Lernheft

Lernheft

Kompetenzen

- Sie beherrschen den Umgang mit den üblichen Verknüpfungen zwischen Vektoren und Matrizen (Vektoraddition, Multiplikation mit Skalar, Skalarprodukt, Addition und Multiplikation von Matrizen, Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar, Multiplikation von Matrix und Vektor)
- Sie modellieren einfache diskrete Wachstumsprozesse z.B. mit dem Modell von Leslie und erklären dessen Besonderheiten (Einteilung der Population in Altersgruppen, Rekursivität), auch im Hinblick auf andere Wachstumsmodelle, berechnen Wachstumsprognosen über eine und zwei Zeitperioden und machen mit Hilfe eines CAS Aussagen zum Langzeitverhalten der Population
- Sie modellieren einfache Verflechtungen (betriebswirtschaftliche Modelle)
- Sie erstellen und lösen lineare Gleichungssysteme innerhalb verschiedener Sachkontexte und deuten die Lösungen sachgerecht.

Autor: Winfried Euba
Version 1.11 vom 14. Januar 2006

Inhalt

Matrizen und Vektoren als Datenspeicher

Worum geht's eigentlich?

Es geht um eine sehr häufig vorkommende Anwendung der Mathematik, die Ihnen garantiert schon oft begegnet ist. Und dabei sollen uns die innermathematischen Hintergründe (und Möglichkeiten) etwas genauer interessieren.
In Gruppenarbeit werden Sie versuchen, einige dieser Hintergründe zu entdecken, vielleicht finden Sie auch eine bisher ungeahnte Möglichkeit!

Arbeitsblatt

Sammeln Sie Beispiele, bei denen Matrizen oder Vektoren verwendet werden oder werden könnten. Dabei kann es sich um irgendwelche Daten handeln, die als Zahlen, Zeichen, Zeichenketten, usw. auftreten.
Schauen Sie Ihr Mathematik-Heft zum letzten Halbjahr an, vielleicht haben Sie ja auch noch ältere Mathematik-Hefte.

Diese Art der Datenspeicherung taucht auch sehr oft außerhalb der Mathematik auf.

Sehen Sie also in anderen Schulunterlagen, Zeitungen, Zeitschriften und Büchern nach Beispielen, oder auch im Internet.
Sicher schlummern auch mehrere Beispiele auf Ihrem Computer, von denen Sie vielleicht gar nichts wissen...

Sammeln

Neben dem Sammeln geht es jedoch darum, Strukturen bei diesen „Gebilden“ zu entdecken:

Strukturen

Wann und wie können Vektoren untereinander, Matrizen untereinander, Vektoren mit Matrizen
- verglichen werden,
- verknüpft werden?

Was für Verknüpfungen sind das und wie rechnet man konkret?

Gibt es auch Verknüpfungen von Matrizen und Vektoren mit anderen Sorten von Elementen (außer Matrizen und Vektoren)?



Diese Suche kann man auf mindestens zwei Arten anstellen:

① Man sucht nach Vergleichen oder Verknüpfungen, die für das betrachtete Beispiel und vielleicht für viele ähnliche Beispiele einen Sinn ergeben.

② Man sucht aus reiner Freude am Finden von Vergleichs- bzw. Verknüpfungsmöglichkeiten.

Ein rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten *(m und n sind natürliche Zahlen)* heißt ***m × n - Matrix*** *(sprich: m kreuz n Matrix)*

Eine Matrix, die nur aus einer Zeile oder einer Spalte besteht, heißt auch Zeilen- oder Spalten-***Vektor***.
Sie kennen vielleicht den Ausdruck ***n-Tupel*** für einen Zeilenvektor.

1. Vergleiche und Verknüpfungen

1.1 Vergleiche

Zwei Vektoren kann man vergleichen, wenn sie jeweils gleich viele Komponenten enthalten. Der Vergleich geschieht komponentenweise. Eine Anordnung ist dabei aber im Allgemeinen nicht möglich.

Beispiele (Vektoren):

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4{,}5 \\ 12{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4{,}5 \\ 12{,}3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -4{,}5 \\ 12{,}3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2{,}1 \\ -2{,}3 \\ 15 \end{pmatrix}$$

aber (1|2|3) ist nicht vergleichbar mit (1|2).

Zwei Matrizen sind nur vergleichbar, wenn sie in ihrer Zeilen- und Spaltenzahl übereinstimmen. Der Vergleich geschieht ebenfalls komponentenweise, eine Anordnung ist im Allgemeinen nicht möglich.

Beispiele (Matrizen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

aber $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ist nicht vergleichbar mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

1.2 Verknüpfungen

→	Vektor	Matrix
Zahl (Skalar)	**Addition** nicht definiert **Multiplikation** Jede Komponente des Vektors wird mit der Zahl multipliziert (Vervielfachung eines Vektors) <u>Beispiel</u> 4 · (1|−2,3) = (4|−9,2)	**Addition** nicht definiert **Multiplikation** Jede Komponente der Matrix wird mit der Zahl multipliziert. <u>Beispiel</u> $5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -15 & 20 \end{pmatrix}$
Vektor	**Addition** Vektoren mit gleich vielen Komponenten werden addiert, indem man die jeweiligen Komponenten addiert. <u>Beispiel</u> (1|5|3) + (−1|2|0) = (0|7|3) **Multiplikation** Ergebnis Skalar (*Skalarprodukt*): Zwei Vektoren mit gleich vielen Komponenten werden multipliziert, indem man die jeweiligen Komponenten multipliziert und diese Produkte aufaddiert. <u>Beispiel</u> (1|5|3) · (−1|2|0) = −1+10+0 = 9 Ergebnis Vektor wird hier nicht besprochen	**Addition** nicht definiert **Multiplikation** Analog dem Skalarprodukt. Bedingung ist, dass die Matrix so viele Zeilen hat wie der (Zeilen-) Vektor Komponenten. Das Ergebnis ist ein Zeilenvektor, der so viele Komponenten hat wie die Matrix Spalten: <u>Beispiel</u> $(1\|2\|-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = (7\|-7)$
Matrix	**Addition** nicht definiert **Multiplikation** Analog dem Skalarprodukt. Bedingung ist, dass die Matrix so viele Spalten hat wie der (Spalten-) Vektor Komponenten. Das Ergebnis ist ein Spaltenvektor, der so viele Komponenten hat wie die Matrix Zeilen: <u>Beispiel</u> $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$	**Addition** Stimmen zwei Matrizen in der Zeilen- und Spaltenzahl jeweils überein, können Sie komponentenweise addiert werden. <u>Beispiel</u> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ **Multiplikation** Analog dem Skalarprodukt. **Bedingung**: Spaltenanzahl der 1. Matrix = Zeilen 2. Matrix: a×b-Matrix · b×c-Matrix = a×c-Matrix: <u>Beispiel</u> $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -3 & 8 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Möglicherweise haben Sie sich Vergleiche oder Verknüpfungen überlegt, die oben nicht aufgeführt sind. Die heute üblicherweise verwendeten Verknüpfungen haben ihre Grundlage im historischen Entstehungsprozess innerhalb der Geometrie und Physik, verbunden mit innermathematischen Überlegungen. Vielleicht finden Sie Gründe, die aus der Sicht der Mathematik oder Physik gegen eine Ihrer Überlegungen sprechen.

1.3 Beispiele

Beispiel 1

Eine Schulkantine benötigt für das neu eingeführte Angebot von Croques Bestellungen, damit die vorgehaltenen Croques den Wünschen der Kunden entspricht.
Im Oberstufenraum und in den Klassen liegen Listen, in die man eintragen muss, welche Füllung man möchte: Salat, Schinken, Schinken mit Salat, Schinken mit Käse, Käse. Klassensprecher und Oberstufensprecher addieren die Bestellungen für ihre Klasse bzw. die Oberstufe und tragen die Ergebnisse in ein Formular ein:

Salat	Schinken	Schinken mit Salat	Schinken mit Käse	Käse

Am ersten Tag des Angebots haben nur wenige Schülerinnen und Schüler mitbekommen, dass Bestellungen notwendig sind. Aber immerhin gehen folgende fünf Bestellungen in der Kantine ein:

$(4|3|0|5|2)$, $(0|1|4|0|1)$, $(2|3|1|2|2)$, $(1|1|2|2|0)$, $(3|0|4|4|2)$.

a) Wie viel wurde von jeder Sorte bestellt?

b) Wie viele Croques wurden insgesamt bestellt?

c) Welche Einnahmen kann die Kantine erwarten, wenn sie nebenstehende Preise nimmt?

d) Wie groß ist die Bestellung der mittleren Gruppe am zweiten Tag im Einzelnen, wenn jeweils genau doppelt so viele Croques bestellt werden?

Lösungsvorschlag

a) Wir addieren die Vektoren, indem wir die Komponenten addieren: Vektoraddition
$(4|3|0|5|2) + (0|1|4|0|1) + (2|3|1|2|2) + (1|1|2|2|0) + (3|0|4|4|2)$
$= (4+0+2+1+3|3+1+3+1+0|0+4+1+2+4|5+0+2+2+4|2+1+2+0+2)$
$= (10|8|11|13|7)$
Es wurden also folgende Croques bestellt:

Salat	Schinken	Schinken mit Salat	Schinken mit Käse	Käse
10	8	11	13	7

b) Es müssen lediglich alle Komponenten des Ergebnis-Vektors addiert werden: $10 + 8 + 11 + 13 + 7 = 49$. Addition
Es wurden also insgesamt 49 Croques bestellt

c) Die dritte Frage wird beantwortet, wenn jede Komponente des Ergebnis-Vektors mit dem zugehörigen Preis multipliziert wird und die Produkte dann aufsummiert werden. Wir berechnen also das Skalarprodukt: Skalarprodukt

$$(10|8|11|13|7)\cdot\begin{pmatrix}2{,}00\\2{,}50\\2{,}75\\3{,}00\\2{,}50\end{pmatrix}$$

$= 10 \cdot 2{,}00 + 8 \cdot 2{,}50 + 11 \cdot 2{,}75 + 13 \cdot 3{,}00 + 7 \cdot 2{,}50 = 126{,}75$
Die Kantine erwartet also Einnahmen in Höhe von 126,75 €.

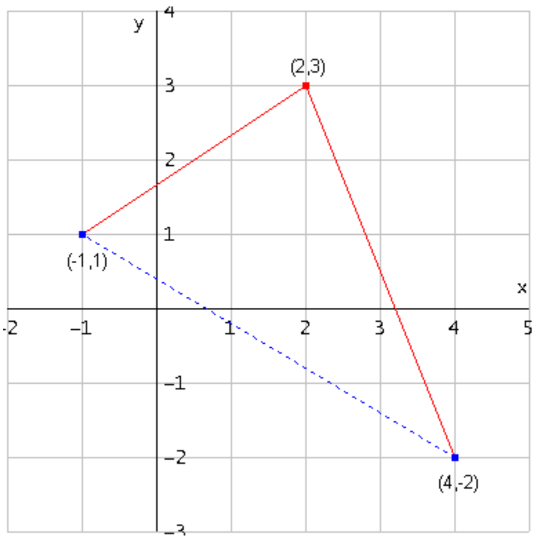
Multiplikation mit Skalar

d) Diese Frage lässt sich schlicht mit Skalar-Multiplikation beantworten: $2 \cdot (2|3|1|2|2) = (4|6|2|4|4)$.
Die mittlere Gruppe hat daher folgen Croques bestellt:
4 mit Salat, 6 mit Schinken, 2 mit Schinken und Salat,
4 mit Schinken und Käse und 4 mit Käse.

Beispiel 2

Darstellung im Koordinatensystem

Bei Ihrem Arbeitsauftrag zu Beginn dieser Einheit haben einige von Ihnen auch an die graphische Darstellungsmöglichkeit von Vektoren gedacht, jedenfalls wenn ein Vektor 2 oder 3 Komponenten aufweist. Sie alle kennen Darstellungen im Koordinatensystem. Ein Punkt in diesem System wird normalerweise mit 2 (oder 3) Koordinatenangaben eindeutig gekennzeichnet:



Die Eingabe der Matrix $\begin{pmatrix}-1 & 1\\2 & 3\\4 & -2\end{pmatrix}$ ergibt in Derive die nebenstehende Grafik, wobei Derive so eingestellt ist, dass die drei Punkte $(-1,1)$, $(2,3)$ und $(4,-2)$ verbunden werden.
Jede Zeile der Matrix wird also als Vektor interpretiert, der einen Punkt im Koordinatensystem darstellt.

Wiederholung

Wäre in der Skizze etwa eine Flugroute dargestellt, so könnte z.B. die Entfernung von $(-1,1)$ zu $(2,3)$ interessieren. Wie man die berechnen kann? Richtig! Mit dem Satz des Pythagoras: $\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} \approx 3{,}6$.
In x-Richtung bewegen wir uns nämlich um 3 Einheiten, in y-Richtung um 2.
Analog ist es mit der Entfernung von $(2,3)$ zu $(4,-2)$: $\sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}4$
Und wie erhält man nun die Entfernung vom ersten Punkt $(-1,1)$ zu letzten $(4,-2)$, also die „Luftlinie" zwischen diesen Punkten? Genau: $\sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}8$.

Betrachtet man die Verbindungslinien zwischen den Punkten als Vektorpfeile, ergeben sich weitere Überlegungen...

2. Anwendung Populationsmodell

Populationsmodell

In dieser Aufgabe geht es um eine Population einer speziellen Possum-Art in einem National-Park in Australien. Nach einer Beobachtung dieser Population kam man zu folgenden Daten:

Alter (Jahre)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
Population (Anzahl)	403	157	102	52	11
davon Anzahl weiblich	194	82	55	22	6

Keines der Tiere wurde älter als 5 Jahre.

Bei der Erforschung der Gruppe interessierte auch die Geburtenrate der verschiedenen Altersgruppen (es gebären natürlich nur Weibchen). Dazu wurde die Anzahl der geborenen weiblichen Tiere in einem Jahr dividiert durch die Anzahl der weiblichen Tiere der entsprechenden Altersgruppe zu Beginn eines Jahres. Es ergaben sich diese Werte:

Alter (Jahre)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
Geburtenrate	0	1,3	1,8	0,9	0,2

Auch die Überlebensrate wurde beobachtet. Damit ist derjenige Prozentsatz von Tieren einer Altersgruppe gemeint, der mindestens bis ins nächste Jahr überlebt. Für die weiblichen Tiere wurden dieselben Werte ermittelt wie für die gesamte Population:

Alter (Jahre)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
Überlebensrate	0,6	0,8	0,8	0,4	0

Aufgabe

a) Berechnen Sie aus den vorliegenden Daten die Anzahl der weiblichen Tiere innerhalb jeder Altersgruppe im Jahr, welches auf die Untersuchung folgt.

b) Berechnen Sie aus den gegebenen Daten die Anzahl der gesamten Possum-Population nach 2, 3, 4 und 5 Jahren.

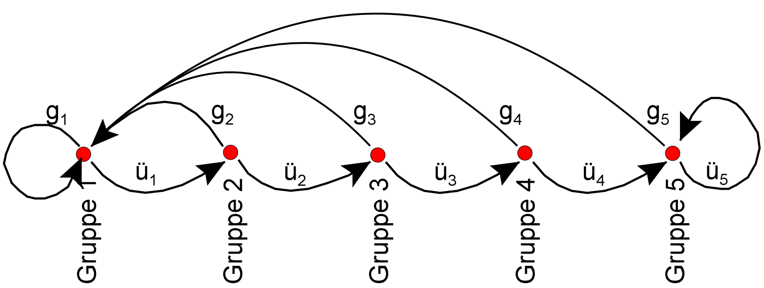
Beschreiben Sie, wie Sie bei der Berechnung vorgehen.

Wie ließe sich die Berechnung der Population etwa nach 5 Jahren durchführen, ohne dabei die Werte für die Jahre 2, 3 und 4 zu verwenden?

Lösungsvorschläge

Zur Datenermittlung wurde die Population in 5 Alters-Gruppen unterteilt, von denen jeweils die Überlebensrate $ü_i$ und die Geburtenrate g_i ermittelt wurde. Der folgende Graph visualisiert diesen Sachverhalt:

Leslie-Modell
- Population in Altergruppen unterteilt Übergänge zwischen den Gruppen
- Überlebensrate
- Geburtenrate



- Berechnung in Zeittakten mit der
- Leslie-Matrix

a) Der Sachverhalt kann rechnerisch als Matrix dargestellt werden, die mit der Population der weiblichen Tiere multipliziert wird.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1,3 & 1,8 & 0,9 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 194 \\ 82 \\ 55 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 226,6 \\ 116,4 \\ 65,6 \\ 44 \\ 8,8 \end{pmatrix}$$

Formal: $L \cdot X_0 = X_1$, wobei L die Leslie-Matrix ist und X_i der Populationsvektor zur Zeit i.
Nach dem Modell ist in einem Jahr dieser Bestand an weiblichen Tieren zu erwarten ist:

Alter (Jahre)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
Population weiblich	227	116	66	44	9

b) Die exakten oder gerundeten Ergebnisse des Vorjahres werden wieder mit obiger „Leslie-Matrix" multipliziert: $X_2 = L \cdot X_1$.
Einfacher ist es jedoch, jeweils die entsprechende Potenz der Matrix mit der Ausgangspopulation zu multiplizieren, denn $X_2 = L \cdot X_1 = L \cdot (L \cdot X_0) = (L \cdot L) \cdot X_0 = L^2 \cdot X_0$. Dabei entstehen dieselben Ergebnisse, wie wenn mit den „exakten" (nicht ganzzahligen) Vorjahresergebnissen gerechnet würde. DERIVE liefert folgende Ergebnisse:

nach 2 Jahren
Population weiblich

$$\begin{pmatrix} 0 & 1{,}3 & 1{,}8 & 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 194 \\ 82 \\ 55 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 310{,}76 \\ 135{,}96 \\ 93{,}12 \\ 52{,}48 \\ 17{,}60 \end{pmatrix}$$

Gerundet ist daher nach dem vorliegenden Modell in zwei Jahren etwa dieser Bestand an weiblichen Tieren zu erwarten:

Alter (Jahre)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
Population weiblich	311	136	93	52	18

Es sind es 610 weibliche Tiere, was etwa die Hälfte des Gesamtbestandes ausmacht. Also sind etwa **1220** Possums nach zwei Jahren zu erwarten.

nach 3 Jahren
Population weiblich

$$\begin{pmatrix} 0 & 1{,}3 & 1{,}8 & 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 194 \\ 82 \\ 55 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 395{,}116 \\ 186{,}456 \\ 108{,}768 \\ 74{,}496 \\ 20{,}992 \end{pmatrix}$$

Analog sind etwa 395+186+109+74+21 = 786 weibliche Tiere nach drei Jahren vorhanden, also umfasst die gesamte Possum-Population etwa **1572** Tiere.

nach 4 Jahren
Population weiblich

$$\begin{pmatrix} 0 & 1{,}3 & 1{,}8 & 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}^4 \cdot \begin{pmatrix} 194 \\ 82 \\ 55 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 509{,}42 \\ 237{,}07 \\ 149{,}16 \\ 87{,}01 \\ 29{,}80 \end{pmatrix}$$

Ebenso sind damit etwa 509+237+149+87+30 = 1012 weibliche Tiere nach vier Jahren vorhanden, also umfasst die gesamte Possum-Population etwa **2024** Tiere.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1{,}3 & 1{,}8 & 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}^5 \cdot \begin{pmatrix} 194 \\ 82 \\ 55 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 660{,}96 \\ 305{,}65 \\ 189{,}66 \\ 119{,}33 \\ 34{,}81 \end{pmatrix}$$

nach 5 Jahren Population weiblich

Nach fünf Jahren schließlich sind etwa 661+306+190+119+35 = 1311 weibliche Tiere vorhanden, also umfasst die gesamte Possum-Population etwa **2622** Tiere.

Die Berechnung der Gesamtpopulation nach n Jahren ließe sich insgesamt so durchführen:

Gesamtpopulation direkt

$$(1|1|1|1|1) \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1{,}3 & 1{,}8 & 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 403 \\ 157 \\ 102 \\ 52 \\ 11 \end{pmatrix} \right)$$

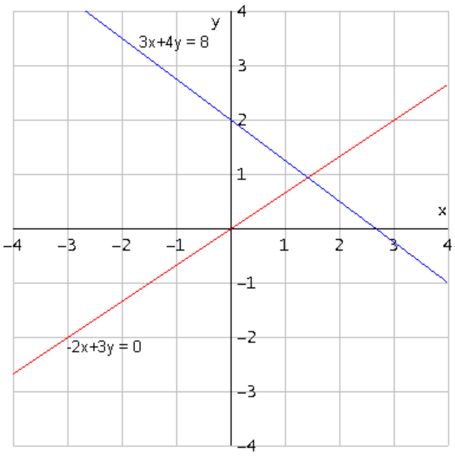
Die Geburtenrate kann auf die Gesamtpopulation bezogen werden, denn etwa die Hälfte der Tiere ist weiblich, also auch etwa die Hälfte der geborenen Tiere. Die Geburtenrate war ja das Verhältnis der weiblichen geborenen Tiere zu den weiblichen Tieren, dieser Bruch wird folglich mit 2 erweitert.
Der Einheitsvektor ergibt im Skalarprodukt die Summe der einzelnen Komponenten; so wird die Zahl aller Tiere in den einzelnen Altersgruppen aufsummiert.
Mit dieser Rechnung ergibt die Gesamtzahl der Tiere nach 2 Jahren 1.207, nach 3 Jahren 1.561, nach 4 Jahren 2.004, nach 5 Jahren 2.596. Unterschiede zu obigen Rechnungen treten auf, da die Anzahl der weiblichen Tiere nicht exakt die Hälfte der Gesamtpopulation ist.

3. Anwendung Lineare Gleichungssysteme

3.1 Lösungsverfahren an Beispielen

Wiederholung
aber in Matrix-Schreibweise

Vermutlich erinnern Sie sich noch daran, dass Sie in die Mittelstufe den Schnittpunkt zweier Geraden berechnet haben. Zu solchen Aufgaben gehörte es auch zu überlegen, ob es denn tatsächlich einen Schnittpunkt gibt.



So eine Aufgabe ist etwa, den Schnittpunkt der zwei Geraden $-2x + 3y = 0$ und $3x + 4y = 8$ zu berechnen. Dazu kann man erst einmal eine Skizze anfertigen. Zwar schneiden sich die Geraden tatsächlich (wieso hätten Sie das schon an den beiden Gleichungen sehen können?), doch die Koordinaten des Schnittpunktes sind leider nicht ganzzahlig. Also muss man rechnen, „zwei Gleichungen mit zwei Variablen“:

$\begin{matrix} -2x + 3y = 0 \\ 3x + 4y = 8 \end{matrix}$, was wir jetzt auch $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ schreiben können oder, da die Namen der Variablen ja unwichtig sind, besonders kurz $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 8 \end{array}\right)$.

Sie haben mehrere Verfahren kennen gelernt, ich möchte nur eins aufgreifen, das sich gut zur geplanten Verallgemeinerung eignet: Man multipliziert beide Gleichungen jeweils so mit einer Zahl, dass bei der Addition der beiden (multiplizierten) Gleichungen eine Variable wegfällt. Das Verfahren heißt daher auch **Eliminationsverfahren**.

Eliminationsverfahren

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II}\cdot 2]{\mathrm{I}\cdot 3} \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 9 & 0 \\ 6 & 8 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II}+\mathrm{I}]{} \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 9 & 0 \\ 0 & 17 & 16 \end{array}\right)$$

Die Gleichung II lautet jetzt $17\,y = 16$, also ist $y = \frac{16}{17} \approx 0{,}9$.

Dieses Ergebnis setzen wir in Gleichung I ein und erhalten

$-6x + 9\frac{16}{17} = 0$, oder $6x = 9\frac{16}{17} \Rightarrow x = \frac{3\cdot 16}{2\cdot 17} = \frac{24}{17} \approx 1{,}4$.

Die Koordinaten des Schnittpunktes lauten daher

$\left(\frac{24}{17}\,\middle|\,\frac{16}{17}\right) \approx (1{,}4|0{,}9)$, was ja der Zeichnung entspricht.

Das Verfahren wird zunächst auf drei Gleichungen mit drei Variablen erweitert. Sie werden sehen, dass es theoretisch auf eine beliebige Zahl von Gleichungen angewendet werden kann.

3 Gleichungen mit
3 Variablen
(vielleicht schon bekannt)

Wir betrachten jetzt das nebenstehende Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit drei Variablen $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Zunächst wird die erste Variable aus Gleichung II und III eliminiert:

aus 3 Gleichungen mit 3 Variablen
werden 2 Gleichungen mit 2 Variablen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -7 & -5 & -26 \\ 0 & -7 & -10 & -31 \end{array}\right)$$

Die letzten beiden Gleichungen haben nun nur noch zwei Variable. Sie können daher jetzt wie im ersten Beispiel weiterrechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-3\cdot\text{I}]{\text{II}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -7 & -5 & -26 \\ 0 & -7 & -10 & -31 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-\text{II}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -7 & -5 & -26 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

aus 2 Gleichungen mit 2 Variablen wird 1 Gleichung mit einer Variablen

Die Lösungsmenge kann jetzt allein mit dem letzten System berechnet werden: Die letzte Zeile (Gleichung III) liefert $-5z = -5$, also $z = 1$ (wobei wir der letzten Spalte die Variable z zugewiesen haben).
Setzt man das Ergebnis in Gleichung II ein, erhält man $-7y - 5 = -26$ oder $7y = 21$ und damit $y = 3$.
Alles eingesetzt in Gleichung I ergibt $x + 6 + 3 = 11$, woraus $x = 2$ folgt.
Die Lösungsmenge ist daher $\{(2|3|1)\}$.

Ziel des Verfahrens

Ziel bei der Eliminierung ist also, eine „Dreiecksform" bei der Matrix herzustellen, Sie können dann von unten nach oben gehend die Lösungen durch Einsetzen erhalten.
Allerdings darf man das jedenfalls beim Ausrechnen mit der Hand nicht ganz wörtlich nehmen, da man bei der Elimination auch auf günstige Rechnungen achten sollte. In obigem System hätte man mit der Elimination auch jeder der beiden anderen Variablen beginnen können, ohne die Berechnung zu verkomplizieren.

3.2 Gaußsches Eliminationsverfahren

Das Gaußsche Eliminationsverfahren basiert auf folgenden Umformungen einzelner Gleichungen:

Werkzeuge

a) Multiplizieren einer Gleichung mit einer Zahl ($\neq 0$)
b) Addition zweier Gleichungen.

Durch diese Umformungen ändert sich die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht, sie heißen daher auch Äquivalenzumformungen.

Das Verfahren besteht aus folgenden Schritten:

1. Gleichungssystem gegebenenfalls neu ordnen (Gleichungen vertauschen, um Berechnungen zu erleichtern).
2. Mit Hilfe von Gleichung I die erste Variable der zweiten und jeder weiteren Gleichung eliminieren (es kann sich beim Rechnen mit der Hand auch um die zweite, dritte, ... Variable handeln). Damit erreicht man, dass aus n Gleichungen mit n Variablen $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ Variablen werden.
3. Gleichung I wird nicht mehr angetastet.
   Mit Hilfe der aktuellen Gleichung II wird analog die zweite (oder eine andere noch vorhandene) Variable in allen folgenden Gleichung eliminiert.
   Die Anzahl der Gleichungen und Variablen wird um (mindestens) 1 vermindert.
4. Das Verfahren fortführen analog Schritt 3 mit der jeweils folgenden Gleichung, bis das Verfahren nicht mehr fortgesetzt werden kann,
5. Im Falle der eindeutigen Lösbarkeit des Gleichungssystems bleibt als letzte Gleichung eine Gleichung mit einer Unbekannten. Die Lösung für diese Variable ergibt eingesetzt in die Dreiecksmatrix sukzessive die Gesamtlösung.

Das Verfahren wurde in voller Allgemeinheit erstmals wohl 1810 von CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855) veröffentlicht.

3.3 Beispiel

Manchmal gibt es keine eindeutige Lösung

Aufgabe

Ein Unternehmen verkaufte im letzten Vierteljahr von 2004 von den drei Produkten P_1, P_2 und P_3 Stückzahlen, die in folgender Tabelle aufgelistet sind.

a) Versuchen Sie, aus diesen Angaben die Preise für die Produkte zu rekonstruieren.

	P_1	P_2	P_3	Umsatz
Oktober	15.000	30.000	15.000	**€ 1.575.000**
November	20.000	20.000	30.000	**€ 1.750.000**
Dezember	10.000	30.000	5.000	**€ 1.225.000**

b) Geben Sie eine Möglichkeit für die Wahl der Preise an, und zeigen Sie Grenzen für die Preiswahl auf.

Lösungsvorschläge

a) Will man aus den Angaben die Verkaufspreise ermitteln, muss man folgendes Gleichungssystem lösen, wobei der Verkaufspreis für das Produkt P_i x_i sein soll (i = 1, 2, 3):

Man kann auch gleich die Matrix-Schreibweise wählen

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & 15.000x_1 & + & 30.000x_2 & + & 15.000x_3 & = & 1.575.000 \\ \text{II} & 20.000x_1 & + & 20.000x_2 & + & 30.000x_3 & = & 1.750.000 \\ \text{III} & 10.000x_1 & + & 30.000x_2 & + & 5.000x_3 & = & 1.225.000 \end{array}$$

Teilt man alle Zahlen aus der Tabelle durch 1.000, um die Rechnung zu erleichtern, ergibt sich in Matrix-Schreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 30 & 15 & 1.575 \\ 20 & 20 & 30 & 1.750 \\ 10 & 30 & 5 & 1.225 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I}-\text{III}]{3\cdot\text{II}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 30 & 15 & 1.575 \\ 30 & 0 & 60 & 2.100 \\ 5 & 0 & 10 & 350 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}-6\cdot\text{III}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 30 & 15 & 1.575 \\ 30 & 0 & 60 & 2.100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}:30]{\text{I}:15} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 105 \\ 1 & 0 & 2 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das System ist nicht eindeutig lösbar, da die letzte Zeile verschwindet, also zwei Gleichungen mit drei Variablen übrig bleiben. Das bedeutet „Spielraum“ für die möglichen Werte der Variablen.

b) Gleichung II bedeutet: $x_1 + 2x_3 = 70$. Es besteht also ein fester Zusammenhang zwischen x_1 und x_3.
Setzt man z.B. fest $\mathbf{x_1 = 20}$, so folgt daraus $2x_3 = 50 \Rightarrow \mathbf{x_3 = 25}$.
Eingesetzt in I folgt $20 + 2x_2 + 25 = 105 \Rightarrow 2x_2 = 60 \Rightarrow \mathbf{x_2 = 30}$.
Wir haben somit Preise für die Produkte P_1, P_2 und P_3 erhalten, welche die Umsatzzahlen in der Tabelle ergeben.

Durch eine Vorgabe kann jetzt eine Lösung berechnet werden

Können denn nun irgendwelche Zahlen für x_1 eingesetzt werden? Wir wissen nichts über die Art der Produkte, können also daraus keine Rückschlüsse über die Höhe der Preise schließen. Aber klar ist, dass Preise nicht negativ sein können, ja normalerweise echt positiv sind. Eine Wahl von $x_1 \geq 70$ oder $x_3 \geq 35$ scheidet daher ebenfalls aus. Es ist also bisher $0 < x_1 < 70$ und $0 < x_3 < 35$.
Beide Einschränkungen führen dazu, dass x_2 nach Gleichung I auf jeden Fall positiv sein wird.

Überlegungen, ob Annahmen in diesem Fall beliebig getroffen werden können

4. Anwendung Mehrstufige Prozesse/Verflechtungen

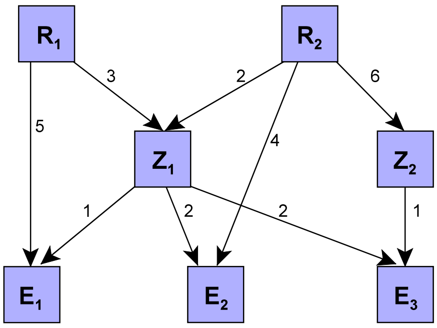
Worum geht's eigentlich?

Es geht um mehrstufige Prozesse (im Beispiel um einen zweistufigen Produktionsprozess), die mit Graphen visualisiert und mit Matrizen mathematisiert werden können.

Zur Modellierung weiterer Betriebsabläufe können auch das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme notwendig sein.

Zweistufige Produktionsprozesse

Ein Betrieb fertigt z.B. aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die beiden Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und aus R_1, R_2, Z_1 und Z_2 die drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3.



Den genauen Zusammenhang erläutert der Graph, die Zahlen an den Pfeilen geben die Mengeneinheiten (ME) des benötigten Produkts an: Zur Herstellung einer ME des Endprodukts E_1 werden 5 ME des Rohstoffs R_1 und 1 ME vom Zwischenprodukt Z_1 benötigt usw.

„Entflechten"

In diesem Beispiel gibt es 3 direkte Verbindungen im Produktionsprozess: ① Rohstoffe mit Zwischenprodukten,
② Zwischen- mit Endprodukten und
③ Rohstoffe mit Endprodukten,
die jeweils mit einer Matrix in die Sprache der Mathematik übertragen werden können. Als Zwischenschritt ist auch die Darstellung in Tabellen denkbar:

Graph in Tabellen umformen

R → Z	Z_1	Z_2	Z → E	E_1	E_2	E_3	R → E	E_1	E_2	E_3
R_1	3	0	Z_1	1	2	2	R_1	5	0	0
R_2	2	6	Z_2	0	0	1	R_2	0	4	0

Darstellung in Matrizen

$$RZ = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad ZE = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R_{direkt}E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

➩ Graph gibt Übersicht
➩ mit Matrizen rechnet es sich aber leichter

Zur Herstellung der Endprodukte werden nicht nur die direkt verarbeiteten Rohstoffe verwendet, sondern auch die Rohstoffe in den Zwischenprodukten. Wie erhält man nun den vollständigen Bedarf an ME je Rohstoff für die Produktion je einer ME des Endproduktes?

Zusatzinformationen durch Verknüpfungen

$$RE = RZ \cdot ZE + R_{direkt}E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

D.h. zur Produktion von je einer ME des Endprodukts benötigt man folgende ME an Rohstoffen:
für E_1 ($8\ R_1 | \ 2\ R_2$), für E_2 ($6\ R_1 | \ 8\ R_2$) und für E_3 ($6\ R_1 | \ 10\ R_2$).

Nun können sich Fragen ergeben wie:

Am Lager sind 328 ME von R_1 und 300 ME von R_2. Die Zwischenprodukte können nicht gelagert werden, sie werden nach Bedarf produziert. Dringend angefordert sind 10 ME von Endprodukt E_2. Wie viele ME der Endprodukte E_1 und E_3 kann man dann ebenfalls produzieren, wenn die Rohstoffe vollständig aufgebraucht werden sollen?

Fragestellung führt zu linearem Gleichungssystem

Mögliche Lösung: $\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 6 & 328 \\ 2 & 8 & 10 & 300 \end{array}\right) \xrightarrow[4 \cdot II - I]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 6 & 328 \\ 0 & 26 & 34 & 872 \end{array}\right).$

Sei x_1 die ME von E_1, x_3 die ME von E_3. Dann folgt aus der letzten Zeile $26 \cdot 10 + 34\ x_3 = 872$, also $34\ x_3 = 612 \Rightarrow x_3 = 18$. Eingesetzt in die erste Zeile erhält man $8\ x_1 + 60 + 108 = 328 \Rightarrow 8\ x_1 = 160 \Rightarrow x_1 = 20$.

Antwort

Unter den genannten Bedingungen können 20 ME des Endprodukts E_1 und 18 ME des Endprodukts E_3 produziert werden.

5. Aufgaben

Vergleiche und Verknüpfungen

1. Gegeben sei eine Datei mit Namen und Adressen, jeden Datensatz kann man als Vektor auffassen, etwa (Name| Straße | PLZ | Ort). Aus verschiedenen Gründen muss eine solche Datei sortiert werden.
   Überlegen und beschreiben Sie, wie man die Datensätze anordnen könnte.

2. Ein Würfel wird gezinkt, damit die Augenzahl 6 öfter fällt. Tatsächlich ergibt ein ausführlicher Test, dass die 6 durchschnittlich bei jedem 3. Wurf erscheint, die 1 jedoch nur zweimal bei 21 Würfen, alle übrigen Zahlen fallen bei jedem 7. Wurf.
   Schreiben Sie die Häufigkeit, mit der jede Ziffer erscheint, in einen Vektor, geordnet in der Reihenfolge von 1 - 6 und berechnen Sie damit, wie oft jede Ziffer bei 100 Würfen erscheint.

3. Ein Restaurant bietet Montags bis Donnerstags von 12.00 Uhr bis 14.00 Uhr „Essen satt“. Jeder Kunde kann dann vom Buffet nehmen, was er möchte.
   Für Kinder bis 14 Jahre kostet dieses Angebot 9,50 €, für Rentner 11,00 € und sonst 15,60 € pro Person.

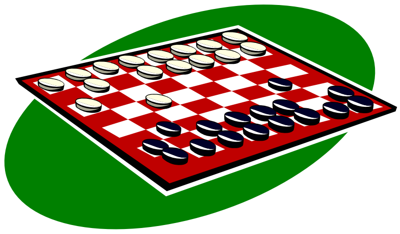
   a) Eine Gruppe aus zwei Kindern, zwei Erwachsenen und einem Rentner wählt dieses Angebot.
      Erstellen Sie die Rechnung für diese Gruppe mit Hilfe von Vektoren.

   b) Fertigen Sie ein passendes Computer-Programm (z.B. mit einer Tabellenkalkulation), das bei Eingabe der jeweiligen Personenzahl die Rechnung ausgibt.

4. Fünf Freundinnen treffen sich regelmäßig zum „Dame“-Spiel. Sie haben ihre Gewinne in einer Tabelle notiert, in der jede Reihe angibt, wie oft die zugehörige Person gegen die anderen jeweils gewonnen hat:

gegen →	Anna	Gio	Jai	Li	Petra
Anna		3	5	2	4
Gio	2		4	3	5
Jai	5	3		4	2
Li	3	4	5		3
Petra	2	3	4	2	

   a) Erstellen Sie eine 5×5-„Dominanz“-Matrix D, in welche Sie 1 für *mehr Gewinne*, 0 für *mehr Niederlagen* und ½ für *genau so viele Siege wie Niederlagen* eintragen. Die 0 wird auch eingetragen, wenn mit einer Person gar nicht gespielt wurde, also hier jede der Freundinnen mit sich selbst: In der Hauptdiagonale der Dominanz-Matrix stehen lauter Nullen.



   b) Der Spaltenvektor X bestehe aus lauter Einsen, also $X = (1 \mid 1 \mid \ldots)^T$. *Das hochgestellte T bedeutet, dass Zeilen und Spalten vertauscht werden, in diesem Fall also, dass es sich um einen Spaltenvektor handelt. Sprich* *<u>transponiert</u>*.
      Berechnen Sie damit die Vektoren Y_0 und Z_0 mit $Y_0 = D \cdot X$ und $Z_0 = D^T \cdot X$.
      Welche Bedeutung haben die Vektoren Y_0 und Z_0 im Sachkontext?

Populationsmodelle

5. Das Anwachsen der Possum-Population (aus der Aufgabe S. 5) beobachten die Förster in diesem Nationalpark mit Sorge, weil dadurch andere Arten bedroht werden. Daher überlegen sie, welche Auswirkungen eine gezielte Jagd auf die Possums haben könnte.
   Modifizieren Sie das Modell aus der Aufgabe geeignet und begründen Sie Ihren Vorschlag (oder Ihre Vorschläge).

6. In dieser Aufgabe geht es um ein Populationsmodell der Hawaiischen *Green Sea Schildkröte*. Die Aufteilung der Population erfolgt in 5 Altersgruppen, nämlich *kleiner 1 (Eier, Geschlüpfte), 1 - 16 (Jungtiere), 17 - 24 (fast ausgewachsene Tiere), 25 (Erstbrüter)* und *26 - 50 (Brüter)*.
   Die Anfangspopulation ist gegeben durch (346.000|240.000|110.000|2.000|3.500).
   In dem Modell ist die Leslie-Matrix modifiziert: Der Übergang von einer Altersgruppe zur nächsten setzt sich aus zwei Aspekten zusammen, die auch in der Matrix auftauchen: Der Anteil derjenigen Tiere, die überlebt haben und in die nächste Altersgruppe überwechseln, und der Anteil derjenigen Tiere, die in der Altersgruppe verbleiben.

Die Geburtenrate ist hier die Anzahl der Eier, die durchschnittlich pro Jahr von einer Schildkröte in dieser Gruppe gelegt wird.
Die Leslie-Matrix ergibt sich so zu

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 280 & 70 \\ 0{,}23 & 0{,}697 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}001 & 0{,}711 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}039 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}89 & 0{,}907 \end{pmatrix}$$

a) Wie unterscheidet sich diese Matrix L von der bisher verwendeten Leslie-Matrix?
Deuten Sie die Zahlen entsprechend dem vorstehenden Text zum Modell.

b) Berechnen Sie mit dem Modell die Anzahl der Tiere nach einem, zwei und zehn Jahren.

7. Entwickeln Sie mit dem Modell von Leslie eine Prognose für die Bevölkerungsentwicklung in Deutschland.

Besorgen Sie sich dazu die nötigen Daten und geben Sie die Quelle der Daten an.

Beschreiben Sie Ihr Modell (auch mit einem Graphen).

Berechnen Sie eine Prognose für die Jahre 2025 und 2050.
Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.
Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit professionellen Prognosen.

8. In dieser Aufgabe soll es um einige eher theoretische Aspekte des Leslie-Modells gehen.
Das Verfahren berechnet die Fortentwicklung einer Population in einem festen Zeittakt und nicht kontinuierlich. Es ist daher *diskret*.
Die Berechnung geschieht innerhalb eines Modells immer in gleicher Weise: Sei L die Leslie-Matrix und X_t die Population zur Zeit t. Dann ist

$$X_{t+1} = L \cdot X_t.$$

Ein solches Verfahren heißt *iterativ*.
Da z.B. X_5 aus dem Wert von X_4 berechnet wird, X_4 aus X_3, X_3 aus X_2, X_2 aus X_1 und X_1 aus X_0, ist das Verfahren *rekursiv* definiert. Durch die Potenzierung der Leslie-Matrix kann aber ohne Rekursion gerechnet werden.

a) Sie haben sicher schon ein oder mehrere Verfahren kennen gelernt, die mindestens einen der oben angegebenen drei Aspekte aufweisen.
Geben Sie Verfahren und Aspekt(e) an sowie den Zusammenhang, in dem Ihnen das Verfahren begegnet ist.

b) Manchmal interessiert das Langzeitverhalten bei Populationsprognosen. Wie haben Sie Prognosen für die weite Zukunft in der vorangehenden Aufgabe berechnet?
Stellen Sie Ihre Berechnung iterativ dar und unter Verwendung von Potenzen. Vergleichen Sie die beiden Rechenwege.

c) Es gibt Funktionen mit Elementen in der Definitionsmenge, die abgebildet sich selbst ergeben, also f(x) = x. Über diesen Ansatz lassen sich manchmal auch solche Punkte finden (oder zeigen, dass es keine gibt).
Beschreiben Sie, wie ein entsprechender Ansatz im Leslie-Modell aussähe und wie die entsprechende Berechnung.

Lineare Gleichungssysteme

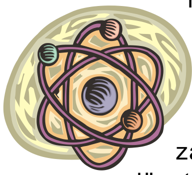
9. Lösen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren nachfolgende Gleichungssysteme:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 32 \\ 5 & 2 & -4 & -5 \\ 7 & -1 & 3 & 35 \end{array}\right)$,

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right)$.

Lineare Gleichungssysteme tauchen z.B. auf, wenn Funktionen gesucht werden, die gegebene Daten möglichst gut wiedergeben sollen.
Dazu werden oft Polynome verwendet:

10. Je größer Atomkerne sind, desto mehr Neutronen brauchen sie als „Kitt", um die sich abstoßenden Protonen zusammenzuhalten. Der Zusammenhang zwischen Kernladungszahl (Protonenzahl) Z und Neutronenzahl N lässt sich näherungsweise durch ein Polynom 3. Grades beschreiben:



$$N(Z) = a_1 Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3.$$

N wird beschrieben als Funktion von Z, die Variable heißt hier statt x also Z.

a) Berechnen Sie a_1, a_2, a_3 so, dass der Graph von N die Punkte Ne(10|10), Zr(40|50) und Fm(100|157) enthält.

b) Prüfen Sie die Qualität des oben beschriebenen Modells für den Zusammenhang zwischen N und Z.

11. In einem Chemieunternehmen wird die Leitung einer Abteilung von einem neuen Mitarbeiter übernommen. Die Abteilung produziert flüssige Waschmittel, die Produktion liegt derzeit bei täglich 10 Tonnen und sollte nach Ansicht des neuen Abteilungsleiters erhöht werden. Die Firmenleitung wünscht von ihm eine Auskunft über die zu erwartenden Produktionskosten und Gewinne.
Der Abteilungsleiter wirft einen Blick in die Produktionsunterlagen und findet folgende Daten.

produzierte Menge (in Tonnen)	**verursachte Kosten** in GE (Geldeinheiten)
2	600
10	1272
18	1944

a) Der neue Abteilungsleiter sieht hier einen linearen Zusammenhang. Bestätigen Sie diesen Zusammenhang.

b) Bei einem genaueren Blick in die Unterlagen findet der Abteilungsleiter zusätzliche Daten:

produzierte Menge (in Tonnen)	**verursachte Kosten** in GE (Geldeinheiten)
5	1047
20	2472

Man sieht mit bloßem Auge, dass der lineare Ansatz aus Aufgabenteil a) offenbar doch nicht zutrifft.
Skizzieren Sie einen möglichen und sinnvollen Graphen durch diese 5 Punkte.
Berechnen Sie den zugehörigen Funktionsterm der Kostenfunktion K.

Lineare Gleichungssysteme tauchen z.B. auf, wenn Ressourcen verteilt werden sollen:

12. Eine Möbelfabrik stellt Schlafzimmer-Möbel zum Selbstaufbau her, die aus beschichteten Spanplatten bestehen. Jedes Bauteil wird zunächst von einer Computer gesteuerten Maschine zugeschnitten, die zugleich eventuell nötige Bohrungen vornimmt, dann werden Teile aus Kunststoff oder Metall beigefügt, die zur Verbindung nötig sind, und zum Schluss werden die (hoffentlich) richtigen Bauteile verpackt. Die drei beschriebenen Arbeitsgänge werden nun kurz <u>Schneiden</u>, <u>Schrauben</u> und <u>Verpacken</u> genannt.

Die folgende Tabelle zeigt die Zeiten für jeden Arbeitsvorgang an, bezogen auf Bettgestell, Kleiderschrank und Frisierkommode:

Artikel	Zeitaufwand in Minuten		
	Schneiden	Schrauben	Verpacken
Bettgestell	20	10	5
Kleiderschrank	50	5	15
Frisierkommode	40	15	10

a) Kurzfristig kommt der Auftrag eines Kunden, 20 Bettgestelle, 15 Schränke und 8 Kommoden zu liefern.
Wie viel Arbeitszeit muss die Firmenleitung einplanen?

b) Wegen einer Grippe-Epidemie sind einige Mitarbeitrinnen und Mitarbeiter erkrankt. Daher stehen nur 60 Stunden für Schneiden, 18 für Schrauben und 16 für Verpackung pro Arbeitstag bereit.
Wie viele Artikel kann der Betrieb unter den genannten Umständen maximal pro Tag herstellen?

13. Für die Herstellung der Ostereier *L, XL* und *XXL* sind die Materialien *Schokolade, Marzipan* und *Trüffel* erforderlich. Der Materialverbrauch pro Mengeneinheit Eier ist in der folgenden Tabelle aufgeführt (jeweils in ME):

	Schokolade	Marzipan	Trüffel
L	1	3	2
XL	2	1	5
XXL	3	4	2

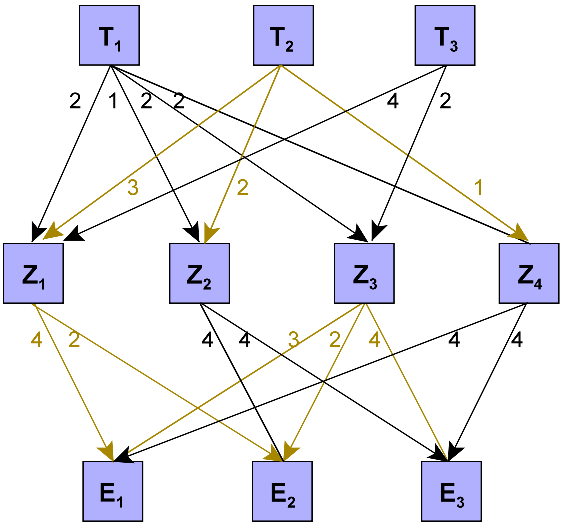
Der Betrieb verfügt über 25 ME Schokolade, 25 ME Marzipan und 50 ME Trüffel.

Wie viele Mengeneinheiten der drei Ostereier-Sorten kann die Herstellerfirma produzieren?

14. In den Aufgaben 12) und 13) hatten die Gleichungssysteme mit dem Ansatz des „restlosen Aufbrauchens" jeweils eine ganzzahlige Lösung. In der Realität ist es aber zumeist nicht so, dass etwa gelagerte Rohstoffe völlig aufgebraucht werden müssen – im Gegensatz zu vorhandene Arbeitsstunden, die verbraucht werden sollten, so weit es eben möglich ist.
Ändern Sie Aufgabe 12) oder 13) leicht ab, sodass sich z.B. eine nicht ganzzahlige Lösung ergibt oder eine mit negativen Komponenten und deuten Sie die Lösung konkret im Aufgabenkontext. Oder erfinden Sie eine eigene Aufgabe mit einer entsprechend geänderten Problemstellung.

Mehrstufige Prozesse / Verflechtungen

15. Ein Betrieb stellt in einer ersten Produktionsstufe aus drei Bauteilen T_1, T_2, und T_3 vier Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 her. In der zweiten Produktionsstufe werden aus den Zwischenprodukten dann drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 montiert.
Der Materialverbrauch in Mengeneinheiten (ME) ist dem folgenden Graphen zu entnehmen:



Zur Abwicklung eines Kundenauftrages wurden 7000 ME von T_1, 5100 ME von T_2 und 5800 ME von T_3 verarbeitet.
Ermitteln Sie, wie viele ME von den einzelnen Endprodukten E_1, E_2 und E_3 von dem Kunden bestellt worden sind.

16. Ein Betrieb der Getränkeindustrie produziert in zwei Werken an verschiedenen Standorten Fruchtsäfte.
Im Werk A werden aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 hergestellt.
Im Werk B werden aus den Zwischenprodukten dann die drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt.

Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist durch die beiden folgenden Tabellen gegeben:

Werk A: Rohstoffeinsatz			
$R \rightarrow Z$	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	3	0
R_2	0	6	2
R_3	2	0	2
R_4	1	3	1

Werk B: Zwischenprodukteinsatz			
$Z \rightarrow E$	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	4
Z_2	8	10	1
Z_3	6	2	2

a) Stellen Sie die durch die beiden Tabellen gegebenen Verflechtungen mit einem Graphen dar.

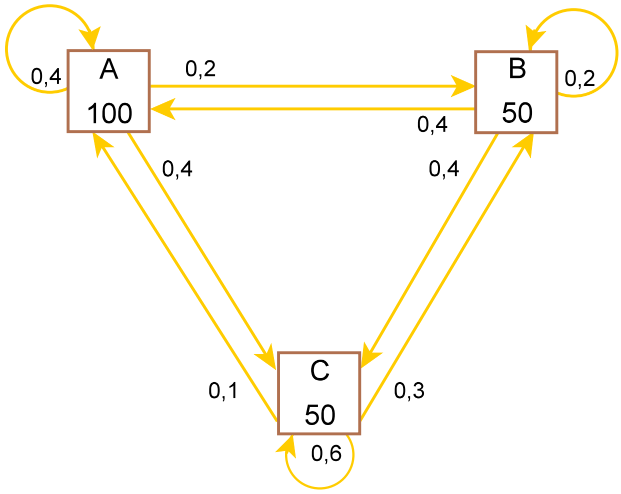
b) Ermitteln Sie, wie groß der Vorrat an den einzelnen Rohstoffen sein muss, damit von den Endprodukten die folgenden ME hergestellt werden können:
150 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 250 ME von E_3.

c) Durch technische Störungen im Produktionsablauf in Werk A kann zur Zeit nur Zwischenprodukt Z_2 hergestellt werden. Erschwerend kommt hinzu, dass sich wegen Renovierungsarbeiten in den Lagerräumen des Werkes B nur geringe Bestände an Zwischenprodukten befinden, nämlich die Zwischenprodukte Z_1 mit 75 ME und Z_3 mit 100 ME.

Ein Kunde bestellt kurzfristig 12 ME von Endprodukt E_3.
Dem Kundenwunsch entsprechend werden nun genau die 12 ME von E_3 produziert, wobei aber produktionsbedingt auch die beiden anderen Endprodukte E_1 und E_2 (nach obiger Tabelle) hergestellt werden.

Zeigen Sie, dass sich die oben genannten Zwischenproduktbestände vollständig durch diese Produktion verarbeiten lassen, und bestimmen Sie, wie viele ME der Endprodukte E_1 und E_2 dabei hergestellt werden können und wie viele ME des Zwischenprodukts Z_2 das Werk A dann liefern muss.

17. Die Abbildung zeigt den durch Umzug bedingten Bevölkerungsaustausch zwischen drei Regionen A, B und C in Anteilen bzw. Wahrscheinlichkeiten jeweils innerhalb eines Jahres. Eingetragen sind dazu die Einwohnerzahlen der Region in Tausend zu Beginn der Modellierung.
    a) Begründen Sie, warum die Summe der von einer Region ausgehenden Anteile stets 1 ergeben muss.
    b) Berechnen Sie, wie viele Menschen nach einem Jahr in den Regionen gemäß dem Modell jeweils leben, und begründen Sie Ihr Vorgehen.
    Ermitteln Sie einen Rechenweg für eine Prognose nach 2, 3, 10 bzw. n Jahren.
    c) Falls Sie in b) mit einem Computerprogramm gerechnet haben, variieren Sie die Anteile und interpretieren Sie die Auswirkungen.

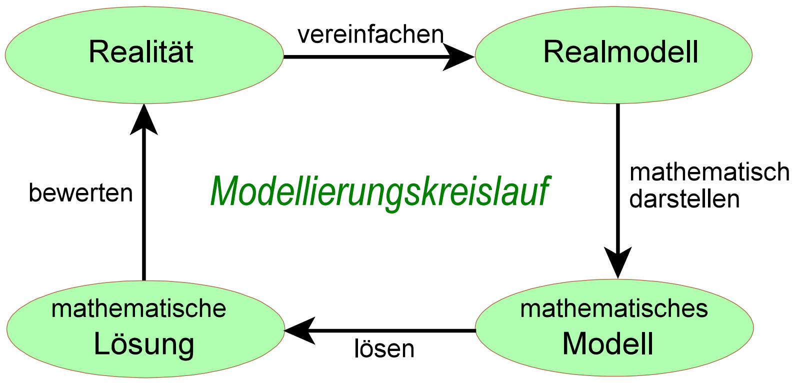


18. Spätestens die vorhergehende Aufgabe macht deutlich, dass auch Wachstumsmodelle (hier Bevölkerungswanderung) als mehrstufige Prozesse bzw. lineare Verflechtungen angesehen werden können. Die Modellierung mit Matrizen in der hier besprochenen Weise ist offenbar recht vielfältig einsetzbar.
    Sie haben ja schon einige Wachstumsmodelle kennen gelernt.
    Erläutern Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten im Vergleich zu dem hier entwickelten Modell.
    Ist eines der Wachstumsmodelle, die Sie früher kennen gelernt haben, auch unter anderen Kontexten einsetzbar?

6. Abituraufgaben

Die folgenden Beispiele enthalten neben Aufgabenteilen aus diesem Themenbereich auch Verbindungen mit anderen Themenbereichen, zumeist mit Ideen oder Methoden der Analysis.

Auch wenn jeweils wesentliche Teile der Modellierung vorgegeben sind, müssen Sie dennoch einzelne Teile des Modellierungskreislaufs durchlaufen, wie z.B. die Interpretation der mathematischen Ergebnisse im Modell-Kontext oder eine Beurteilung des Modells.



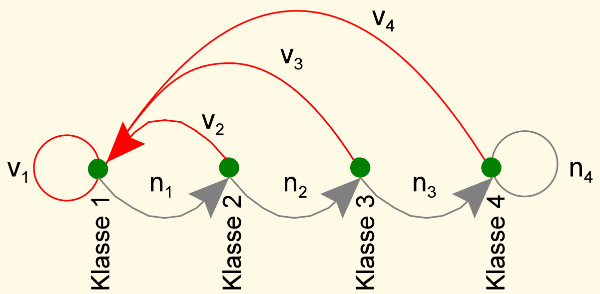
19. Abituraufgabe Vegetation (ohne CAS)

In der Übergangszone zwischen Wüstenklima und gemäßigtem Klima an der Westküste Nordamerikas trifft man auf einer Fläche von ca. 2000 km² eine Vegetation immergrüner Sträucher an. Man bezeichnet das als „Chaparral“.
Die Brennbarkeit dieser Pflanzen hängt sehr von ihrem Alter ab. Besonders leicht brennen die älteren Pflanzen wegen der großen Mengen verdorrten Materials. Abgesehen von ihrer Gefahr für Mensch und Tier haben Brände auch eine sehr nützliche Funktion: anstelle der verbrannten Sträucher wachsen ziemlich schnell junge, kräftige Pflanzen aus dem Boden. Spontane Brände werden daher nicht immer gelöscht. Die Verjüngung sorgt immer wieder dafür, dass die Gebiete mit dürrem Material nicht zu groß werden.

Die geschilderte Situation lässt sich z.B. in folgendem Modell darstellen:

- Die Vegetation wird entsprechend ihrem Alter in vier Klassen eingeteilt:
  Klasse 1: 0 - 10 Jahre Klasse 2: 10 - 20 Jahre
  Klasse 3: 20 - 30 Jahre Klasse 4: 30 Jahre und älter
- Entsprechend beträgt auch die „Taktrate“ 10 Jahre, d.h. ein Berechnungsvorgang ergibt aus vorliegenden Daten eine Prognose für 10 Jahre später.
- Als Maß für den Umfang einer Klasse nimmt man nicht die Anzahl der Pflanzen, sondern die Fläche des durch diese Klasse bedeckten Gebietes.
- Bei jeder Klasse bleibt der prozentuale Anteil, der in 10 Jahren verbrennt, konstant.
- Die Gesamtfläche des Gebietes beträgt stets 2000 km².

Die Entwicklung der Vegetation in diesem Modell beschreibt der folgende Graph:



Bezeichnungen:

v_i = Anteil von Klasse i, der verbrennt *(v_i < 1)*

n_i = Anteil von Klasse i, der nicht verbrennt *(n_i < 1)*

a) Geben Sie unter Verwendung der Zahlenwerte in der Tabelle und gemäß dem Graphen bzw. dem oben stehenden Modell eine Populationsmatrix (Leslie-Matrix) L an und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Verbrennende Anteile	$v_1 = 0{,}01$	$v_2 = 0{,}02$	$v_3 = 0{,}50$	$v_4 = 0{,}20$
Nicht verbrennende Anteile	$n_1 = 0{,}99$	$n_2 = 0{,}98$	$n_3 = 0{,}50$	$n_4 = 0{,}80$

b) Erläutern Sie, warum für alle 4 Klassen $n_i + v_i = 1$ gelten muss.

c) Zu Beginn der Modellierung nehmen die Klassen die folgenden Flächen ein (km^2):
Klasse 1: 302 Klasse 2: 284 Klasse 3: 314 Klasse 4: 1100

Berechnen Sie daraus mit Hilfe der Leslie-Matrix L eine Prognose für die Flächenmaße der einzelnen Klassen nach zehn Jahren (1 Zeittakt).

d) Berechnet man von der Matrix L aus Aufgabenteil a) die Potenzen L^2, L^3, L^4, ..., stellt man fest, dass sich die Matrizen L^n für größere Werte von n kaum noch voneinander unterscheiden. So stimmen die gerundeten Matrizen L^n für $n \geq 30$ mit der folgenden Matrix überein:

$$\begin{pmatrix} 0{,}185 & 0{,}185 & 0{,}185 & 0{,}185 \\ 0{,}185 & 0{,}185 & 0{,}185 & 0{,}185 \\ 0{,}18 & 0{,}18 & 0{,}18 & 0{,}18 \\ 0{,}45 & 0{,}45 & 0{,}45 & 0{,}45 \end{pmatrix}$$

Was kann man daraus für die Chaparral-Vegetation folgern?

e) Die Berechnung in Aufgabenteil c) (und auch in d)) kann als Funktion aufgefasst werden.
Beschreiben Sie diese Funktion (Zuordnungsvorschrift, Definitions- und Zielmenge), und geben Sie als Beispiel mit Ihrer Funktion die Rechenvorschrift für *Prognose in 50 Jahren* an.

f) In der Praxis führen die Verwalter des Chaparral auch noch ein kontrolliertes, gewolltes Abbrennen von Teilen der Vegetation, die älter als 10 Jahre ist, durch.
Dabei soll im Modell das Abbrennen immer unmittelbar nach Ablauf von 10 Jahren (also am Ende eines Zeittaktes) auf einmal stattfinden, wobei jeweils 2% von Klasse 2, 2% von Klasse 3 und 7% von Klasse 4 abbrennen.

Bestimmen Sie als Modell zur Berechnung der Folgen für die Vegetation eine entsprechende Matrix M auf.

Beschreiben Sie den gesamten zehnjährigen Vorgang des spontanen und gewollten Abbrennens mit Hilfe der Matrizen M und L und begründen Sie Ihre Vorgehen.

19. Abituraufgabe Vegetation (mit CAS)

a) und b) wie oben.

c) Zu Beginn der Modellierung nehmen die Klassen die folgenden Flächen ein (km^2):
Klasse 1: 302 Klasse 2: 284 Klasse 3: 314 Klasse 4: 1100

Berechnen Sie daraus mit Hilfe der Leslie-Matrix L die Prognosen für die Flächenmaße der einzelnen Klassen nach 10, 20 und 50 Jahren (d.h. 1, 2 und 5 Zeittakten).

d) Eine Berechnung in Aufgabenteil c) kann auch als Funktion aufgefasst werden.
Beschreiben Sie die Funktion (Zuordnungsvorschrift, Definitions- und Zielmenge), und geben Sie als Beispiel die Prognose in 50 Jahren mit Hilfe Ihrer Funktion an.

e) Untersuchen Sie das Langzeitverhalten der Population.
Beschreiben Sie Ihr Vorgehen und begründen Sie Ihre Interpretation.

f) In der Praxis führen die Verwalter des Chaparral auch noch ein kontrolliertes, gewolltes Abbrennen von den Teilen der Vegetation durch, die älter als 30 Jahre sind. Dabei verbrennen im Durchschnitt 7% dieser Klasse.

Ändern Sie Ihr Modell geeignet ab. Beschreiben und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Untersuchen Sie, welche Wirkung das Abbrennen langfristig auf die Flächenmaße der einzelnen Klassen hat.

20. Abituraufgabe Chemieunternehmen (enthält Aufgabe 11)

In einem Chemieunternehmen wird die Leitung einer Abteilung von einem neuen Mitarbeiter übernommen. Die Abteilung produziert flüssige Waschmittel, die Produktion liegt derzeit bei täglich 10 Tonnen und sollte nach Ansicht des neuen Abteilungsleiters erhöht werden. Die Firmenleitung wünscht von ihm eine Auskunft über die zu erwartenden Produktionskosten und Gewinne.

Der Abteilungsleiter wirft einen Blick in die Produktionsunterlagen und findet nebenstehende Daten.

produzierte Menge (in Tonnen)	**verursachte Kosten** in GE (Geldeinheiten)
2	600
10	1272
18	1944

a) Der neue Abteilungsleiter sieht hier einen linearen Zusammenhang. Bestätigen Sie diesen Zusammenhang.

b) Bei einem genaueren Blick in die Unterlagen findet der Abteilungsleiter zusätzliche Daten:
Man sieht mit bloßem Auge, dass der lineare Ansatz aus Aufgabenteil a) offenbar doch nicht zutrifft.

produzierte Menge (in Tonnen)	**verursachte Kosten** in GE (Geldeinheiten)
5	1047
20	2472

Skizzieren Sie einen möglichen und sinnvollen Graphen durch diese 5 Punkte. Berechnen Sie den zugehörigen Funktionsterm der Kostenfunktion K.

c) Zeigen Sie, dass K keine Extremstellen besitzt und erläutern Sie, warum diese Eigenschaft für eine Kostenfunktion typisch ist.

Hinweis: Verwenden Sie als Kostenfunktion $K: x \to x^3 - 30x^2 + 320x + 72$.

d) Aus einer Marktanalyse weiß die Firmenleitung, dass der erzielbare Preis pro Tonne für das Waschmittel in Abhängigkeit von der absetzbaren Menge x durch die folgende Funktion p beschrieben werden kann:

$$p: x \to -5x + 330 \quad \text{bzw.} \quad p: x \to -5 \cdot (x - 66)$$

Der Erlös E ergibt sich aus dem Produkt „Menge mal Preis“ ($E: x \to x \cdot p(x)$).

Bestimmen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E und zeigen Sie, dass E ein Maximum annimmt, wenn die produzierte Menge 33 Tonnen beträgt.

e) Der erzielte Gewinn G in Abhängigkeit von der produzierten Menge x ergibt sich als Differenz aus dem Erlös E und den entstehenden Kosten K:

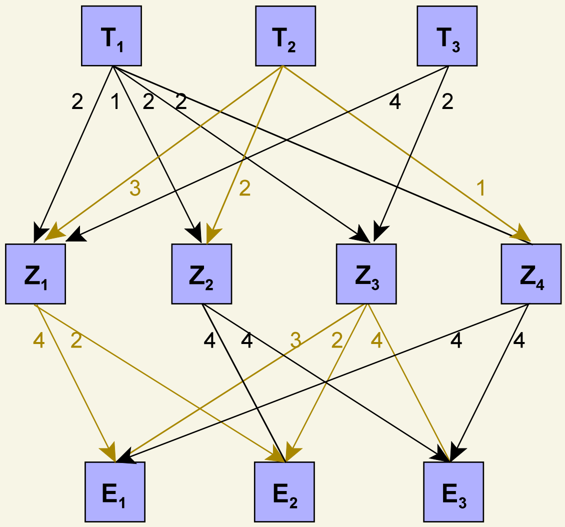
$$G(x) = E(x) - K(x).$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion G.

Bestimmen Sie, bei welcher produzierten Menge der Gewinn G maximal wird, und berechnen Sie den maximalen Gewinn. Beide Angaben sollen in der Antwort auf 2 Nachkommastellen gerundet werden.

f) Beurteilen Sie vor dem Hintergrund Ihrer Ergebnisse aus den vorangegangenen Aufgabenteilen das Vorhaben des Abteilungsleiters, die bisherige Produktion von täglich 10 Tonnen deutlich zu erhöhen.

21. Abituraufgabe Kalkulation (enthält Aufgabe 15)



Ein Betrieb stellt in einer ersten Produktionsstufe aus drei Bauteilen T_1, T_2, und T_3 vier Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 her. In der zweiten Produktionsstufe werden aus den Zwischenprodukten dann drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 montiert.

Der Materialverbrauch in Mengeneinheiten (ME) ist dem nebenstehenden Graphen zu entnehmen.

Bei der Produktion fallen Herstellungskosten in Geldeinheiten (GE) an, die sich aus den Material- und Fertigungskosten zusammensetzen.

• Herstellkosten pro ME der Zwischenprodukte:

Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
13	32,5	26	19,5

• Fertigungskosten pro ME der Endprodukte:

E_1	E_2	E_3
20	10	27

a) Zur Abwicklung eines Kundenauftrages wurden 7000 ME von T_1, 5100 ME von T_2 und 5800 ME von T_3 verarbeitet.

Ermitteln Sie, wie viele ME von den einzelnen Endprodukten E_1, E_2 und E_3 von dem Kunden bestellt worden sind.

Bestimmen Sie die für den Auftrag angefallenen Gesamtherstellungskosten K und ermitteln Sie einen Mindestverkaufspreis der Endprodukte (auf ganzzahlige GE gerundet), wenn alle drei Endprodukte zum gleichen Preis verkauft werden sollen und der Betrieb ohne Verlust arbeiten will.

b) Neueste Marktuntersuchungen haben ergeben, dass sich die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 im Verhältnis von $3t : t : 2t$ mit $t \in \mathbb{N}^*$ absetzen lassen.

Zeigen Sie, dass die Vorräte an den Bauteilen T_1, T_2 und T_3 unter Berücksichtigung des oben angegebenen Verhältnisses im Mengenverhältnis von $118\,t : 86\,t : 94\,t$ benötigt werden.

Bestimmen Sie, wie viele Bauteile T_2, und T_3 unter Beibehaltung der obigen Mengenverhältnisse beschafft werden müssen, wenn vom Bauteil T_1 vorübergehend nur die begrenzte Menge von 17.700 ME erhältlich ist, und ermitteln Sie, wie viele Endprodukte von E_1, E_2 und E_3 damit hergestellt werden können.

c) Ein Verbesserungsvorschlag aus der Belegschaft regt eine Umstellung der Montage des Endproduktes E_2 an, um so eine Kostenersparnis zu erzielen. Durch das neue Montageverfahren wird pro ME von E_2 genau eine ME von Z_2 weniger benötigt. Allerdings verdreifachen sich dadurch die Fertigungskosten von E_2.

Beurteilen Sie anhand der gegebenen Daten den Vorschlag.

Rückschau

G2 · Matrizen und Vektoren als Datenspeicher

Überblick-Grafik

Versuchen Sie, einen Überblick über die Inhalte dieses Themenbereichs zu gewinnen. Überlegen Sie dabei auch, was Ihnen dabei wichtig erschien.

Stellen Sie das nach Ihrer Meinung Zentrale in nebenstehendem Kasten dar und verwenden Sie dazu graphische Elemente (z.B. Mind Map, Concept Map, eine Grafik, ...).
Wichtig ist, dass Sie diese Übersicht selbst gestalten und nicht irgendwo kopieren.

Überblick-Text

Wenn Sie möchten, können Sie hier maximal drei Punkte nennen, die Ihre obige Darstellung ergänzen oder erläutern.

Vernetzungen

Welche Verbindungen zu früheren Themenbereichen sehen Sie?
Sind Ihnen Inhalte und/oder Methoden aus diesem Themenbereich schon außerhalb des Mathematikunterrichts begegnet und wenn ja, wo?

Im Rückblick sollten Sie sich auch fragen, ob Sie die am Anfang des Heftes stehenden Kompetenzen erworben haben. Schätzen Sie sich selbst ein und kreuzen Sie in der Tabelle jeweils die am ehesten zutreffende Antwort an:

Kompetenzen	ja	ein wenig	eher nicht	nein
Ich beherrsche den Umgang mit den üblichen Verknüpfungen zwischen Vektoren und Matrizen (Vektoraddition, Multiplikation mit Skalar, Skalarprodukt, Addition und Multiplikation von Matrizen, Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar, Multiplikation von Matrix und Vektor)				
Ich kann einfache diskrete Wachstumsprozesse z.B. mit dem Modell von Leslie modellieren und dessen Besonderheiten (Einteilung der Population in Altersgruppen, Rekursivität) auch im Hinblick auf andere Wachstumsmodelle erklären. Ich kann eine Wachstumsprognose über eine und zwei Zeitperioden berechnen und mit Hilfe eines CAS Aussagen zum Langzeitverhalten der Population machen.				
Ich kann einfache Verflechtungen (betriebswirtschaftliche Modelle) in der hier besprochenen Art darstellen.				
Ich kann lineare Gleichungssysteme innerhalb verschiedener Sachkontexte erstellen und lösen und die Lösungen sachgerecht deuten.				

Haben Sie Kompetenzen nicht erworben oder nicht so, wie Sie es sich erhofft hatten, notieren Sie sich, woran es gelegen haben könnte. Überlegen Sie zugleich, ob Sie in Ihrem eigenen Verantwortungsbereich Möglichkeiten sehen, den Erwerb von Kompetenzen zu verbessern.

✎

Anhang

Aufgaben-Lösungen (Kurzfassung)

Die angegebenen Lösungen müssen nicht die einzig möglichen sein!

Aufgabe 1: *Es gibt mehrere Lösungen.*

Aufgabe 2: (10|14|14|14|14|34), d.h. die 1 fällt ca. 10 mal, die 2, 3, 4 und 5 jeweils ca. 14 mal und die 6 fällt ca. 34 mal (aufgerundet, damit Summe = 100).

Aufgabe 3 a): (2|2|1) · (9,50|15,60|11,00) = 61,20

Aufgabe 4

a): $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \tfrac12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \tfrac12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $Y_0 = \begin{pmatrix} 2\tfrac12 \\ 2 \\ \tfrac12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Z_0 = \begin{pmatrix} 1\tfrac12 \\ 2 \\ 3\tfrac12 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Der Vektor Y_0 gibt die Gesamtzahl der Gewinne pro Person an, wobei ½ für „unentschieden" steht.
Bei der gekippten oder transponierten Matrix stehen die Niederlagen der Personen in den Zeilen, genauer die Siege über die Personen in den Zeilen. Also gibt der Vektor Z_0 die Anzahl der Niederlagen pro Person an, wieder mit ½ für „unentschieden".

Aufgabe 5: *Es gibt mehrere Lösungen.*

Aufgabe 6

a) In dieser Matrix L ist auch die Hauptdiagonale besetzt. Sind diese Einträge nicht Null, verbleibt der entsprechende Anteil in der zugehörigen Altersgruppe.

Zeile 1: Nur die Schildkröten in den Gruppen 4 und 5 legen Eier: Erstbrüter im Durchschnitt 280 pro Jahr und Brüter ca. 70 pro Jahr.

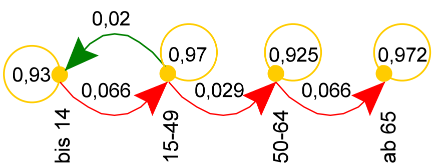
Und so weiter...

b) Bestand nach einem Jahr (in Tausend)
$B_1 \approx$ (805 | 243 | 78 | 4,3 | 5), nach 2 Jahren
$B_2 \approx$ (1.548 | 350 | 56 | 3,1 | 8,3) und nach 10 Jahren
$B_{10} \approx$ (815 | 721 | 6,1 |0,3 | 9,5).

Aufgabe 7: (Beispiel)

$$B(2025) = \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}02 & 0 & 0 \\ 0{,}066 & 0{,}97 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}029 & 0{,}925 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}066 & 0{,}972 \end{pmatrix}^{20} \cdot \begin{pmatrix} 12{,}3 \\ 39{,}1 \\ 15{,}5 \\ 16{,}3 \end{pmatrix} \approx 81{,}7 \text{ Mio.}$$

aus (10,6|32,7|14,0|24,4) und B(2050) ≈ 73,5 Mio.
aus etwa (8,6|26,4|11,5|27,1).



Aufgabe 8: *Hängt weitgehend von Ihnen ab.*

Aufgabe 9 a) L = {(3|−2|4)}, b) L = {(−1|−16|−21)}

Aufgabe 10

a) $N(Z) = 0{,}903333\, Z + 0{,}01\, Z^2 - 0{,}000033\, Z^3$
b) *es gibt verschiedene Ansätze zur Qualitätsüberprüfung.*

Aufgabe 11

a) *es gibt verschiedene Möglichkeiten des Nachweises.*
b) $K(x) = x^3 - 30x^2 + 320x + 72$

Aufgabe 12

a) Schneiden 1470 Minuten = 24 h 30 min, Schrauben 395 Minuten = 6 h 35 min und Verpacken 405 Minuten = 6 h 45 min.
Gesamt: 2270 Minuten = 37 h 50 min.

b) Bei der gegebenen Lage können 24 Bettgestelle, 24 Kleiderschränke und 48 Frisierkommoden fertig gestellt werden.

Aufgabe 13

Das gesuchte Gleichungssystem lautet: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 25 \\ 3 & 1 & 4 & 25 \\ 2 & 5 & 2 & 50 \end{array}\right)$.

Es können 2 ME der Ostereier-Sorte XXL, 8 ME der Sorte XL und 3 ME der Sorte L produziert werden.

Aufgabe 14: *Es gibt verschiedene Möglichkeiten des Abänderns.*

Aufgabe 15

Benötigt wird die Matrix TE, welche die Anzahl der Bauteile T pro Endprodukt E beschreibt. Sie erhält man als Produkt aus den entsprechenden Matrizen TZ und ZE:

$$TE = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 12 & 20 \\ 16 & 14 & 12 \\ 22 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

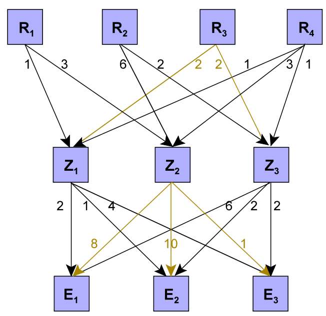
Zu lösen ist damit das lineare Gleichungssystem

$\left(\begin{array}{ccc|c} 22 & 12 & 20 & 7000 \\ 16 & 14 & 12 & 5100 \\ 22 & 12 & 8 & 5800 \end{array}\right)$ mit L = {(200|50|100)}.

Der Kunde hat also 200 ME vom Endprodukt E_1 bestellt, 50 ME vom Endprodukt E_2 und 100 ME vom Endprodukt E_3.

Aufgabe 16

a)



b) Die Rohstoff-Endproduktmatrix RE ist wieder Produkt der Matrizen RZ und ZE, also

$$RE = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 10 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 16 & 6 & 12 \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix}$$

Die Lösung berechnet sich durch Multiplikation

$RE \cdot (150|200|250)^T = (11.850|24.300|6.600|13.650)$

c) Aufstellen des Gleichungssystems:

Seien

z_2 = ME vom Zwischenprodukt Z_2,
e_1 = ME vom Endprodukt E_1,
e_2 = ME von E_2 und
$Z = (75|z_2|100)$,
$E = (e_1|e_2|12)$,

dann ist zu lösen $ZE \cdot E = Z$, also

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & 2 \cdot e_1 & + & e_2 & + & 48 & = & 75 \\ \text{II} & 8 \cdot e_1 & + & 10 \cdot e_2 & + & 12 & = & z_2 \\ \text{III} & 6 \cdot e_1 & + & 2 \cdot e_2 & + & 24 & = & 100 \end{array} \Rightarrow e_1 = 11,\ e_2 = 5,\ z_2 = 150.$$

Da das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, lassen sich die Zwischenproduktbestände vollständig durch diese Produktion verarbeiten. Dabei werden 11 ME von E_1 und 5 ME von E_2 produziert, sofern das Werk A 150 ME von Z_2 liefern kann.

Aufgabe 17

a) Die Bevölkerung jeder der drei Regionen ist in genau drei Gruppen eingeteilt: Gruppe 1: Abwandernde zur Alternative 1, Gruppe 2: Abwandernde zur Alternative 2, Gruppe 3: Bleibende. Zusammen sind das 100 % der Bevölkerung jeder Region.

b) Bevölkerungszahlen in den 3 Regionen nach einem Jahr:

$$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 45 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Da die Zeile der Matrix jeweils die Anteile enthält, die in ihrer Region bleiben und die aus den anderen beiden hinzu kommen, ergibt Matrix-Zeile mal Bevölkerungsvektor die Anzahl der Bewohner nach einem Jahr in der Region, die zur Zeile gehört.
In A leben nach einem Jahr laut Modell daher 65 Tausend, in B 45 Tausend und in C 90 Tausend Einwohner.

$$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der Prognosen nach 2, 3, 10 bzw. n Jahren geschieht nach immer dem gleichen Muster, jeweils für den Exponenten die gewünschte Zahl eingesetzt.

Es zeigt sich, dass laut Modell langfristig A und C ihre Bevölkerungszahlen tauschen.

c) *hat mehrere Lösungsmöglichkeiten*.

Aufgabe 18 *hängt ganz von Ihnen ab.*

Die Lösungsvorschläge für die Abituraufgaben erhalten Sie bei Bedarf über Ihre Lehrerin bzw. Ihren Lehrer.

Informationen

Daten für Aufgabe 7 erhalten Sie z.B. auf folgenden Seiten

- Daten zu Deutschland (Statistisches Bundesamt): www.destatis.de/d_home.htm
- Daten auch für Deutschland (U.S. Census Bureau): www.census.gov/ipc/www/idbpyr.html

Zusätzliche Informationen über Lineare Gleichungssysteme

MathePrisma Modul: CT und Lineare Gleichungssysteme · Mathematik ist die beste Medizin

Ideen für Beispiele und Aufgaben stammen aus

- Ross Brodie / Stephen Swift · QMaths 11c · Moreton Bay Publishing · Melbourne 1997
- Schöwe, Knapp, Borgmann · Lineare Algebra, Wirtschaft · Cornelsen · Berlin 1998
- Werner Schmidt · Mathematikaufgaben · Klett · Stuttgart 1985
- Centraalexamen 1994 · Wiskunde A (1. Termin), Aufgabe 3
- Mathematik Grundkurs · Schriftliche Abiturprüfung Schuljahr 2004/2005 Hamburg
- http://isolatium.uhh.hawaii.edu/linear/ch6/green.htm