# Ergänzungen zu L3 · Der Zufall steht Modell

## 1. Vergleich der Anforderungen

<table>
<tr><th>Kompetenzen GK</th><th>Kompetenzen LK</th></tr>
<tr><td>Sie erläutern die Bedeutung des Begriffs „Zufall“ in der Umgangssprache und die historische Entwicklung des Begriffs „Wahrscheinlichkeit“ und der Wahrscheinlichkeitstheorie</td><td>Sie erläutern die Bedeutung des Begriffs „Zufall“ in der Umgangssprache und die historische Entwicklung des Begriffs „Wahrscheinlichkeit“ und der Wahrscheinlichkeitstheorie und erkennen, dass sich der Wahrscheinlichkeitsbegriff nur axiomatisch definieren lässt<br>Sie erläutern das Axiomensystem von Kolmogorow</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sie berechnen z.B. bei Aktienkursen Vorhersagen für den Kurs in einem begrenzten Vorhersagezeitraum und wissen um die Abhängigkeit der Vorhersagequalität von der Anzahl der Daten</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sie erkennen und beschreiben bei empirischen Phänomenen annähernd normalverteilte Daten</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sie berechnen bei empirischen normalverteilten und bei binomialverteilten Daten Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung und erläutern deren Bedeutung z.B. mit Hilfe der σ-Regeln</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sie kennen den Random Walk als Modell zur Prognose bei vom Zufall bestimmten Phänomenen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sie kennen die Bernoulli-Kette als Modell für ein Zufallsexperiment, das aus einer Folge gleicher Experimente mit nur zwei möglichen Ergebnissen zusammengesetzt ist, und die Binomialverteilung als zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sie wissen um die Bedeutung der Unabhängigkeit für die Entwicklung stochastischer Modelle</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sie vergleichen Zufallsexperimente mit Hilfe von Zufallsgrößen</td></tr>
<tr><td></td><td>Sie erkennen Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen Bernoulli-Ketten und Markoff-Ketten, setzen diese Modelle zur Lösung von Aufgaben begründet ein und lösen diese Aufgaben</td></tr>
<tr><td></td><td>Sie entdecken und beschreiben die Ähnlichkeit von Markoff-Ketten mit Populations-Matrizen (z.B. Leslie-Matrix)<br>Sie benennen Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Binomial- und Normalverteilung<br>Sie gewinnen Einsichten in grundlegende Aussagen des Zentralen Grenzwertsatzes.</td></tr>
</table>

## 2. Quellenhinweise

Als Lernbücher kommen z.B. in Frage:

[1] JAHNKE, WUTTKE · Mathematik, Stochastik · Cornelsen · Berlin 2005
[2] LS Stochastik · Klett · Stuttgart 2003

### 2.1 Axiomatischer Aufbau · Kolmogorow

[1]: 1.4, S. 49ff
Internet:

- http://www.mathematik.ch/anwendungenmath/wkeit/kolmogorow/axiome_von_kolmogorow.php
- http://www.bankstudent.de/downloads3/mathe1.htm
  und unzählige weitere Seiten

### 2.2 Markoff-Ketten

[1]: 7.2, S. 239ff · [2]: S. 106ff
Modul ***Craps*** bei „MathePrisma“ (www.matheprisma.de)
*Markoff-Ketten können auch über eine Aufgabe eingeführt werden. Dabei zeigt sich, dass die Modellierung auf bekannten Inhalten basiert. Die Verwendung von Matrizen erleichtert lediglich Berechnung und Darstellung.*

**Aufgabe Palio**

In Siena (Toskana, Norditalien) findet jährlich ein sehr berühmtes Pferderennen mit einer schon jahrhundertelangen Tradition, der so genannte „Palio di Siena" statt: Ein waghalsiges Rennen auf ungesattelten Pferden rund um die Piazza del Campo. Es dauert jeweils nur etwa 1½ Minuten, wobei allerdings dieses Rennen von zahlreichen traditionellen Zeremonien tagelang umrahmt wird.
Seit 1729 gibt es in Siena 17 Stadtbezirke, und jeder wird durch ein Pferd mit Reiter vertreten. Allerdings gibt es dabei ein Problem: Die Platzverhältnisse auf der genau festgelegten „Renn-Strecke" im alten Siena sind so eng, dass ein Rennen mit 17 Pferden zu gefährlich wäre. Man hat sich schon vor sehr langer Zeit darauf geeinigt, nur 10 Pferde antreten zu lassen.
Die folgende Aufgabe handelt von dem dazu entwickelten Auswahlverfahren und der Frage, ob dieses Verfahren gerecht ist.

Das in Siena benutzte Auswahlverfahren sieht vor, dass die drei Stadtbezirke, welche beim Palio auf die Plätze 1 bis 3 kommen, dann auch im Folgejahr starten. Alle sieben Stadtbezirke, die pausieren mussten, starten im Folgejahr automatisch. Damit startet jeder Stadtbezirk mindestens jedes zweite Jahr.

a) Erstellen Sie ein geeignetes Modell, das für einen beliebigen Stadtbezirk die Teilnahmemöglichkeiten beschreibt.

b) Welche Eigenschaft(en) müsste nach Ihrer Meinung ein gerechtes (faires) Auswahlverfahren für den Palio haben? Überprüfen Sie mit Ihrem Modell aus a), ob das Verfahren gerecht ist.

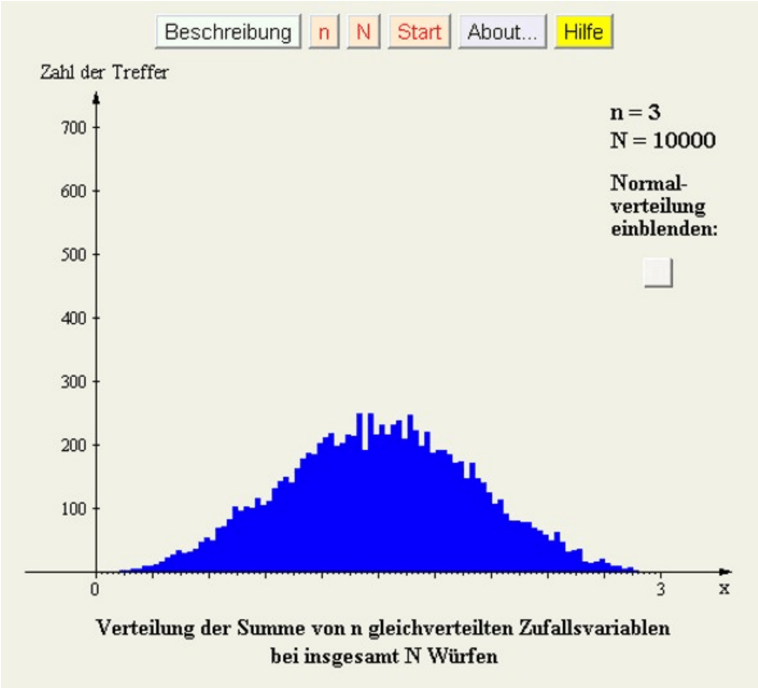
### 2.3 Verbindung mit Populations-Matrizen

*Nur möglich, wenn neben Analysis der Schwerpunkt Lineare Algebra ist, und daher L3 nach L2 (und L5) unterrichtet wird.*
*Die Problemstellung in [1], S. 239 entspricht Aufgabe 17 von G2.*

### 2.4 Vergleich der Binomial- mit der Normalverteilung/Zentraler Grenzwertsatz

*Der Vergleich kann mit dem Grundkursmaterial erfolgen.*
Zentraler Grenzwertsatz in [1]: S. 192ff; in [2]: S. 66ff
In „mathe online“ (www.mathe-online.at) findet man in der ***Galerie*** unter „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik 1“ ein interessantes Applet zum Thema Normalverteilung und Zentraler Grenzwertsatz. Der Text zur Beschreibung (siehe folgende Seite) erläutert u.a. sehr anschaulich, warum in vielen Bereichen die Annahme einer annähernden Normalverteilung sinnvoll ist.

Beispiel: Applet aus „mathe online“ zur Normalverteilung




**Beschreibung zum Applet**

Dieses Applet zeigt einen mathematisch leicht verstehbaren Prozess, der zur Normalverteilung führt:

Der Ausgangspunkt ist eine im Intervall [0,1] gleichverteilte Zufallsvariable. Sie entspricht dem Fall n = 1. Wird sie N mal 'gezogen' ('gewürfelt'), und werden die Treffer in 100 Teilintervalle gezählt und in einem Balkendiagramm eingezeichnet, so entsteht eine statistische Verteilung, die – abgesehen von kleinen Schwankungen – für große N keines der Teilintervalle bevorzugt.

Der Fall n = 2 entspricht der Verteilung einer Summe zweier solcher Zufallsvariablen: Es werden immer zwei Zahlen x1 und x2 'gezogen' und addiert. Die Summe x = x1 + x2 ist eine Zahl zwischen 0 und 2 und wird notiert. Das wird N mal wiederholt, und die Treffer in 100 Teilintervalle des Intervalls [0,2] werden gezählt. Die derart entstehende statistische Verteilung bevorzugt nun Werte in der Nähe von 1.

Dasselbe kann für beliebige Werte von n durchgeführt werden. Der \`zentrale Grenzwertsatz´ besagt, dass sich die Verteilung der Summen x = x1 + ... + xn für wachsendes n einer Normalverteilung annähert. Der Mittelwert dieser Verteilung ist n/2, die Varianz (Standardabweichung) stellt sich als die Quadratwurzel aus n/12 heraus.

Dieses Verhalten wird durch das Applet illustriert. Dabei ist es nicht einmal notwendig, dass die einzelnen Summanden gleichverteilt sind – es kommt nur darauf an, dass ihre Verteilungen voneinander unabhängig sind.

Der 'zentrale Grenzwertsatz' kann salopp auch so formuliert werden: Eine Variable, die vielen kleinen, voneinander unabhängigen Zufallswirkungen unterliegt, ist normalverteilt.

Daher treten in vielen praktischen Situationen Verteilungen auf, die sehr gut durch Normalverteilungen beschrieben werden können.

Die Werte von n und N können nach Anklicken der Buttons 'n' und 'N' oder durch eintippen der Tasten 'n' und 'N' neu gewählt werden. Die Voreinstellungen sind n = 1 und N = 10000. Auf Wunsch wird die Normalverteilung mit Mittelwert n/2 und Varianz (n/12)^(1/2) eingeblendet. Es ist leicht zu sehen, dass sich die statistische Verteilung (Höhe der blauen Balken) für wachsendes n mit immer größerer Genauigkeit der Normalverteilung nähert. Für eine große Zahl N von Würfen ist dieser Effekt ausgeprägter, da die (relativen) Schwankungen klein sind.

Die Größe der Schwankungen bei verschiedenen Werten von N kann übrigens mit Hilfe der bekannten \`Wurzel aus N´-Abschätzungen verstanden werden.

Der Zufallsgenerator wird durch den Button 'Start' oder durch das Drücken einer beliebigen Taste außer 'n' und 'N' aktiviert.