Lehrerheft

Lehrerheft

Kompetenzen
die Lernende erwerben sollen

- Sie beherrschen den Umgang mit den üblichen Verknüpfungen zwischen Vektoren und Matrizen (Vektoraddition, Multiplikation mit Skalar, Skalarprodukt, Addition und Multiplikation von Matrizen, Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar, Multiplikation von Matrix und Vektor)
- Sie modellieren einfache diskrete Wachstumsprozesse z.B. mit dem Modell von Leslie und erklären dessen Besonderheiten (Einteilung der Population in Altersgruppen, Rekursivität), auch im Hinblick auf andere Wachstumsmodelle, berechnen Wachstumsprognosen über eine und zwei Zeitperioden und machen mit Hilfe eines CAS Aussagen zum Langzeitverhalten der Population
- Sie modellieren einfache Verflechtungen (betriebswirtschaftliche Modelle)
- Sie erstellen und lösen lineare Gleichungssysteme innerhalb verschiedener Sachkontexte und deuten die Lösungen sachgerecht.

Autor: Winfried Euba
Version 1.11 vom 14. Januar 2006

Inhalt

1. Didaktische und methodische Hinweise

1.1 Allgemeines 1
1.2 Arbeitsblatt 1
1.3 Populationsmodell (Leslie-Modell) 2
1.4 Lineare Gleichungssysteme 2
1.5 Mehrstufige Prozesse / Verflechtungen 2
1.6 Abituraufgaben 3
1.7 Rückschau / Portfolio 3
1.8 Zeitvorschlag 3

2. Lernbücher / Literaturhinweise

2.1 Lernbücher 4
2.2 Literaturhinweise / Links 4

3. Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

Aufgabe 1 4
Aufgaben 2 bis 5 5
Aufgaben 6 und 7 6
Aufgabe 8 7
Aufgaben 9 bis 11 8
Aufgaben 12 und 13 9
Aufgaben 14 und 15 10
Aufgaben 16 und 17 11
Aufgabe 18 12

4. Lösungsvorschläge zu den Abituraufgaben 12

Aufgabe Vegetation (ohne CAS – mit CAS)
Aufgabe Chemieunternehmen
Aufgabe Kalkulation

1. Methodische und didaktische Hinweise

1.1 Allgemeines

Der Themenbereich behandelt den eher algebraischen Aspekt von Matrizen und Vektoren: mit den darin gespeicherten Daten werden – unter Verwendung der üblichen Rechenoperationen – Prognosen etwa bei Wachstumsprozessen erstellt und Berechnungen zu (z.B. wirtschaftlichen) Verflechtungen durchgeführt, nachdem zuvor entsprechende Modelle entwickelt wurden. Dabei zeigt sich, dass die hier behandelten Populationsmodelle auch als mehrstufige Prozesse aufgefasst werden können, die Fragestellungen und deren mathematische Folgen sind jedoch meist verschieden.
Da mit Matrizen und Vektoren Modelle beschrieben und danach Berechnungen durchgeführt werden, ist das hier vorgeschlagene paradigmatische Beispiel eher auf die Rechenoperationen bezogen:

1.2 Arbeitsblatt

In der vorgeschlagenen Gruppenarbeit sammeln die Lernenden Beispiele für Matrizen und Vektoren in ihrer Umwelt und entwickeln Beispiele für Verknüpfungen. Das kann länger als eine Stunde dauern und zu Verknüpfungsvorschlägen führen, die unüblich und/oder nicht sinnvoll sind. Wenigstens ein Beispiel dafür sollte bei der Auswertung (bzw. bei 1.1/1.2) aufgegriffen werden.
Die folgenden Abbildungen sollen die Vielfalt von Ergebnissen dokumentieren, die Gruppen (oder einzelne Lernende) produziert haben, und auch die unterschiedlichen Erfahrungen aufzeigen, auf die zurückgegriffen wurde.

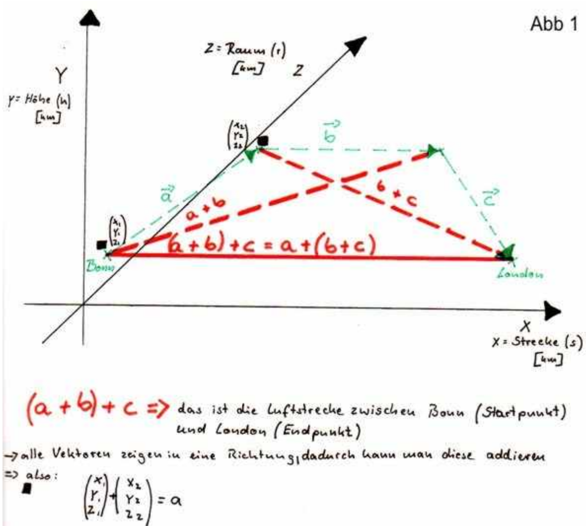


Abb 1

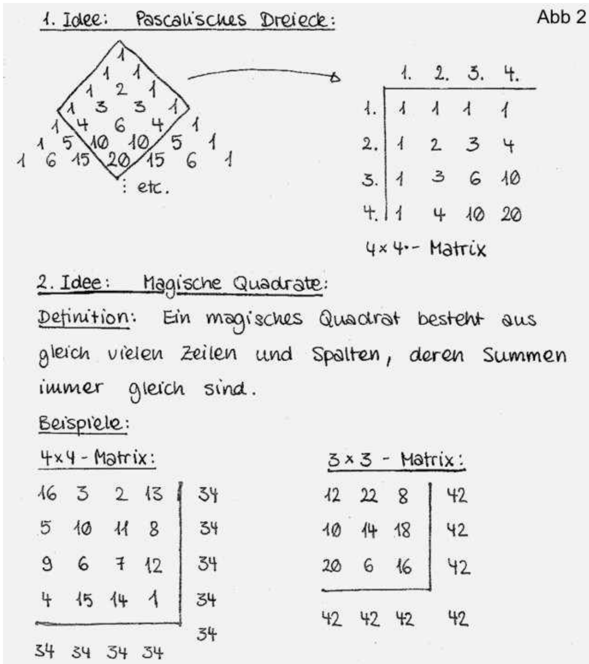


Abb 2

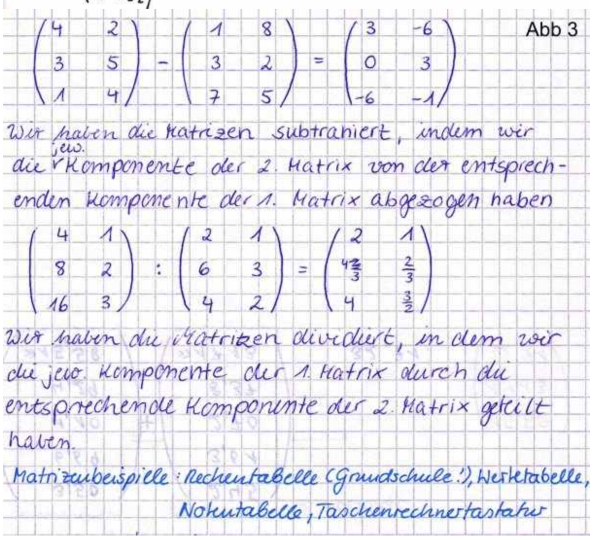


Abb 3

Anhand von Beispielen lässt sich zumeist die Sinnhaftigkeit einer Verknüpfung erklären. So sind auch die beiden Beispiele bei 1.3 hinsichtlich der Vektoroperationen zu verstehen.
Dass eine Verknüpfung nicht sinnvoll ist, wird manchmal nicht so leicht verdeutlicht werden können. In Abbildung 3 würde eine analog zur Division gestaltete Multiplikation, die im gesamten Dokument aber nicht auftaucht, immerhin eine Probe ermöglichen. Allerdings kann man bei dieser Definition mit vielen Matrizen gar nicht dividieren, weil ja alle Komponenten verschieden von Null sein müssen.

Will man das Arbeitsblatt einsetzen, so darf man den Schülerinnen und Schülern das Lernheft erst nach Abschluss dieser Arbeit aushändigen.

1.3 Populationsmodell (Leslie-Modell)

Das Beispiel mit der Possum-Population ist ausführlich dargestellt und durchgerechnet, sodass es auch von Schülerinnen und Schülern selbst erarbeitet werden kann[1]. Zur Binnendifferenzierung einer solchen Vorbereitung kann auch Aufgabe 5) benutzt werden. Sie beschäftigt sich mit einer Modifizierung dieses Beispiels.
In den Aufgaben 6 und 7 werden Populationsmodelle entwickelt. Dabei ist das von Aufgabe 6 gegeben und daher die Berechnung einfach. Aufgabe 7 ist deutlich komplexer, weil die Komponenten der Matrix erst berechnet und falls gewünscht aktuelle Daten recherchiert werden müssen. Diese Aufgabe entspricht weitgehend Aufgabe 5 aus V3.
Aufgabe 8 betrachtet theoretische Aspekte des Populationsmodells.
In der Abituraufgabe 19 kommen neben der Modellierung ebenfalls theoretische Aspekte ähnlich wie in Aufgabe 8 vor. Da 19) ohne CAS (nur mit Taschenrechner) zu lösen wäre, gibt es auch eine Variante mit CAS (oder GTR).
Auch ein Teil der Berechnungen in den Aufgaben kann ohne CAS (oder GTR) nicht durchgeführt werden.

<u>Hinweise noch zu 6a) und zum Namen *Leslie*:</u>

Lebensdaten zu dem britischen Biologen und Ökologen P.H. Leslie sind nicht zu finden. Zitiert werden zumeist zwei Beiträge aus der Zeitschrift Biometrika der Universität Oxford aus den Jahren 1945 und 1948, an der Leslie zu dieser Zeit gearbeitet hat (*P.H.Leslie, On the use of matrices in certain population mathematics, Biometrika, 33, S.183-212, (1945)* und *Some further notes on the use of matrices in population mathematics, Biometrika, 35, S.213-245, (1948)*).

Das Beispiel der Possum-Population ist ein „exaktes" Leslie-Modell: Einteilung in homogene Altersklassen, Zeittakt entspricht der Durchwanderung einer Altersklasse, Lebewesen in der höchsten Alterklasse sterben innerhalb eines Zeittaktes und die Lebewesen in einer Altersklasse ergeben sich aus den Überlebenden der Vorgängerklasse, die der 1. Altersklasse aus den Geburten (in allen Klassen). Die Leslie-Matrix sieht daher so aus:
1.Zeile besetzt mit den Geburtenraten f_i der jeweiligen Altersklassen i und $f_i \geq 0$,
Nebendiagonale besetzt mit den Überlebensraten der Vorgängergruppen s_i (> 0),
sonst stehen überall Nullen.

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ .. & & .. & & .. \\ 0 & 0 & & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Bedingungen sind in 6) nicht gegeben, da Schildkröten in Altersklassen verbleiben (Diagonale ist besetzt!) und die Altersstruktur ist nicht homogen. Beide Punkte gelten auch für Aufgabe 7. Die Praxis der Benennung scheint manchmal auch in der Literatur „großzügig" zu sein...

1.4 Lineare Gleichungssysteme

Die Erläuterung des Eleminationsverfahrens geschieht über Beispiele, wovon das erste auf Vorwissen aus der Mittelstufe aufbaut. Im Anwendungsbeispiel wird ein Aspekt der Lösbarkeit anhand dieses Beispiels besprochen, weil so auch weitergehende Überlegungen zur Lösung ermöglicht werden.
In Aufgabe 9 wird an zwei einfachen Aufgaben das Verfahren erprobt, was ohne Hilfsmittel möglich ist.
Bei den folgenden Aufgaben 10 bis 13 steht das Aufstellen des Gleichungssystems im Vordergrund und die Weiterarbeit mit der Lösung. Die Lösung selbst geschieht am einfachsten mit CAS, zumal in 11) ein größeres Gleichungssystem auftaucht (mindestens 4 × 4, je nach Ansatz).
Aufgabe 14 dient der Reflexion der Angemessenheit des Ansatzes *lineares Gleichungssystem* etwa bei den Aufgaben 12 und 13 (Verhältnis Mathematik ↔ Realität).

1.5 Mehrstufige Prozesse / Verflechtungen

Als Beispiel wird ein zweistufiger Produktionsprozess betrachtet, wie er in einfachen betriebswirtschaftlichen Modellen oft auftaucht: 1. Stufe ist die Produktion von Zwischenprodukten aus Rohstoffen, 2. Stufe die Fertigung der Endprodukte aus Zwischenprodukten und hier auch Rohstoffen. Die einzelnen Schritte werden mit Matrizen modelliert, sodass durch geeignete Operationen mit diesen Matrizen weitere Informationen entstehen, wie etwa der Rohstoffbedarf für die Endprodukte. Gleichungssysteme tauchen hier bei weitergehenden Fragen auf.

[1] Das gilt prinzipiell auch für die beiden folgenden Anwendungen.

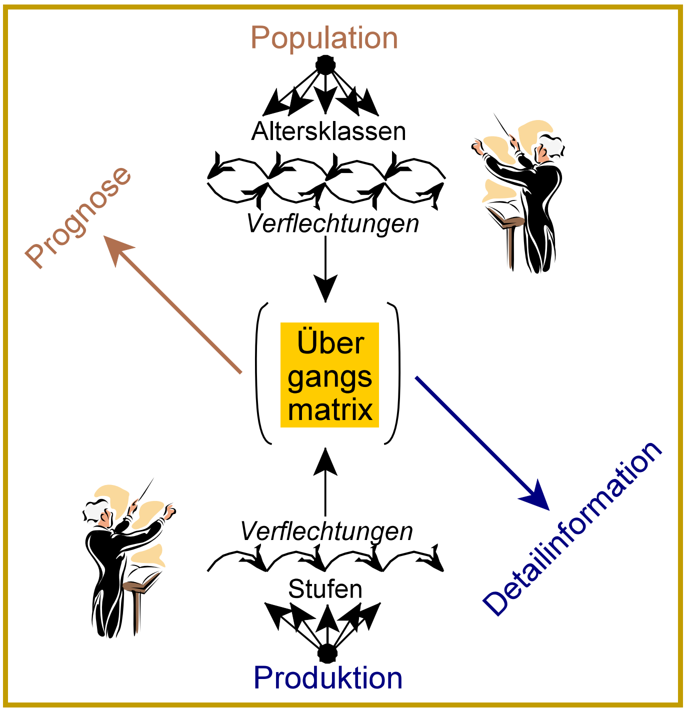
Thematisieren sollte man die Darstellungsmöglichkeiten der Verflechtung mit Matrizen oder als Graph, die auch auf Ähnlichkeiten zu Populationsmodellen hinweist.
Die Aufgaben 15 und 16 ähneln dem Beispiel, es ist daher möglich, diese Aufgaben arbeitsteilig rechnen und produzieren zu lassen.
Aufgabe 17 interpretiert Wanderungsbewegungen zwischen verschiedenen Regionen als mehrstufigen Prozess. Diese Interpretation ist auch für das Populationsmodell möglich, da dort Verflechtungen zwischen den Altersklassen bestehen, allerdings in beide Richtungen. Und da ist Aufgabe 17 wirklich ein Bindeglied.
Aufgabe 18 greift die eben angesprochenen Überlegungen auf, wagt aber auch eine Rückschau auf frühere Wachstumsmodelle und einen Vergleich mit dem hier entwickelten Modell.

1.6 Abituraufgaben

Die drei bzw. vier Aufgaben entsprechen vom Umfang her Aufgaben im Abitur und berücksichtigen diesen Themenbereich, haben aber auch Verbindungen zur Analysis (besonders Aufgabe 20). Aufgaben, die darüber hinaus auch Inhalte von G5 berücksichtigen, werden im Themenbereich G5 zu finden sein.

Diese Aufgaben sollen den Schülerinnen und Schülern ermöglichen, ihre Kenntnisse an komplexeren Aufgaben zu überprüfen. Die Lösungsvorschläge zu allen Aufgaben – jeweils eine Seite pro Aufgabe – finden sich am Ende dieses Hefts und können bei Bedarf ausgegeben werden, sodass nicht jede Aufgabe und nicht jedes Detail im Unterricht besprochen werden muss.

1.7 Rückschau / Portfolio



Die Rückschau soll den Lernenden einen Überblick verschaffen und eine Einordnung in ihr mathematisches Wissen ermöglichen. Dazu sollten sich die Schülerinnen und Schüler auch selbst einschätzen hinsichtlich der erreichten Kompetenzen.
Die Erstellung einer „Überblick-Grafik“ bereitet möglicherweise Schwierigkeiten. Wer nicht gut zeichnen kann, bringt eben grafische Elemente ein und verwendet gegebenenfalls ein passendes Computerprogramm. Wichtig ist jedoch, dass jede Schülerin und jeder Schüler sich selbst einen Überblick verschafft und diesen zu Papier bringt. Irgendwo kopierte Bilder, die eingeklebt werden, sind sinnlos. Siehe dazu [1].
Das nebenstehende Beispiel entspricht dem Auftrag, der aber unzählige andere Möglichkeiten zulässt.
Die Beschäftigung mit dem Arbeitsblatt, das Selbsterarbeiten der drei Anwendungen und eventuell von Aufgaben zur Anwendung, die Beschäftigung mit einer oder mehreren Abituraufgaben sowie die Rückschau könnten Bestandteile eines Portfolios sein. Die in Gruppen- oder Partnerarbeit entstandenen Dokumente haben darin genauso Platz wie Dokumente aus Einzelarbeit.

1.8 Zeitvorschlag

ca. 30 Stunden (von 135 Stunden in 3 Semestern)

G1	G2	G4	G5

2. Lernbücher / Literaturhinweise

2.1 Lernbücher

- THOMANS JAHNKE / HANS WUTTKE · Mathematik: Analytische Geometrie, Lineare Algebra
  Cornelsen · Berlin 2003
  Das Kapitel 5 „Prozesse" deckt den Themenbereich weitgehend ab.
- KROLL / REIFFERT / VAUPEL Analytische Geometrie, Lineare Algebra
  Hier finden sich viele Aufgaben mit Linearen Gleichungssystemen (Ströme im Netz), zu Verflechtungen und einige Aufgaben zur Populationsentwicklung.
- SCHÖWE / KNAPP / BORGMANN · Lineare Algebra, Wirtschaft · Cornelsen · Berlin 1998
  Das Buch enthält viele Aufgaben zu mehrstufigen Produktionsprozessen, behandelt dazu Matrizenverknüpfungen und Lineare Gleichungssysteme, jedoch keine Populationsmodelle.

2.2 Literaturhinweise / Links

[1] ANDREAS MÜLLER · Denken heißt Zurechtmachen
unter http://www.learningfactory.ch/downloads/ als PDF-Datei unter „ETHtools" *und viele weitere interessante Artikel bei denen es darum geht, „das Lernen zu lernen".*
Die Vorschläge zur „Rückschau" im Lernheft basieren z.T. auf dem genannten Artikel.

[2] WOLFGANG TYSIAK · Lineare Unabhängigkeit als Informationsmaß · MNU 57/2 (1.3.2004) Seiten 75-78
Dieser Artikel geht über die Grundkursinhalte hinaus, er plädiert aber auch für die in G2 gewählte Sichtweise: „Die Loslösung vom Verständnis eines Vektors als Pfeilklasse in der Ebene oder im Raum soll dabei ganz bewusst vollzogen werden. Bei der weiter fortschreitenden DV-Durchdringung der täglichen Umwelt sollten Matrizen eher als Dateien und Vektoren eher als Datensätze oder als Felder einer Datei verstanden werden."

[3] Zusätzliche Informationen über eine spezielle Anwendung Linearer Gleichungssysteme:
MathePrisma (Modul: CT und Lineare Gleichungssysteme · Mathematik ist die beste Medizin)

[4] Demographics of the Hawaiian Green Sea Turtle mit einem konkreten Beispiel zur Anwendung des Populationsmodells (siehe Aufgabe 6).
Es gibt unzählige Internetseiten zum Thema „Leslie-Matrix", einige enthalten auch konkrete Beispiele, die für den Unterricht verwendet werden können.

[5] Daten zu Aufgabe 7 findet man z.B. bei
Statistisches Bundesamt: www.destatis.de/d_home.htm
U.S. Census Bureau: www.census.gov/ipc/www/idbpyr.html

3.Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

Zu den meisten Aufgaben ist im Lernheft eine Kurz-Lösung abgedruckt, sodass sich die Lernenden bis zu einem gewissen Grad bei diesen Aufgaben selbst helfen können. Die eher theoretischen Aufgaben 8, 14 und 18 erfordern höheres Abstraktionsniveau und eignen sich daher auch zum Vortragen durch geeignete Schülerinnen und Schüler.

Vergleiche und Verknüpfungen

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Datei mit Namen und Adressen, jeden Datensatz kann man als Vektor auffassen, etwa (Name | Straße | PLZ | Ort). Aus verschiedenen Gründen muss eine solche Datei sortiert werden. Überlegen und beschreiben Sie, wie man die Datensätze anordnen könnte.

Der Vergleichsvorgang bezieht sich zunächst auf die wichtigste Komponente, bei Übereinstimmungen in dieser Komponente können diese Vektoren dann nach der zweitwichtigsten Komponente sortiert werden usw. In diesem Sinne ist also eine Anordnung möglich.

Beispiel: 1. Sortierkriterium: PLZ,
2. Kriterium (bei gleicher PLZ): Straße

Aufgabe 2

Ein Würfel wird gezinkt, damit die Augenzahl 6 öfter fällt. Tatsächlich ergibt ein ausführlicher Test, dass die 6 durchschnittlich bei jedem 3. Wurf erscheint, die 1 jedoch nur zweimal bei 21 Würfen, alle übrigen Zahlen fallen bei jedem 7. Wurf.
Schreiben Sie die Häufigkeit, mit der jede Ziffer erscheint, in einen Vektor, geordnet in der Reihenfolge von 1 - 6 und berechnen Sie damit, wie oft jede Ziffer bei 100 Würfen erscheint.

$$\left(\frac{2}{21}\middle|\frac{1}{7}\middle|\frac{1}{7}\middle|\frac{1}{7}\middle|\frac{1}{7}\middle|\frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

Häufigkeit jeder Ziffer bei 100 Würfen = $100\cdot\left(\frac{2}{21}\middle|\frac{1}{7}\middle|\frac{1}{7}\middle|\frac{1}{7}\middle|\frac{1}{7}\middle|\frac{1}{3}\right)$.

Im Kontext der Aufgabenstellung müssen die Ergebnisse auf ganze Zahlen gerundet werden und die Summe dieser Zahlen sollte auch noch 100 ergeben: (10|14|14|14|14|34). D.h. die 1 fällt ca. 10 mal, die 2, 3, 4 und 5 fallen jeweils ca. 14 mal und die 6 fällt ca. 34 mal *(aufgerundet, damit Summe = 100).*

Aufgabe 3

Ein Restaurant bietet Montags bis Donnerstags von 12.00 Uhr bis 14.00 Uhr „Essen satt". Jeder Kunde kann dann vom Buffet nehmen, was er möchte.
Für Kinder bis 14 Jahre kostet dieses Angebot 9,50 €, für Rentner 11,00 € und sonst 15,60 € pro Person.

a) Eine Gruppe aus zwei Kindern, zwei Erwachsenen und einem Rentner wählt dieses Angebot. Erstellen Sie die Rechnung für diese Gruppe mit Hilfe von Vektoren.

b) Fertigen Sie ein passendes Computer-Programm (z.B. mit einer Tabellenkalkulation), das bei Eingabe der jeweiligen Personenzahl die Rechnung ausgibt.

a) (2|2|1) · (9,50|15,60|11,00) = 19,00 + 31,20 + 11,00 = 61,20. Die Rechnung für die Gruppe beläuft sich auf 61,20 €.

b) *Diese Teilaufgabe ist eine kleine Spielerei, in der die Vektorrechnungen in eine Tabellenkalkulation übertragen werden müssen. Dazu existieren ein Arbeitsblatt und ein Lösungsvorschlag für Excel und Quattro Pro (G2-03A und G2-03L).*

Rechnung

Anzahl	Preisart	Einzelpreis	Zwischensumme
2	Kinder	9,50 €	19,00 €
3	Normalpreis	15,60 €	46,80 €
		Summe	**65,80 €**

Aufgabe 4

Fünf Freundinnen treffen sich regelmäßig zum „Dame"-Spiel. Sie haben ihre Gewinne in einer Tabelle notiert, in der jede Reihe angibt, wie oft die zugehörige Person gegen die anderen jeweils gewonnen hat:

gegen	Anna	Gio	Jai	Li	Petra
Anna		3	5	2	4
Gio	2		4	3	5
Jai	5	3		4	2
Li	3	4	5		3
Petra	2	3	4	2	

a) Erstellen Sie eine 5×5-„Dominanz"-Matrix D, in welche Sie 1 für *mehr Gewinne*, 0 für *mehr Niederlagen* und ½ für *genau so viele Siege wie Niederlagen* eintragen. Die 0 wird auch eingetragen, wenn mit einer Person gar nicht gespielt wurde, also hier jede der Freundinnen mit sich selbst: In der Hauptdiagonale der Dominanz-Matrix stehen lauter Nullen.

b) Der Spaltenvektor X bestehe aus lauter Einsen, also X = (1 | 1 | ...)^T.
Berechnen Sie damit die Vektoren Y_0 und Z_0 mit $Y_0 = D \cdot X$ und $Z_0 = D^T \cdot X$. Welche Bedeutung haben die Vektoren Y_0 und Z_0 im Sachkontext?

a) Die Dominanzmatrix lautet: $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ½ & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ ½ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $Y_0 = D \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2½ \\ 2 \\ ½ \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ½ & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ½ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1½ \\ 2 \\ 3½ \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Der Vektor Y_0 gibt die Gesamtzahl der Gewinne pro Person an, wobei ½ für „unentschieden" steht.
Bei der gekippten oder transponierten Matrix stehen die Niederlagen der Personen in den Zeilen, genauer die Siege über die Personen in den Zeilen. Also gibt der Vektor Z_0 die Anzahl der Niederlagen pro Person an, wieder mit ½ für „unentschieden".

Populationsmodelle

Aufgabe 5

Das Anwachsen der Possum-Population (aus der Aufgabe S. 5) beobachten die Förster in diesem Nationalpark mit Sorge, weil dadurch andere Arten bedroht werden. Daher überlegen sie, welche Auswirkungen eine gezielte Jagd auf die Possums haben könnte. Modifizieren Sie das Modell aus der Aufgabe geeignet und begründen Sie Ihren Vorschlag (oder Ihre Vorschläge).

Wird eine bestimmte Anzahl der jeweiligen Altergruppen im Jahr gejagt, so müsste die Anzahl der getöteten Tiere vom Populationsvektor abgezogen werden, bevor dieser mit der Leslie-Matrix multipliziert wird. Es ist aber auch oft so, dass für eine bestimmte Jahreszeit Jagd erlaubt ist.
Nimmt man an, dass Tiere aus allen Altersgruppen im Verhältnis zur Gesamtzahl in der Gruppe getötet werden, muss die Leslie-Matrix mit dem entsprechenden Faktor multipliziert werden.
Will man die augenblickliche Population in ihrer Größe etwa konstant halten, so sind nach den Ergebnissen der Rechnung etwa 22% aus jeder Altersgruppe der Population zu töten, es überleben

also 78%. Die neue Leslie-Matrix L_{neu} entsteht dann aus der alten Matrix L durch $L_{neu} = 0{,}78 \cdot L$.

Zu dem Beispiel ab S. 5 existiert eine Derive-Datei, mit deren Hilfe nun experimentiert werden kann (G2-Populationsmodell.dfw)

Aufgabe 6

In dieser Aufgabe geht es um ein Populationsmodell der Hawaiischen *Green Sea Schildkröte*. Die Aufteilung der Population erfolgt in 5 Altersgruppen, nämlich *kleiner 1 (Eier, Geschlüpfte), 1–16 (Jungtiere), 17–24 (fast ausgewachsene Tiere), 25 (Erstbrüter)* und *26–50 (Brüter)*.
Die Anfangspopulation ist gegeben durch (346.000|240.000|110.000|2.000|3.500).
In dem Modell ist die Leslie-Matrix modifiziert: Der Übergang von einer Altersgruppe zur nächsten setzt sich aus zwei Aspekten zusammen, die auch in der Matrix auftauchen: Der Anteil derjenigen Tiere, die überlebt haben und in die nächste Altersgruppe überwechseln, und der Anteil derjenigen Tiere, die in der Altersgruppe verbleiben.
Die Geburtenrate ist hier die Anzahl der Eier, die durchschnittlich pro Jahr von einer Schildkröte in dieser Gruppe gelegt wird.
Die Leslie-Matrix ergibt sich so zu

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 280 & 70 \\ 0{,}23 & 0{,}679 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}001 & 0{,}711 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}039 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}89 & 0{,}907 \end{pmatrix}$$

a) Wie unterscheidet sich diese Matrix L von der bisher verwendeten Leslie-Matrix?
Deuten Sie die Zahlen entsprechend dem vorstehenden Text zum Modell.

b) Berechnen Sie mit dem Modell die Anzahl der Tiere nach einem, zwei und zehn Jahren.

a) In dieser Matrix L ist auch die Hauptdiagonale besetzt. Sind diese Einträge nicht Null, verbleibt der entsprechende Anteil in der zugehörigen Altersgruppe.
Zeile 1: Nur die Schildkröten in den Gruppen 4 und 5 legen Eier: Erstbrüter im Durchschnitt 280 pro Jahr und Brüter ca. 70 pro Jahr.
Zeile 2: 23% aus Gruppe 1 gehen über nach Gruppe 2, in Gruppe 2 (Jungtiere) verbleiben 67,9% der Tiere – jeweils pro Jahr.
Zeile 3: Nur 0,1% der Tiere aus Gruppe 2 gehen über nach Gruppe 3 (fast ausgewachsene Tiere), dort verbleiben 71,1% der Tiere – immer pro Jahr.
Zeile 4: 3,9% aus Gruppe 3 geht über nach Gruppe 4, in der nach Definition kein Tier verbleibt.
Zeile 5: 89% der Tiere aus Gruppe 4 (Erstbrüter) überleben und gehen daher über in Gruppe 5 (Brüter), in der 90,7% verbleiben.

b) *Siehe dazu die Derive-Datei (G2-06L.dfw) mit Lösungsvorschlägen:*
Bestand nach einem Jahr
$B_1 \approx$ (805.000| 242.540| 78.450| 4.290| 4.955), nach 2 Jahren
$B_2 \approx$ (1.548.015| 349.835| 56.020| 3.060| 8.310) und
nach 10 Jahren $B_{10} \approx$ (814.600| 721.190| 6.150| 295| 9.540) .

Es existiert auch wieder ein Arbeitsblatt dazu (G2-06A.dfw), in welches die Matrix und der Bestandsvektor eingetragen sind.

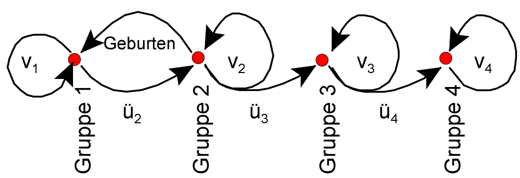
Aufgabe 7

Entwickeln Sie mit dem Modell von Leslie eine Prognose für die Bevölkerungsentwicklung in Deutschland.
Besorgen Sie sich dazu die nötigen Daten und geben Sie die Quelle der Daten an.
Beschreiben Sie Ihr Modell (auch mit mit einem Graphen).
Berechnen Sie eine Prognose für die Jahre 2025 und 2050.
Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.
Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit professionellen Prognosen.

Dazu sei die Bevölkerung in 4 Altersgruppen eingeteilt, nämlich *0–14, 15–49, 50–64* und *ab 65*.
Das statistische Bundesamt geht bei seinen Prognosen von einer Geburtenzahl von 1,40 aus. Das bedeutet, dass jede Frau im Alter von 15 bis 49 im Durchschnitt 1,40 Kinder zur Welt bringt.
Die Übergänge zur nächsten Gruppe berechnen sich aus der Zeitdauer einer Gruppe (wobei man annimmt, dass jede mögliche Altersstufe in einer Gruppe etwa gleich viele Menschen umfass), abzüglich der jährlichen durchschnittlichen Sterberate in der Gruppe. Diese können Sie selbst aus aktuellen Daten ermitteln oder aber folgende Werte verwenden (geordnet nach den Altersgruppen) (0,004|0,0011|0,0087|0,0276).
Als Startwerte für Ihr Modell können Sie ebenfalls selbst recherchierte Zahlen verwenden oder (12,3|39,1|15,5|16,3) – Angabe in Millionen, geschätzte Werte für 2005.

Der Lösungsvorschlag basiert auf den nebenstehend genannten Daten. Aktuelle Daten können z.B. auf den Seiten des Statistischen Bundesamtes erhalten werden (siehe Linkliste, S.4 [5]).
Auch bei dieser Aufgabe verbleiben wegen der sehr groben Einteilung wieder Gruppenmitglieder in ihrer Gruppe. Daher ist die Hauptdiagonale besetzt.

v_i sei der Anteil der Verbleibenden in Gruppe i (Verbleibfaktor),
$ü_i$ sei der Anteil der Übergänge nach Gruppe i, hier bezogen auf die vorhergehende.



Die Berechnung der Matrix basiert z.B. auf folgenden Überlegungen, die sich teilweise auch aus dem Graphen erklären:

1. Gruppe: Die erste Gruppe erhält zunächst „Zuwachs“ über die Geburten. Da die Gruppen nicht nach Geschlecht unterschieden werden, muss hier eine Annahme getroffen werden, etwa dass 50% Frauen in der 2. Altersgruppe sind. Weiter muss man annehmen, dass die Anzahl der Personen für jedes Altersjahr übereinstimmt. Es sind 35 Jahrgänge in der Gruppe 2, also je Altersjahr 1/35 der Gesamtzahl, gerundet 0,03. Die Zahl der Geburten

ergibt sich dann mit 0,02 · Anzahl der Menschen in Gruppe 2, da 0,5 · 1,4 · 1/35 = 0,02.
Die Überlebensrate in Gruppe 1 beträgt 99,6%. Zugleich verringert sich die Anzahl der Menschen in Gruppe 1 (und in den beiden folgenden Gruppen) durch die Anzahl derer, die in die nächste Gruppe übergehen, hier mit obiger Annahme 1/15 der Gruppe. Da 0,996 · 14/15 ≈ 0,930, verbleiben daher 0,93 · Anzahl der Menschen in Gruppe 1.
Verbleibfaktor: 0,930
Geburtenzahl: 0,020 (bezogen nur auf Gruppe 2)
Übergangsfaktor: 1/15 · 0,996 ≈ 0,066

2. Gruppe: Es verbleiben in der Gruppe 34/35, 1/35 gehen in die Gruppe 3 über, jeweils abzüglich der Sterberate 0,0011:
Übergangsfaktor: 1/35 · 0,9989 ≈0,029
Verbleibfaktor: 34/35 · 0,9989 ≈ 0,970

3. Gruppe: Es verbleiben in der Gruppe 14/15, 1/15 gehen in die Gruppe 4 über, jeweils abzüglich der Sterberate 0,0087:
Übergangsfaktor: 1/15 · 0,9913 ≈ 0,066
Verbleibfaktor: 14/15 · 0,9913 ≈ 0,925

4. Gruppe: Verbleibfaktor: 0,972 *(1 – Sterberate)*

Damit ist die Leslie-Matrix $L = \begin{pmatrix} 0{,}930 & 0{,}020 & 0 & 0 \\ 0{,}066 & 0{,}970 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}029 & 0{,}925 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}066 & 0{,}972 \end{pmatrix}$

Die Gesamtbevölkerung nimmt langfristig ab, bei gleichzeitiger Verschiebung der Altersstruktur: Die Anzahl der alten Leute steigt, die der jungen fällt (Zahlen in Millionen):

Jahr	**0 – 14**	**15 – 49**	**50 – 64**	**ab 65**	**Summe**
2005	12,3	39,1	15,5	16,3	**83,2**
2025	10,6	32,7	14	24,4	**81,7**
2050	8,6	26,4	11,5	27,1	**73,6**

Die Derive-Datei mit einem Lösungsvorschlag heißt G2-07L.dfw
Diese Aufgabe basiert auf Aufgabe 5 von V3, dort wird allerdings nicht mit Matrizen gerechnet. Für Schülerinnen und Schüler, die nicht bereits diese Aufgabe aus V3 bearbeitet haben, bietet es sich an, über die gewählte Modellierung zu reflektieren. Siehe auch die Aufgaben 4 und 6 in V3.

Aufgabe 8

In dieser Aufgabe soll es um einige eher theoretische Aspekte des Leslie-Modells gehen.
Das Verfahren berechnet die Fortentwicklung einer Population in einem festen Zeittakt und nicht kontinuierlich. Es ist daher *diskret*.
Die Berechnung geschieht innerhalb eines Modells immer in gleicher Weise: Sei L die Leslie-Matrix und X_t die Population zur Zeit t. Dann ist $X_{t+1} = L \cdot X_t$.
Ein solches Verfahren heißt *iterativ*. Da z.B. X_5 aus dem Wert von X_4 berechnet wird, X_4 aus X_3, X_3 aus X_2, X_2 aus X_1 und X_1 aus X_0, ist das Verfahren *rekursiv* definiert. Durch die Potenzierung der Leslie-Matrix kann aber ohne Rekursion gerechnet werden.

a) z.B. iteratives Verfahren zu Berechnung von Nullstellen, rekursiv definierte Folge, ...

b) Vermutlich wurde das Langzeitverhalten mit der Potenzschreibweise $L^n \cdot X$ berechnet bzw. untersucht, genauer $X_n = L^nX$. Die iterative Darstellung lautet: $X_n = L\,X_{n-1}$, erfordert jedoch ein Zurückrechnen.
Vorteil von $X_n = L\,X_{n-1}$: Entwicklung der Werte wird sichtbar, gut geeignet für Tabellenkalkulation.
Vorteil von $X_n = L^nX$: Kompakte mathematische Form, die sofort Ergebnisse bringt, geeigneter für CAS.

Fortsetzung Aufgabe 8

a) Sie haben sicher schon ein oder mehrere Verfahren kennen gelernt, die mindestens einen der oben angegebenen drei Aspekte aufweisen. Geben Sie Verfahren und Aspekt(e) an sowie den Zusammenhang, in dem Ihnen das Verfahren begegnet ist.

b) Manchmal interessiert das Langzeitverhalten bei Populationsprognosen. Wie haben Sie Prognosen für die weite Zukunft ... Vergleichen Sie die beiden Rechenwege.

c) Es gibt Funktionen mit Elementen in der Definitionsmenge, die abgebildet sich selbst ergeben, also f(x) = x. ...

c) Der Ansatz X = L · X führt auf ein lineares Gleichungssystem, z.B.:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{I} & (l_{11}-1)\cdot x_1 + l_{12}\cdot x_2 + l_{13}\cdot x_3 = 0 \\ \mathrm{II} & (l_{21}-1)\cdot x_1 + l_{22}\cdot x_2 + l_{23}\cdot x_3 = 0 \\ \mathrm{III} & (l_{31}-1)\cdot x_1 + l_{32}\cdot x_2 + l_{33}\cdot x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Da L bekannt ist, entscheidet die Lösbarkeit des Systems über die Existenz eines oder mehrerer Fixpunkte. Der Nullvektor erfüllt trivialerweise den obigen Ansatz stets, ist jedoch im Sachkontext Populationsmodelle trivial.
Diese Teilaufgabe kann auch in Aufgabe 19 integriert werden.

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 9

Die beiden Aufgaben sind für das Lösen mit der Hand gedacht. Dabei muss die „Dreiecksmatrix" nicht wirklich so aussehen.

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 32 \\ 5 & 2 & -4 & -5 \\ 7 & -1 & 3 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow[3\cdot \mathrm{III}-\mathrm{I}]{\mathrm{II}+2\cdot \mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 32 \\ 19 & 0 & 2 & 65 \\ 19 & 0 & 4 & 73 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}-\mathrm{II}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 32 \\ 19 & 0 & 2 & 65 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Die Lösung ist jetzt ablesbar: $2x_3 = 8$ bedeutet $x_3 = 4$. Eingesetzt in II ergibt sich $19x_1 = 65 - 8 = 57 \Rightarrow x_1 = 3$. Eingesetzt in I folgt $6 - 3x_2 + 20 = 26 - 3x_2 = 32 \Rightarrow 3x_2 = -6$, also $x_2 = -2$ und damit $L = \{(3|-2|4)\}$.

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[2\cdot \mathrm{III}+\mathrm{II}]{4\cdot \mathrm{I}-\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 & 11 \\ 11 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}-\mathrm{II}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 & 11 \\ 6 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Wegen der Dreiecksform gibt es jetzt eine Lösung: $x_1 = -1$.
Eingesetzt in II folgt $-5 - x_2 = 11 \Rightarrow x_2 = -16$.
Aus I folgt damit $x_3 = -2 - 16 - 3 = -21$.
Damit ist $L = \{(-1|-16|-21)\}$

Aufgabe 10

Je größer Atomkerne sind, desto mehr Neutronen brauchen sie als „Kitt", um die sich abstoßenden Protonen zusammenzuhalten. Der Zusammenhang zwischen Kernladungszahl (Protonenzahl) Z und Neutronenzahl N lässt sich näherungsweise durch ein Polynom 3. Grades beschreiben: $N(Z) = a_1 Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3$.
N wird beschrieben als Funktion von Z, die Variable heißt hier statt x also Z.

a) Berechnen Sie a_1, a_2, a_3 so, dass der Graph von N die Punkte Ne(10|10), Zr(40|50) und Fm(100|157) enthält.

b) Prüfen Sie die Qualität des oben beschriebenen Modells für den Zusammenhang von N und Z.

a) Es sind die drei Gleichungen (mit den drei Variablen a_1, a_2 und a_3) zu lösen: $N(10) = 10 \wedge N(40) = 50 \wedge N(100) = 157$. Das Ergebnis von Derive wird geeignet gerundet, sodass folgt $N(Z) = 0{,}903333\,Z + 0{,}01\,Z^2 - 0{,}000033\,Z^3$.

b) *Eine Möglichkeit zur „Qualitäts"-Überprüfung kann z.B. dadurch geschehen zu überprüfen, wie gut die Näherung bei verschiedenen Elementen ist.*

Dazu liegt ein Excel- bzw. Quattro Pro-Arbeitsblatt vor mit zugehörigem Lösungsvorschlag, zu a) entsprechend eine Derive-Datei.

Aufgabe 11

In einem Chemieunternehmen wird die Leitung einer Abteilung von einem neuen Mitarbeiter übernommen. Die Abteilung produziert flüssige Waschmittel, die Produktion liegt derzeit bei täglich 10 Tonnen und sollte nach Ansicht des neuen Abteilungsleiters erhöht werden. Die Firmenleitung wünscht von ihm eine Auskunft über die zu erwartenden Produktionskosten und Gewinne. Der Abteilungsleiter wirft einen Blick in die Produktionsunterlagen und findet folgende Daten.

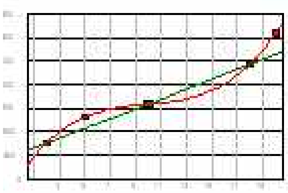
produzierte Menge (in Tonnen)	verursachte Kosten in GE (Geldeinheiten)
2	600
10	1272
18	1944

Diese Aufgabe ist Teil der Abituraufgabe 20.

a) *Das kann graphisch geschehen und auf verschiedene Arten rechnerisch. Eine einfache Möglichkeit besteht hier darin, mit der Steigung zu argumentieren:*
Steigung von (2|600) nach (10|1272): 672 auf 8 in x-Richtg.
Steigung von (10|1272) nach (18|1944): 672 auf 8 in x-Richtg.
Die Steigung ist also in beiden Abschnitten gleich, also liegen sie auf einer Geraden.

Zur Berechnung der Geradengleichung siehe zugehörige Derive-Datei G2-11L.dfw.

b) *Es wird eine Skizze für den ungefähren Verlauf erwartet, bei der die Punkte nicht einfach durch Strecken verbunden werden.*
Man hat 5 Informationen zur Verfügung, aus denen ein Polynom maximal 4. Grades bestimmt werden kann. Es ist dann folgendes Gleichungssystem zu lösen:



$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 600 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 & 1047 \\ 10000 & 1000 & 100 & 10 & 1 & 1272 \\ 104976 & 5832 & 324 & 18 & 1 & 1944 \\ 160000 & 8000 & 400 & 20 & 1 & 2472 \end{array}\right)$$

Als Lösung erhält man folgendes Polynom 3. Grades:

$K(x) = x^3 - 30x^2 + 320x + 72$

Die Berechnung mit der Hand wäre hier sehr fehleranfällig. Im Abitur ohne GTR bzw. CAS würde daher eine solche Teilaufgabe nicht gestellt.

Fortsetzung Aufgabe 11

a) Der neue Abteilungsleiter sieht hier einen linearen Zusammenhang. Bestätigen Sie diesen Zusammenhang.

b) Bei einem genaueren Blick in die Unterlagen findet der Abteilungsleiter zusätzliche Daten:

produzierte Menge (in Tonnen)	verursachte Kosten in GE (Geldeinheiten)
5	1047
20	2472

Man sieht mit bloßem Auge, dass der lineare Ansatz aus Aufgabenteil a) offenbar doch nicht zutrifft. Skizzieren Sie einen möglichen und sinnvollen Graphen durch diese 5 Punkte. Berechnen Sie den zugehörigen Funktionsterm der Kostenfunktion.

a) *Die Aufgabenstellung lässt als Antwort die Gesamtarbeitszeit oder die nach Tätigkeiten aufgeteilte zu. Jedenfalls für die 2. Variante wird das Rechnen mit Vektoren sinnvoll genutzt:*
Arbeitszeiten in Minuten für die drei Artikel B, K und F. Die Reihenfolge der Tätigkeiten sei wie in der Tabelle:
B = (20|10|5), K = (50|5|15) und F = (40|15|8).
Dann ist die (differenzierte) Arbeitszeit für den Auftrag
20 · B + 15 · K + 8 · F = (1470|395|405), also für
Schneiden 1470 Minuten = 24 h 30 min
Schrauben 395 Minuten = 6 h 35 min und
Verpacken 405 Minuten = 6 h 45 min
Gesamt: 2270 Minuten = 37 h 50 min.

b) *Die Stunden müssen in Minuten umgerechnet werden, die Tabelle „richtig" in das Gleichungssystem überführt werden:*

Da 60·(60|18|16) = (3600|1080|960), lautet das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 50 & 40 & 3600 \\ 10 & 5 & 15 & 1080 \\ 5 & 15 & 10 & 960 \end{array}\right) \quad \text{mit } L = \{(24|24|48)\}.$$

Bei der gegebenen Lage können 24 Bettgestelle, 24 Kleiderschränke und 48 Frisierkommoden fertig gestellt werden.
(Siehe auch Aufgabe 14).
Die Derive-Datei mit Lösungsvorschlägen heißt G2-12L.dfw

Aufgabe 12

Eine Möbelfabrik stellt Schlafzimmer-Möbel zum Selbstaufbau her, die aus beschichteten Spanplatten bestehen. Jedes Bauteil wird zunächst von einer Computer gesteuerten Maschine zugeschnitten, die zugleich eventuell nötige Bohrungen vornimmt, dann werden Teile aus Kunststoff oder Metall beigefügt, die zur Verbindung nötig sind, und zum Schluss werden die (hoffentlich) richtigen Bauteile verpackt. Die drei beschriebenen Arbeitsgänge werden nun kurz Schneiden, Schrauben und Verpacken genannt.
Die folgende Tabelle zeigt die Zeiten für jeden Arbeitsvorgang an, bezogen auf Bettgestell, Kleiderschrank und Frisierkommode:

Artikel	Zeitaufwand in Minuten		
	Schneiden	Schrauben	Verpacken
Bettgestell	20	10	5
Kleiderschrank	50	5	15
Frisierkommode	40	15	10

a) Kurzfristig kommt der Auftrag eines Kunden, 20 Bettgestelle, 15 Schränke und 8 Kommoden zu liefern. Wie viel Arbeitszeit muss die Firmenleitung einplanen?

b) Wegen einer Grippe-Epidemie sind einige Mitarbeitrinnen und Mitarbeiter erkrankt. Daher stehen nur 60 Stunden für Schneiden, 18 für Schrauben und 16 für Verpackung pro Arbeitstag bereit. Wie viele Artikel kann der Betrieb unter den genannten Umständen maximal pro Tag herstellen?

Auch eine Standardaufgabe, bei der sie Schwierigkeit darin besteht, die gegebenen Daten korrekt zum Gleichungssystem zu kombinieren. Ist das System gefunden, ist dies auch leicht mit der Hand lösbar:
Das gesuchte Gleichungssystem lautet und ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 25 \\ 3 & 1 & 4 & 25 \\ 2 & 5 & 2 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[2\cdot I - III]{3\cdot I - II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 25 \\ 0 & 5 & 5 & 50 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[II + 5\cdot III]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 25 \\ 0 & 5 & 5 & 50 \\ 0 & 0 & 25 & 50 \end{array}\right)$$

Es können 2 ME der Ostereier-Sorte XXL, 8 ME der Sorte XL und 3 ME der Sorte L produziert werden

Aufgabe 13

Für die Herstellung der Ostereier *L*, *XL* und *XXL* sind die Materialien *Schokolade, Marzipan* und *Trüffel* erforderlich. Der Materialverbrauch pro Mengeneinheit Eier ist in der folgenden Tabelle aufgeführt (in ME):

	Schokolade	Marzipan	Trüffel
L	1	3	2
XL	2	1	5
XXL	3	4	2

Der Betrieb verfügt über 25 ME Schokolade, 25 ME Marzipan und 50 ME Trüffel.
Wie viele Mengeneinheiten der drei Ostereier-Sorten kann die Herstellerfirma produzieren?

Aufgabe 14

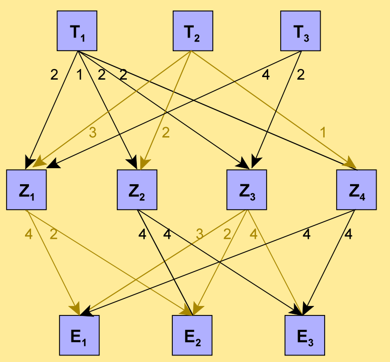
In den Aufgaben 12) und 13) hatten die Gleichungssysteme mit dem Ansatz des „restlosen Aufbrauchens" jeweils eine ganzzahlige Lösung. In der Realität ist es aber zumeist nicht so, dass etwa gelagerte Rohstoffe völlig aufgebraucht werden müssen – im Gegensatz zu vorhandene Arbeitsstunden, die verbraucht werden sollten, so weit es eben möglich ist.
Ändern Sie Aufgabe 12) oder 13) leicht ab, sodass sich z.B. eine nicht ganzzahlige Lösung ergibt oder eine mit negativen Komponenten und deuten Sie die Lösung konkret im Aufgabenkontext. Oder erfinden Sie eine eigene Aufgabe mit einer entsprechend geänderten Problemstellung.

Diese Aufgabe soll zur kritischen Betrachtung von Lösungsmodellen anregen, aber auch von Aufgabenstellungen.
In der Datei G2-14L.dfw sind Vorschläge für eine Änderung von Aufgabe 12, die hier kurz angedeutet werden sollen:
Eine kleine Änderung der vorhandenen Arbeitszeiten führt zwar auf eine nicht ganzzahlige Lösung, die aber durch Rundung (und eventuell probieren) optimiert werden kann, d.h. die vorhandenen Stunden werden weitgehend ausgenutzt.
Eine größere Änderung führt zu einer Lösung mit negativen Komponenten. Andererseits kann das nicht bedeuten, dass unter diesen Bedingungen gar nicht produziert werden kann. Z.B. durch probieren, mit Hilfe von Ungleichungen, ... kann eine mögliche Lösung gefunden werden. Diese kann man gegebenenfalls noch verbessern, vielleicht optimieren.
Haben Schülerinnen oder Schüler V4 (Lineare Optimierung) in der Vorstufe behandelt, können diese hier mit Lösungsstrategien helfen.
Die Frage, ob es denn völlig gleichgültig ist, wie viel von den einzelnen Produkten hergestellt wird oder ob die Produkte völlig unterschiedlich nachgefragt werden, wird sich vielleicht auch stellen.
Und damit neu: Was ist optimal?

Mehrstufige Prozesse / Verflechtungen

Aufgabe 15

Ein Betrieb stellt in einer ersten Produktionsstufe aus drei Bauteilen T_1, T_2, und T_3 vier Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 her. In der zweiten Produktionsstufe werden aus den Zwischenprodukten dann drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 montiert.
Der Materialverbrauch in Mengeneinheiten (ME) ist dem folgenden Graphen zu entnehmen:



Zur Abwicklung eines Kundenauftrages wurden 7000 ME von T_1, 5100 ME von T_2 und 5800 ME von T_3 verarbeitet.
Ermitteln Sie, wie viele ME von den einzelnen Endprodukten E_1, E_2 und E_3 von dem Kunden bestellt worden sind.

Diese Aufgabe ist Teil der Abituraufgabe 21.

Benötigt wird die Matrix TE, welche die Anzahl der benötigten Bauteile T pro Endprodukt E beschreibt. Sie erhält man als Produkt aus den entsprechenden Matrizen TZ und ZE:

$$TE = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 12 & 20 \\ 16 & 14 & 12 \\ 22 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist damit das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 22 & 12 & 20 & 7000 \\ 16 & 14 & 12 & 5100 \\ 22 & 12 & 8 & 5800 \end{array}\right) \text{ mit } L = \{(200|50|100)\}.$$

Der Kunde hat also 200 ME vom Endprodukt E_1 bestellt, 50 ME vom Endprodukt E_2 und 100 ME vom Endprodukt E_3.

Mengeneinheiten müssen nicht zwingend ganzzahlig sein..

Aufgabe 16

Ein Betrieb der Getränkeindustrie produziert in zwei Werken an verschiedenen Standorten Fruchtsäfte.
Im Werk A werden aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 hergestellt.
Im Werk B werden aus den Zwischenprodukten dann die drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt.
Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist durch die beiden folgenden Tabellen gegeben:

Werk A: Rohstoffeinsatz			
$R \rightarrow Z$	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	3	0
R_2	0	6	2
R_3	2	0	2
R_4	1	3	1

Werk B: Zwischenprodukteinsatz			
$Z \rightarrow E$	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	4
Z_2	8	10	1
Z_3	6	2	2

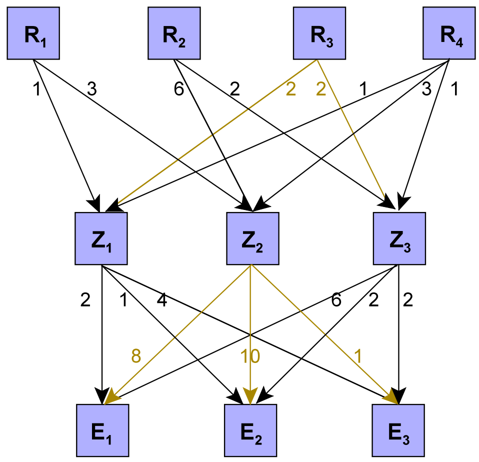
a) Stellen Sie die durch die beiden Tabellen gegebenen Verflechtungen mit einem Graphen dar.

b) Ermitteln Sie, wie groß der Vorrat an den einzelnen Rohstoffen sein muss, damit von den Endprodukten die folgenden ME hergestellt werden können: 150 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 250 ME von E_3.

c) Durch technische Störungen im Produktionsablauf in Werk A kann zur Zeit nur Zwischenprodukt Z_2 hergestellt werden. Erschwerend kommt hinzu, dass sich wegen Renovierungsarbeiten in den Lagerräumen des Werkes B nur geringe Bestände an Zwischenprodukten befinden, nämlich die Zwischenprodukte Z_1 mit 75 ME und Z_3 mit 100 ME.
Ein Kunde bestellt kurzfristig 12 ME von Endprodukt E_3. Dem Kundenwunsch entsprechend werden nun genau die 12 ME von E_3 produziert, wobei aber produktionsbedingt auch die beiden anderen Endprodukte E_1 und E_2 (nach obiger Tabelle) hergestellt werden.

Zeigen Sie, dass sich die oben genannten Zwischenproduktbestände vollständig durch diese Produktion verarbeiten lassen, und bestimmen Sie, wie viele ME der Endprodukte E_1 und E_2 dabei hergestellt werden können und wie viele ME des Zwischenprodukts Z_2 das Werk A dann liefern muss.

a) Es gibt 4 Rohstoffe, 3 Zwischen- und 3 Endprodukte:



b) Die Rohstoff-Endproduktmatrix RE ist wieder Produkt der Matrizen RZ und ZE, also

$$RE = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 10 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 16 & 6 & 12 \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix}$$

Die Lösung berechnet sich durch Multiplikation
$RE \cdot (150|200|250)^T = (11.850|24.300|6.600|13.650)$

c) Aufstellen des Gleichungssystems:
Seien
z_2 = ME vom Zwischenprodukt Z_2,
e_1 = ME vom Endprodukt E_1,
e_2 = ME von E_2 und
$Z = (75|z_2|100)$,
$E = (e_1|e_2|12)$,
dann ist zu lösen $ZE \cdot E = Z$, also

$$\begin{array}{llllllll} \text{I} & 2 \cdot e_1 & + & e_2 & + 48 & = & 75 & \\ \text{II} & 8 \cdot e_1 & + & 10 \cdot e_2 & + 12 & = & z_2 & \Rightarrow e_1 = 11,\ e_2 = 5,\ z_2 = 150. \\ \text{III} & 6 \cdot e_1 & + & 2 \cdot e_2 & + 24 & = & 100 & \end{array}$$

Da das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, lassen sich die Zwischenproduktbestände vollständig durch diese Produktion verarbeiten. Dabei werden 11 ME von E_1 und 5 ME von E_2 produziert, sofern das Werk A 150 ME von Z_2 liefern kann.

Aufgabe 17

Die Abbildung zeigt den durch Umzug bedingten Bevölkerungsaustausch zwischen drei Regionen A, B und C in Anteilen bzw. Wahrscheinlichkeiten jeweils innerhalb eines Jahres. Eingetragen sind dazu die Einwohnerzahlen der Region in Tausend zu Beginn der Modellierung.

a) Begründen Sie, warum die Summe der von einer Region ausgehenden Anteile stets 1 ergeben muss.

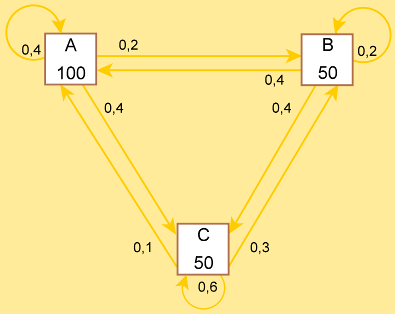
b) Berechnen Sie, wie viele Menschen nach einem Jahr in den Regionen gemäß dem Modell jeweils leben, und begründen Sie Ihr Vorgehen.
Ermitteln Sie einen Rechenweg für eine Prognose nach 2, 3, 10 bzw. n Jahren.

a) Die Bevölkerung jeder der drei Regionen ist in genau drei Gruppen eingeteilt: Gruppe 1: Abwandernde zur Alternative 1, Gruppe 2: Abwandernde zur Alternative 2, Gruppe 3: Bleibende. Zusammen sind das 100 % der Bevölkerung jeder Region.

b) *Bei dieser Aufgabe ist der schwierigste Teil wieder das korrekte Aufstellen der Matrix. Diese wird mit dem „Bevölkerungsvektor“ multipliziert und man erhält die Bevölkerungszahlen ein Jahr später.*
Wenn die Schülerinnen und Schüler mit einem CAS arbeiten können, sollten sie die Prognosen auch ausrechnen.

Fortsetzung Aufgabe 17

c) Falls Sie in b) mit einem Computerprogramm gerechnet haben, variieren Sie die Anteile und interpretieren Sie die Auswirkungen.



Die Bevölkerungszahlen in den 3 Regionen nach einem Jahr:

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 45 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Da die Zeile der Matrix jeweils die Anteile enthält, die in ihrer Region bleiben und die aus den anderen beiden hinzu kommen, ergibt Matrix-Zeile mal Bevölkerungsvektor die Anzahl der Bewohner nach einem Jahr in der Region, die zur Zeile gehört.
In A leben nach einem Jahr laut Modell daher 65 Tausend, in B 45 Tausend und in C 90 Tausend Einwohner.

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der Prognosen nach 2, 3, 10 bzw. n Jahren geschieht nach immer dem gleichen Muster, jeweils für den Exponenten die gewünschte Zahl eingesetzt.
Es zeigt sich, dass laut Modell langfristig A und C ihre Bevölkerungszahlen tauschen.

c) *Nach a) ist bei der Variation darauf zu achten, dass die Summe der Spalten 1 bleiben muss. Ein Beispiel siehe Derive-Datei G2-17L.dfw .*

Aufgabe 18

Spätestens die vorhergehende Aufgabe macht deutlich, dass auch Wachstumsmodelle (hier Bevölkerungswanderung) als mehrstufige Prozesse bzw. lineare Verflechtungen angesehen werden können. Die Modellierung mit Matrizen in der hier besprochenen Weise ist offenbar recht vielfältig einsetzbar.
Sie haben ja schon einige Wachstumsmodelle kennen gelernt.
Erläutern Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten im Vergleich zu dem hier entwickelten Modell.
Ist eines der Wachstumsmodelle, die Sie früher kennen gelernt haben, auch unter anderen Kontexten einsetzbar?

- *Zum einen soll deutlich werden, dass das hier behandelte Wachstumsmodell auch als mehrstufiger Prozess angesehen werden kann, diese Art der Modellierung mit Matrizen also als recht vielseitig erscheint.*
- *Zum anderen bietet es sich an, dieses Wachstumsmodell mit bereits behandelten Wachstumsmodellen zu vergleichen (diskret – kontinuierlich, begrenzt – unbegrenzt, differenziert nach Altersstufen – keine Unterscheidung, ...).*
- *Da lineare Funktionen recht häufig in verschiedenen Kontexten auftauchen (zuletzt z.B. bei der Differentialrechnung), ist klar, dass es sich um ein vielseitiges Modell handelt. Zumindest für die Schulmathematik dürften ähnliche Überlegungen hinsichtlich der Exponentialfunktion schwierig sein.*

4. Lösungsvorschläge zu den Abituraufgaben

Auf den folgenden Seiten sind Lösungsvorschläge für die Abituraufgaben abgedruckt, nicht jedoch die Aufgaben selbst. Sie nehmen jeweils eine Seite ein, enthalten also nur teilweise Zwischenschritte.
Die Lösungsvorschläge sind auch dazu gedacht, sie an Schülerinnen und Schüler auszuteilen. In dem zugehörigen Lernheft sind die Lösungen nicht enthalten.

19. Aufgabe Vegetation (ohne CAS)

a) $$L = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

v_i beschreibt den Anteil der Fläche, die Pflanzen aus Klasse i bedecken, der verbrennt und daher das Wachstum junger Pflanzen begünstigt, also nach 10 Jahren zur Klasse 1 gerechnet wird. Daher stehen diese Zahlen in der 1. Zeile der Matrix, aus der ja die Fläche zu Klasse 1 nach 10 Jahren berechnet wird.

n_i beschreibt den Anteil der Fläche, den Pflanzen aus Klasse i bedecken und der nicht verbrennt. Daher gehört er nach 10 Jahren zur Klasse i+1 (i < 4) bzw. verbleibt in Klasse 4. So stehen n_i für i = 1, 2 und 3 in Zeile i+1, mit der ja die Fläche von Klasse i+1 berechnet wird. In Zeile 4 kommt noch n_4 hinzu, da dieser Anteil von Pflanzen in Klasse 4 verbleibt.

b) Jede Klasse wird unterteilt in zwei Anteile: Der verbrennende Anteil und der nicht verbrennende Anteil. Beide machen 100% aus, also 1.

c) Sei $X_0 = (302|284|314|1100)^T$. Dann ist die Population nach 10 Jahren $X_1 = L \cdot X_0$

$$\begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 302 \\ 284 \\ 314 \\ 1100 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 386 \\ 299 \\ 278 \\ 1037 \end{pmatrix}$$

d) Langfristig streben in diesem Modell die Flächengrößen jeweils gegen feste Werte:
Die Gesamtfläche bleibt nach Vorgaben der Aufgabe unverändert 2000 km^2, und da die Zeilen der Matrix jeweils gleiche Elemente enthalten, ergeben sich jeweils immer dieselben Anteile an der Gesamtfläche:

Anteile der Klassen 1 und 2	$\approx 0{,}185 \cdot 2000 = 370\ km^2$,
Anteil der Klasse 3	$\approx 0{,}18 \cdot 2000 = 360\ km^2$
Anteil der Klasse 4	$\approx 0{,}45 \cdot 2000 = 900\ km^2$.

e) *Es gibt verschiedene Möglichkeiten, z.B.*
$X_{i+1} = f(X_i) = L \cdot X_i$ und D_f = Menge aller Vektoren mit vier Komponenten = Zielmenge.
$g(t) = L^t \cdot X_0$ (für konstante Anfangspopulation X_0) mit $D_f = \mathbb{N}$, Zielmenge wie oben.
Die 2. Darstellung eignet sich eher zur Darstellung von Langzeitprognosen:

Population nach 50 Jahren:
1. Darstellung: $X_5 = f(X_4) = f(f(X_3)) = f(f(f(X_2))) = f(f(f(f(X_1)))) = f(f(f(f(f(X_0)))))$
oder ab hier verbalisiert.
2. Darstellung: $X_5 = g(5) = L^5 \cdot X_0$.

f) $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}07 \\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}93 \end{pmatrix}$$

Die Prozentanteile für's Abbrennen stehen in Zeile 1, $m_{11} = 1$, da Klasse 1 nicht abgebrannt wird, also unverändert bleibt.
In den restlichen Zeilen steht der entsprechende Anteil, der nicht abgebrannt wird, in der Diagonalen, die zugehörige Klasse verkleinert sich entsprechend.

$M \cdot (L \cdot X_i)$ beschreibt den kompletten Vorgang: $X_{i+1} = L \cdot X_i$ liefert die Flächenmaße durch spontane Brände, $X_{neu} = M \cdot X_{i+1}$ schließlich die sich durch gewolltes Abbrennen daraus ergebenden Flächen: $X_{neu} = M \cdot X_{i+1} = M \cdot (L \cdot X_i)$
Die Reihenfolge ergibt sich aus dem Aufgabentext.

19. Aufgabe Vegetation (mit CAS)

a) $$L = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

v_i beschreibt den Anteil der Fläche, die Pflanzen aus Klasse i bedecken, der verbrennt und daher das Wachstum junger Pflanzen begünstigt, also nach 10 Jahren zur Klasse 1 gerechnet wird. Daher stehen diese Zahlen in der 1. Zeile der Matrix, aus der ja die Fläche zu Klasse 1 nach 10 Jahren berechnet wird.

n_i beschreibt den Anteil der Fläche, den Pflanzen aus Klasse i bedecken und der nicht verbrennt. Daher gehört er nach 10 Jahren zur Klasse i+1 (i < 4) bzw. verbleibt in Klasse 4. So stehen n_i für i = 1, 2 und 3 in Zeile i+1, mit der die Fläche von Klasse i+1 berechnet wird. In Zeile 4 kommt noch n_4 hinzu, da dieser Anteil von Pflanzen in Klasse 4 verbleibt.

b) Jede Klasse wird unterteilt in zwei Anteile: Der verbrennende Anteil und der nicht verbrennende Anteil. Beide machen 100% aus, also 1.

c) Sei $X_0 = (302|284|314|1100)^T$. Dann ist die Population nach 10 Jahren
$X_1 = L \cdot X_0$, nach 20 $X_2 = L^2 \cdot X_0$, nach 50 $X_5 = L^5 \cdot X_0$ oder auch $X_2 = L \cdot X_1$, ..., $X_5 = L \cdot X_4$.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 302 \\ 284 \\ 314 \\ 1100 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 386 \\ 299 \\ 278 \\ 1037 \end{pmatrix} \qquad X_5 = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix}^5 \cdot \begin{pmatrix} 302 \\ 284 \\ 314 \\ 1100 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 368{,}5 \\ 378{,}1 \\ 340{,}9 \\ 912{,}3 \end{pmatrix}$$

d) Geht man z.B. von einem konstanten Anfangsvektor X_0 der Flächenmaße aus, ist eine mögliche Funktion: $f(t) = L^t X_0$ mit $D_f = \mathbb{N}$ und Zielmenge = $\{(x_1;x_2;x_3;x_4) \mid x_i \in \mathbb{R}+\}$.
Prognose (in 50 Jahren) = $f(5) = L^5 X_0$. *Es gibt noch andere Darstellungsmöglichkeiten.*

e) Interpretation z.B.:
Ab etwa der 20 Taktrate scheinen sich die Werte bei (371|368|360|901) zu stabilisieren.
Die Lösung kann mit Berechnung der Population, aber auch mit Hilfe der Matrix ermittelt werden. Die verwendete Strategie sollte beschrieben werden und worauf sich die Interpretation gründet, also z.B. für welche Taktraten die Daten vorliegen.

f) Geänderte Matrix unter der Annahme, dass das Abbrennen in einen Zeittakt integriert ist:

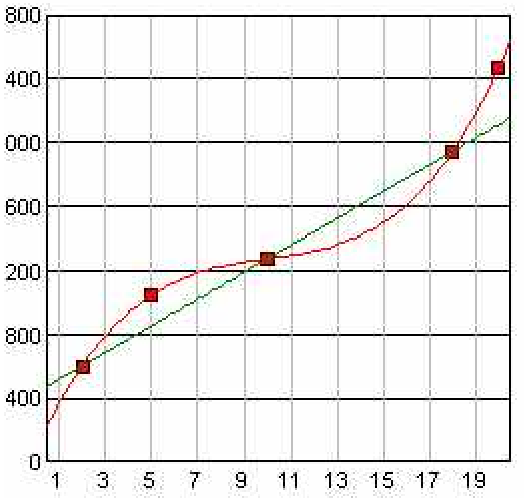
$$\begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}5 & 0{,}256 \\ 0{,}99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}744 \end{pmatrix}$$

Langfristige Auswirkungen sind eine deutliche (und relativ schnelle) Verringerung des Flächenanteils von Klasse 4 bei gleichzeitiger Zunahme der Flächenanteile der übrigen Klassen, etwa relativ zu ihren bisherigen Größen. Das Abbrennen bewirkt also im vorliegenden Modell, dass sich die Brandgefahr schon in einigen Jahrzehnten verringert.
Modellierung des Abbrennens auch als eigenständige Matrix möglich, sodass das Abbrennen am Ende oder zu Beginn eines Zeittaktes ausgeführt wird. Siehe die Aufgabe 19 ohne CAS.

20. Aufgabe Chemieunternehmen

a) *Das kann graphisch geschehen und auf verschiedene Arten rechnerisch. Eine einfache Möglichkeit besteht hier darin, mit der Steigung zu argumentieren:*
Steigung von (2|600) nach (10|1272): 672 auf 8 in x-Richtung
Steigung von (10|1272) nach (18|1944): 672 auf 8 in x-Richtung.
Die Steigung ist also in beiden Abschnitten gleich, also liegen sie auf einer Geraden.

b) *Es wird eine Skizze für den ungefähren Verlauf erwartet, bei die Punkte nicht einfach durch Strecken verbunden werden.*
Man hat 5 Informationen zur Verfügung, aus denen ein Polynom maximal 4. Grades bestimmt werden kann. Es ist dann folgendes Gleichungssystem zu lösen:



$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 600 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 & 1047 \\ 10000 & 1000 & 100 & 10 & 1 & 1272 \\ 104976 & 5832 & 324 & 18 & 1 & 1944 \\ 160000 & 8000 & 400 & 20 & 1 & 2472 \end{array}\right)$$

Als Lösung erhält man folgendes Polynom 3. Grades:

$K(x) = x^3 - 30x^2 + 320x + 72$

Die Berechnung mit der Hand ist hier sehr fehleranfällig. Im Abitur ohne GTR bzw. CAS würde daher eine solche Teilaufgabe nicht gestellt.

c) $K'(x) = 3x^2 - 60x + 320 \stackrel{!}{=} 0$ hat keine reelle Lösung. Folglich hat K keine Extremstellen.
Dies bedeutet, dass K als kubische Funktion mit positivem Leitkoeffizienten streng monoton wachsend ist. Dies ist charakteristisch für die betriebliche Kostenentwicklung, da die Erhöhung der Produktionsmenge x stets mit erhöhten Kosten K(x) verbunden ist.

d) Die Gleichung der Erlösfunktion lautet $E(x) = -5x \cdot (x - 66) = -5x^2 + 330x$.
Hierbei handelt es sich um die Gleichung einer quadratischen Funktion mit den Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 66$. Da bei einer quadratischen Funktion die Nullstellen symmetrisch zur x-Koordinate des Scheitelpunktes liegen und der Graph der Erlösfunktion E eine nach unten geöffnete Parabel ist, besitzt die Erlösfunktion somit ein Maximum mit positivem Funktionswert an der Stelle x = 33.
Zulässig, aber weniger elegant ist die Berechnung der Extremstelle mit Hilfe der Ableitungen.

e) $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 25x^2 + 10x - 72$. Hieraus erhält man $G'(x) = -3x^2 + 50x + 10$.
Der Ansatz $G'(x) \stackrel{!}{=} 0$ führt zu den beiden Lösungen $x_1 = \frac{25}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{655}$ und $x_2 = \frac{25}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{655}$

Für die gesuchte Maximalstelle kommt wegen $x \geq 0$ nur die Stelle $x_2 \approx 16{,}86$ in Frage. Aus dem typischen Verlauf einer kubischen Funktion mit negativem Leitkoeffizienten schließt man, dass ein Maximum nur bei $x_2 \approx 16{,}86$ liegen kann.
Oder: Die Überprüfung an Hand der zweiten Ableitung der Gewinnfunktion ergibt:
$G''(x) = -6x + 50$ und $G''(x_2) < 0$.
Somit wird der Gewinn bei der Produzierten Menge x_2 maximal, der Gewinn beträgt etwa 2410,47 GE, denn $G(x_2) \approx 2410{,}72$.

f) Unter der Annahme einer ganzrationalen Funktion 3. Grades als Kostenfunktion erhält man den maximalen Gewinn bei einer Produktion von knapp 17 Tonnen Waschmittel. Der neue Abteilungsleiter hat also Recht mit seiner Forderung, die Produktion müsse erhöht werden.

21. Aufgabe Kalkulation

a) <u>Ermitteln des Bestellvolumens:</u>
Benötigt wird die Matrix TE, welche die Anzahl der benötigten Bauteile T pro Endprodukt E beschreibt. Sie erhält man als Produkt aus den entsprechenden Matrizen TZ und ZE:

$$TE = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 12 & 20 \\ 16 & 14 & 12 \\ 22 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Zu lösen ist damit das lineare Gleichungssystem $\left(\begin{array}{ccc|c} 22 & 12 & 20 & 7000 \\ 16 & 14 & 12 & 5100 \\ 22 & 12 & 8 & 5800 \end{array}\right)$ mit $L = \{(200|50|100)\}$.

Der Kunde hat also 200 ME vom Endprodukt E_1 bestellt, 50 ME vom Endprodukt E_2 und 100 ME vom Endprodukt E_3.

<u>Gesamtkosten K des Kundenauftrags:</u>
Diese setzen sich zusammen aus den Herstellungskosten H_Z für die Zwischenprodukte und den Fertigungskosten F_E für die Endprodukte: $K = H_Z + F_E$

Für die Kundenbestellung benötigt man $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 600 \\ 1100 \\ 1200 \end{pmatrix}$ Zwischenprodukte, die Kosten ergeben sich daher aus $(13|32{,}5|26|19{,}5) \cdot (900|600|1100|1200) = 11.700+19.500+28.600+23.400$, also $H_Z = 83.200$.

$F_E = (20|10|27) \cdot (200|50|100) = 4.000 + 500 + 2.700 = 7.200$.

Hieraus ergibt sich für die Gesamtkosten K des Auftrages an GE: K = 83.200 + 7.200 = 90.200.

Der Mindestverkaufspreis für alle drei Endprodukte muss wenigsten die Kosten decken: Es werden 350 ME Endprodukte verkauft, also pro ME K/350 = 258,28571..., gerundet 259.

Der zugehörige Mindestverkaufspreis für alle drei Endprodukte beträgt 259 GE, damit der Betrieb keinen Verlust macht.

b) <u>Nachweis des Mengenverhältnisses:</u>
Die Absatzmenge von E_2 sei gleich t, dann gilt gemäß des vorgegebenen Mengenverhältnisses von 3t:t:2t, dass die Absatzmenge von E_1 gleich 3t und von E_3 gleich 2t betragen muss.

Daraus ergibt sich als Bedarf für die Bauteile $\begin{pmatrix} 22 & 12 & 20 \\ 16 & 14 & 12 \\ 22 & 12 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118t \\ 86t \\ 94t \end{pmatrix}$,

das Mengenverhältnis der benötigten Bauteile ist also 118t : 86t : 94t.

<u>Beschaffung der Bauteile:</u>
Nach der vorherigen Rechnung muss gelten $118\,t = 17.700 \Leftrightarrow t = 150$.

Hieraus ergibt sich, dass von den Bauteilen T_2 12.900 ME und von T_3 14.100 ME beschafft werden müssen. An Endprodukten können 450 ME von E_1, 150 ME von E_2 und 300 ME von E_3 hergestellt werden.

c) Aus den Herstellkosten pro ME der Zwischenprodukte ist zu erkennen, dass die eingesparte ME des Zwischenproduktes Z_2 eine Kostenersparnis von 32,5 GE erbringt. Die Verdreifachung der Fertigungskosten pro ME des Endproduktes E_2 von 10 GE auf 30 GE führt zu Mehrkosten von 20 GE. Die Mehrkosten reduzieren die Kostenersparnis zwar, aber es ergibt sich doch eine Ersparnis von 12,5 GE pro ME von E_2. Der Vorschlag ist somit positiv zu beurteilen.