteilte Daten				
Sie berechnen bei empirischen normalverteilten und bei binomialverteilten Daten Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung und erläutern deren Bedeutung z.B. mit Hilfe der σ-Regeln				
Sie kennen den Random Walk als Modell zur Prognose bei vom Zufall bestimmten Phänomenen				
Sie kennen die Bernoulli-Kette als Modell für ein Zufallsexperiment, das aus einer Folge gleicher Experimente mit nur zwei möglichen Ergebnissen zusammengesetzt ist, und die Binomialverteilung als zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung				
Sie wissen um die Bedeutung der Unabhängigkeit für die Entwicklung stochastischer Modelle				
Sie vergleichen Zufallsexperimente mit Hilfe von Zufallsgrößen				

Haben Sie Kompetenzen nicht erworben oder nicht so, wie Sie es sich erhofft hatten, notieren Sie sich, woran es gelegen haben könnte. Überlegen Sie zugleich, ob Sie in Ihrem eigenen Verantwortungsbereich Möglichkeiten sehen, den Erwerb von Kompetenzen zu verbessern.

✎