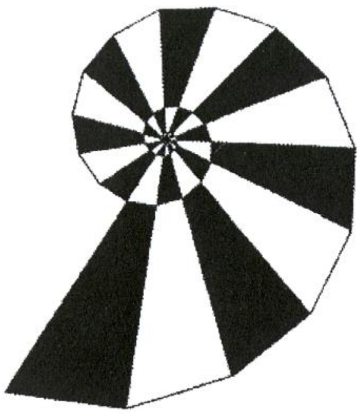
Hamburger Schülerzirkel Mathematik

1981 – 2009



Sammlung der
Probleme des Monats

Problem des Monats April 1981

Die Punkte einer quadratischen Fläche der Seitenlänge 10 cm seien auf irgendeine Weise mit den drei Farben rot, gelb und blau gefärbt.
Warum gibt es immer zwei Punkte gleicher Farbe, die 1 cm voneinander entfernt sind?

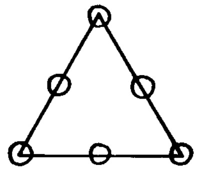
Problem des Monats September 1981

Aus lauter kongruenten regelmäßigen Vielecken soll die ganze Ebene lückenlos ausgelegt werden.
Für welche Eckenzahlen ist dies möglich, für welche nicht?

Problem des Monats April 1982
Ein Schriftsetzer benötigt zum Durchnumerieren eines umfangreichen Buches 6821 Ziffern.
Wieviele Seiten hat das Buch?
Wieviele Nullen, Einsen, Zweien, …, Neunen muß er verwenden?

Problem des Monats Juli 1982
An einer senkrechten Wand steht ein Würfel von 1 m Kantenlänge. Eine 5 m lange Latte soll so an die Wand gelehnt werden, daß sie die Kante des Würfels berührt.
Wie hoch reicht die Latte?

Problem des Monats August 1982



a) Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 sollen so auf die Markierungen im nebenstehenden Dreieck verteilt werden, daß man stets die gleiche Summe erhält, wenn man die drei Zahlen einer Seite addiert (→ magisches Dreieck). Wieviele „wesentlich verschiedene“ Lösungen gibt es, und was bedeutet dabei „wesentlich verschieden“?
b) Gibt es magische Dreiecke auch mit den Zahlen 43, 17, 69, 30, 82, 56?
c) Drei natürliche Zahlen seien (willkürlich) auf drei Markierungen des obigen Dreiecks verteilt. Welche Bedingungen müssen diese drei Zahlen erfüllen, damit man dort durch drei weitere natürliche Zahlen zu einem magischen Dreieck ergänzen kann?

Problem des Monats September 1982
In Septumbrien gibt es nur zwei Sorten von Münzen, deren Werte in der Landeswährung Sept durch natürliche Zahlen angegeben werden. Ein Kaufmann hat herausgefunden, daß er bei seiner Preisauszeichnung genau 35 Werte vermeiden muß, insbesondere den Preis 58 Sept.
Wieviel Sept sind die beiden Münzen wert?

Problem des Monats Oktober 1982
Auf einer Brotscheibe liegen genau 1982 Zuckerkörner.
Warum läßt sich mit einem scharfen Messer durch einen geraden Schnitt die Brotscheibe so zerteilen, daß auf beiden Seiten gleich viele Körner liegen?

Problem des Monats November 1982
Professor Dr. Stochasterix hat gerade seine Vorlesung beendet und steht nun vor dem Hörsaal. Als die Studenten in durchaus zufälliger Reihenfolge den Saal verlassen, fällt dem Professor auf, daß die ersten fünf sämtlich Frauen sind. „Interessant“, sagt er zu seinem Freund, „die Chancen dafür waren genau 50 zu 50.“
Wieviele Studenten befanden sich in dem Hörsaal und wieviele von ihnen waren weiblich?

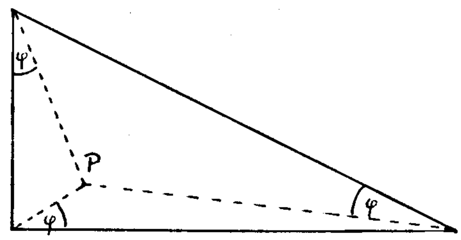
Problem des Monats Dezember 1982
Wie lautet die 100. Ziffer in der Dezimaldarstellung von
$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$?
Dabei können Neunerperioden stets vermieden werden, z.B. $3,235\overline{9}=3,236$.

Problem des Monats Januar 1983
In einer Ecke eines Tetraeders stoßen die drei Kanten paarweise senkrecht aufeinander. Die Inhalte der drei angrenzenden Flächen seien A, B, C.
Wie groß ist der Inhalt D der vierten Fläche?

Problem des Monats Februar 1982
An einer Tafel stehen die Zahlen 1, 2, 3, …, 1983. Man darf zwei beliebige Zahlen streichen und dafür ihre Differenz anschreiben. Wiederholt man diesen Vorgang genügend oft, so bleibt an der Tafel schließlich nur noch eine Zahl stehen.
Warum ist diese stets gerade?
Wie müßte diese Aufgabe für 1984 bzw. 1985 formuliert werden?

Problem des Monats März 1983
Die alten Griechen haben eine Zahl „vollkommen“ genannt, wenn die Summe ihrer echten Teiler genauso groß ist wie die Zahl selbst.
Unter den Zahlen der Form $n = p^k \cdot q$ mit Primzahlen p, q mit der natürlichen Zahl k gibt es vollkommene Zahlen, z. B. die Zahl $28 = 2^2 \cdot 7$; denn 1 + 2 + 4 + 7 +14 = 28.
Welche Bedingungen an p, q, k kennzeichnen vollkommene Zahlen?

Problem des Monats April 1983
Wie läßt sich in jedem rechtwinkligen Dreieck ABC ein Punkt P konstruieren, für den die Winkel PAB, PBC und PCA gleich groß sind?



Problem des Monats Mai 1983
n Zwillingspaare werden von bis n numeriert. Sie sollen sich nun so in einer Reihe aufstellen, daß zwischen den Zwillingsgeschwistern mit der Nummer k genau k andere Personen stehen, für n = 3 z.B. 2 3 1 2 1 3.
Ist das die einzig mögliche Aufstellung?
Gibt es derartige Aufstellungen auch für n = 4, 5, 6, 7?

Problem des Monats Juni 1983
Die Gleichung
$$\left[1{,}62^2 \cdot n\right] = \left[1{,}62 \cdot n\right] + n$$
wird von vielen natürlichen Zahlen erfüllt, z.B. von 1, 2, …, 10, 50, 100, 200, nicht aber von allen.
Gibt es eine reelle Zahl c derart, daß die Gleichung
$$\left[c^2 \cdot n\right] = \left[c \cdot n\right] + n$$
für alle natürlichen Zahlen n gilt?
($\left[x\right]$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.)

Problem des Monats September 1983
Ein Spielfeld besteht aus n Punkten auf einer Kreislinie und all ihren Verbindungsstrecken. Zwei Spieler (Rot, Grün) färben abwechselnd eine der Strecken mit dem Ziel, ein Dreieck aus gleichgefärbten Seiten zu erhalten.
Für n = 4 kann das Spiel unentschieden enden. Welches ist das kleinste n, bei dem ein Unentschieden *nicht* eintreten kann?

Problem des Monats Oktober 1983
Beweise die Ungleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^3$$

Wobei die n reellen Zahl $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Bedingungen $0 \leq a_i - a_{i-1} \leq 1$ für $i = 1, \ldots n$ $(a_0 = 0)$ erfüllen.
Wann gilt sogar das Gleichheitszeichen?

Problem des Monats November 1983
Wann kann man zu zwei ineinanderliegenden Kreisen K(O;R) und K'(O'; r) ein Dreieck so zeichnen, daß K der Umkreis und K' der Inkreis ist?
Leonhard Euler (I707-1783) hat dieses Problem gelöst und dafür folgendes Kriterium gefunden:
$d^2 = R^2 - 2 \cdot R \cdot r$ mit $d := |OO'|$.
Versuche, einen Beweis zu finden.

Problem des Monats Dezember 1983
Warum gibt es unter je zehn aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets eine, die relativ prim zu allen anderen ist?
(Zwei Zahlen heißen relativ prim zueinander, wenn 1 der einzige gemeinsame Teiler ist.)

Problem des Monats Januar 1984
In der Sprache „Analpha“ dürfen Wörter nur nach folgenden Regeln gebildet sein:

1) Jedes Wort besteht nur aus den Buchstaben A und B;
2) An jedes Wort darf dasselbe Wort angehängt werden, wobei BB wegzulassen und AAA durch B zu ersetzen ist;
3) An jedes mit A endende Wort darf ein B angehängt werden.

Gehören mit BAB auch ABABA und BABAB zum analphischen Wortschatz?

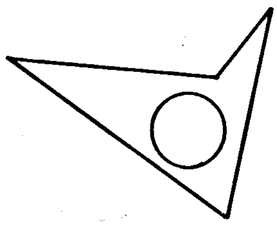
Problem des Monats Februar/ März 1984
Frank und Ute treffen sich mit 3 anderen Ehepaaren zum Schachspielen. In einer Pause stellt Frank fest, daß die übrigen Teilnehmer lauter verschiedene Anzahlen von Spielen beendet haben.
Wieviele Partien hat Ute gespielt, wenn keiner gegen seinen Ehepartner und auch keiner mehrfach gegen denselben Gegner gespielt hat?

Problem des Monats April 1984
Gibt es in der *Ebene* ein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte nur ganzzahlige Koordinaten haben?
Ist ein entsprechendes Problem im *Raume* lösbar?

Problem des Monats Mai 1984
Unter 12 Kugeln weicht genau eine im Gewicht ab.
Wie kann man mit höchstens 3 Wägungen auf einer Balkenwaage feststellen, um welche Kugel es sich handelt, und ob diese leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

Problem des Monats Juni 1984
Wie groß ist die Summe aller Ziffern der Zahlen 1, 2, 3, …, $10^n - 1$?

Problem des Monats August 1984
In der Ebene ist ein Viereck mit dem Flächeninhalt A und dem Umfang U gegeben.
Warum gibt es in seinem Innern stets einen Kreis, dessen Radius r größer als $\frac{A}{U}$ ist?



Problem des Monats September 1984
Für welche natürlichen Exponenten n ist die Summe

$$\left(15\frac{1}{2}\right)^n + \left(16\frac{1}{2}\right)^n$$

ebenfalls eine natürliche Zahl?

Problem des Monats Oktober 1984
In einem Tennisturnier mit n Teilnehmern spielt jeder einmal. Bezeichnet für den r-ten Spieler S_r bzw. N_r gegen jeden genau die Anzahl seiner Siege bzw. Niederlagen, so gilt stets:

$$\sum_{r=1}^{n} S_r^2 = \sum_{r=1}^{n} N_r^2$$

Problem des Monats November 1984

Für jedes konvexe n-Eck, das im Innern eines Einheitsquadrates liegt, gilt

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^2 < 4$$

Dabei bezeichnen $l_1, l_2, \ldots, l_n$ die Seitenlängen des n-Ecks.

Problem des Monats Dezember 1984

Bestimme alle natürlichen Zahlen k, für die sowohl $2^k + 1$ als auch $2^{k+1} + 1$ prim sind.

Problem des Monats Januar 1985
Jeder Punkt der Ebene sei entweder rot oder grün gefärbt. Zeige:
Zu mindestens einer der beiden Farben gibt es Punkte mit jedem beliebig vorgegebenen Abstand.

Problem des Monats Februar 1985
Für welchen Punkt eines gleichseitigen Dreiecks ist die Summe der Abstände zu den Seiten am größten und für welchen am kleinsten?

Problem des Monats März 1985
Setze
$a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n^2$ für n = 1, 2, 3, …
Zeige, daß in $a_n - 1$ mindestens n verschiedene Primzahlen aufgehen.

Problem des Monats April 1985
In einem Land seien alle Entfernungen zwischen den Städten verschieden groß. Eines Tages startet in jeder Stadt ein Flugzeug zur nächstbenachbarten Stadt.
Warum können dann in keiner Stadt mehr als 5 Flugzeuge ankommen?

Problem des Monats Mai 1985
Andreas denkt sich eine Zahl von 0 bis 15. Bernd soll diese Zahl raten. Er darf aber nur solche Fragen stellen, auf die Andreas mit „ja“ oder „nein“ antworten kann.
Wie gelingt es Bernd, die Zahl stets mit 7 Fragen zu raten, wenn Andreas bei höchstens einer Antwort lügen darf?

Problem des Monats Juni 1985
Für welche natürlichen Zahlen a und b gilt
$a \cdot b \cdot g \cdot k = 176400$ und $g + k = 2l2$,
wenn g der größte gemeinsame Teiler und k das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b sind?

Problem des Monats Juli 1985
Bei einem Schachbrett fehle das Feld Al.
Wieviele kongruente Dreiecke sind mindestens nötig, um dieses Schachbrett zu überdecken?

Problem des Monats August 1985
Die böse 7.
Man zeige: Genau 7 Kanten kann kein Polyeder im dreidimensionalen Raum haben, während für jede andere Kantenzahl k mit k > 5 ein Polyeder existiert.

Problem des Monats September 1985
Beweise: In der Dezimaldarstellung von $\sqrt{3}$, also in 1,732508…, gibt es einen Block aus 17 Ziffern, der unendlich oft vorkommt.

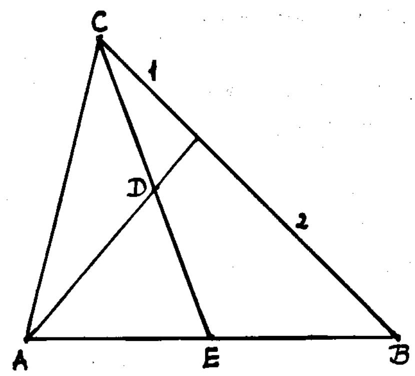
Problem des Monats Oktober/ November 1985

Gegeben ist das Tripel (1, 2, $\sqrt{2}$). Man darf zwei Zahlen davon (a und b) durch $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ ersetzen.

Kann man durch Wiederholung dieses Schrittes jemals das Tripel (1, 2, $1+\sqrt{2}$) erhalten?

Problem des Monats Dezember 1985

Verbindet man den Eckpunkt A eines Dreiecks ΔABC mit dem Mittellpunkt D der Seitenhalbierenden $\overline{CE}$ so teilt der Strahl $\overline{AD}$ die Seite $\overline{CB}$ im Verhältnis 1 : 2.

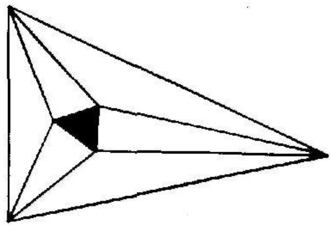


Problem des Monats Januar 1986
Die Zahlen 1, 2, …, 64 seien auf die Felder eines Schachbretts verteilt. Als Abstand zweier benachbarter Felder, auf denen die Zahlen a und b liegen, wird $|a-b|$ definiert. (Zwei Felder heißen benachbart, wenn sie mindestens einen Eckpunkt gemeinsam haben.)
Lassen sich die Zahlen so verteilen, daß alle Abstände kleiner als 9 sind?

Problem des Monats Februar 1986
In der Ebene seien drei Kreise mit paarweise verschiedenen Radien und mit paarweise leeren Schnittmengen gegeben. Legt man an je zwei dieser Kreise die äußeren Tangenten, so ergeben sich drei Schnittpunkte.
Warum liegen diese Schnittpunkte stets auf einer Geraden?

Problem des Monats März 1986
In der Mitte eines quadratischen Wasserbeckens befindet sich ein guter Schwimmer. Vier Nichtschwimmer lauern in den vier Ecken. Sie dürfen sich nur am Rand bewegen und zwar mit einer Geschwindigkeit, die die des Schwimmers um höchstens 40% übersteigt.
Können die vier Nichtschwimmer den Schwimmer am Verlassen des Beckens hindern?

Problem des Monats April 1986
Es sei z eine natürliche Zahl, in deren Neuner-Darstellung nur die Ziffer 1 vorkommt.
Zeige, daß es dann eine natürliche Zahl n gibt mit $z = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

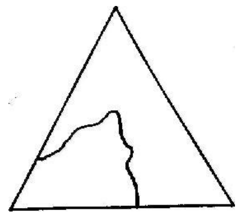


Problem des Monats Mai 1986
In jedem Dreieck treffen sich die Paare der Winkeldrittelnden in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks (Morley 1904). Beweis?

Problem des Monats Juni/ Juli 1986
Warum ist in der Folge

49, 4489, 444889, 44448889, 4444488889, ...

jede Zahl eine Quadratzahl?



Problem des Monats August/ September 1986
Welche Kurve minimaler Länge halbiert den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks?

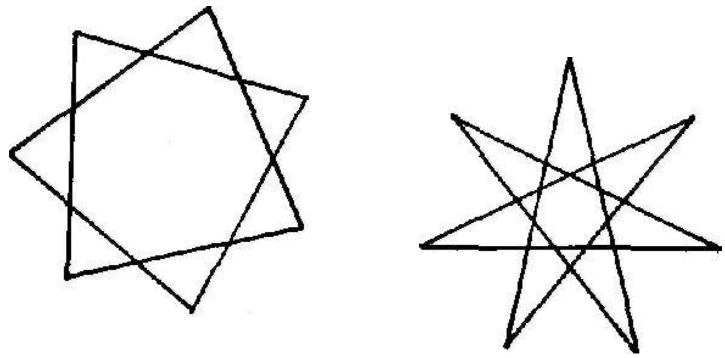
Problem des Monats Oktober 1986
Die Zahlen 1, 2,..., 2n seien irgendwie auf zwei disjunkte Mengen $A := \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ und $B := \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ verteilt; dabei gelte $a_1 < a_2 < ... < a_n$ und $b_1 < b_2 < ... < b_n$.
Warum ist die Summe

$$|a_1 - b_n| + |a_2 - b_{n-1}| + \ldots + |a_n - b_1|$$

invariant?

Problem des Monats November 1986

Auf einer Kreislinie seien n Punkte gleichmäßig verteilt. Durch Verbinden aller Punkte mit einem einzigen geschlossenen Streckenzug soll eine reguläre Sternfigur entstehen. So gibt es z.B. genau zwei nichtkongruente Siebener-Sterne.
Wie viele nichtkongruente Sterne gibt es für jedes n?



Problem des Monats Dezember 1986

Die Zahl 4 läßt sich auf fünf verschiedene Weisen als Summe von Einsen und Zweien darstellen:

$$1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2.$$

Wie viele Darstellungen dieser Art hat die Zahl 24?

Problem des Monats Januar 1987
Warum gibt es ein Vielfaches von 1987, dessen Dezimaldarstellung nur die Ziffer 1 enthält?

Problem des Monats Februar 1987
Sieben Zwerge sitzen um einen runden Tisch und füllen den Inhalt ihrer Becher nach folgender Regel um:
Der erste Zwerg verteilt seinen Inhalt gleichmäßig auf die Becher der anderen, anschließend tut der zweite Zwerg das gleiche, dann der dritte, . . . und schließlich der siebente.
Zu ihrer Verwunderung stellen sie fest, daß dann der Anfangszustand wieder hergestellt ist.
Wie waren die Becher zu Beginn gefüllt?

Problem des Monats März 1987
Die Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

sollen entweder durch Plus- oder durch Minuszeichen miteinander verknüpft und dabei genau einmal verwendet werden.
Welche der Zahlen 21, 22, 23 können als Ergebnis auftreten?

Problem des Monats April 1987
Gegeben seien ein Parallelogramm und ein Punkt P auf einer Seite.
Konstruiere zwei von P ausgehende Strahlen, welche die Fläche des Parallelogramms in drei gleich große Teile zerlegen.

Problem des Monats Mai 1987
Sei p eine Primzahl. Warum ist

$$2^p + 3^p$$

weder eine Quadratzahl, eine Kubikzahl noch eine höhere Potenz?

Problem des Monats Juni/ Juli 1987
$T = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ sei eine nichtleere Teilmenge von $M = \{1, 2, ..., n\}$. Als Rezi von T werde

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$$

bezeichnet.
Wie groß ist die Summe aller Rezis?

Problem des Monats August 1987
In jedem Dreieck, dessen einer Winkel 60° mißt, verläuft eine Winkelhalbierende zweier Höhen durch den Umkreismittelpunkt.

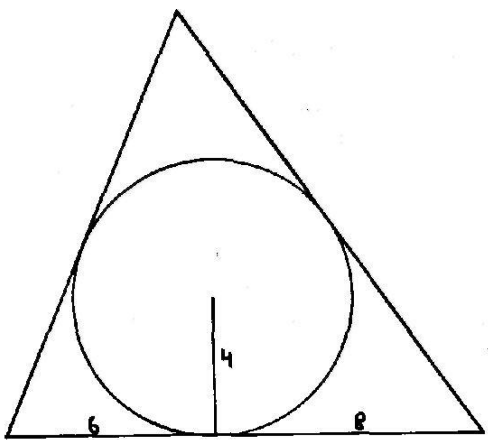
Problem des Monats September 1987
Eine Erbschaft besteht aus 20 Goldstücken, deren einzelne Gewichte ganzzahlig sind. Das Gesamtgewicht beträgt 40, und das schwerste Goldstück ist nicht schwerer als alle anderen zusammen. Läßt sich eine solche Erbschaft stets in zwei gleich schwere Teile zerlegen?

Problem des Monats Oktober 1987
Lassen sich, in dem nebenstehenden Schema lauter „+“-Zeichen herstellen, wenn nur folgende Umformungen zugelassen sind: Umwandlung jedes Zeichens in einer ganzen Spalte bzw. in einer ganzen Zeile?

+	–	+	+	+	–	+	–
–	+	–	+	–	+	–	+
+	–	+	–	+	–	+	–
–	+	–	+	–	+	–	+
+	–	+	–	+	–	+	–
–	+	–	+	–	+	–	+
+	–	+	+	+	–	+	–

Problem des Monats November 1987
Gegeben ist ein Kreis.
Welche Punkte der Ebene können Höhenschnittpunkt eines in diesen Kreis einbeschriebenen Dreiecks sein?

Problem des Monats Dezember 1987
Seitenabschnitte und Inkreisradius eines Dreiecks haben die in der Zeichnung angegebenen Maße.
Berechne die Seitenlängen des Dreiecks.

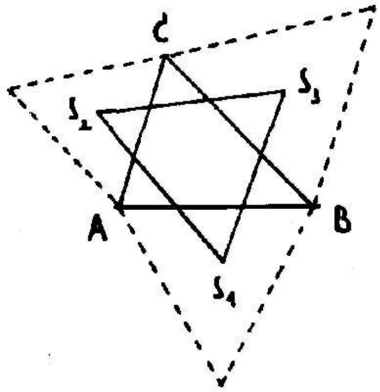


Problem des Monats Januar 1988

Betrachtet werden Tripel von natürlichen Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft $a + b + c = 2^n - 1$ für vorgegebenes $n > 1$. Falls in einem solchen Tripel alle Zahlen kleiner als 2^{n-1} sind, soll das Tripel „ausbalanciert" heißen. Wenn ein Tripel nicht ausbalanciert ist (ohne Einschränkung sei a P b < c), wird es nach folgender Regel durch ein neues Tripel (a', b', c') ersetzt: $a' = 2a + 1$, $b' = 2b + 1$, $c' = 2c - 2^n - 1$.

Zeige: Durch eventuelle mehrfache Anwendung dieser Regel erhält man stets ein ausbalanciertes Tripel.

Problem des Monats Februar 1988



Konstruiert man über jeder Seite eines beliebigen Dreiecks das gleichseitige Außendreieck, so bilden die Schwerpunkte dieser Außen dreiecke ein gleichseitiges Dreieck.
(Satz von Napoleon)

Problem des Monats März 1988

Für jede natürliche Zahl n erhält man durch wiederholtes Bilden der Quersumme schließlich eine einstellige Zahl. Diese heiße q(n).
Warum ist die Folge q(l), q(2), q(4), ..., $q(2^k)$, ... periodisch?

Problem des Monats April 1988

S sei ein Punkt auf dem Mantel eines geraden Kegels.
Gibt es einen geschlossenen Weg durch S, der den Kegel umläuft und minimale Länge besitzt?
Wenn ja, wie läßt er sich finden?

Problem des Monats Mai 1988

Das Straßennetz von Einbahnien hat folgende Eigenschaften:

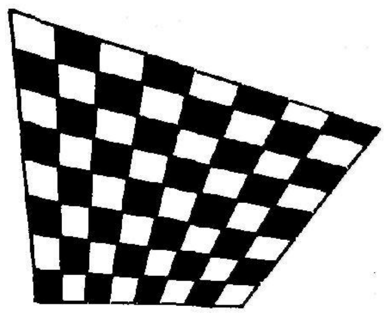
- Die Straßen kreuzen sich außerhalb der Städte nicht.
- Für je drei Städte A, B, C kann man von A nach B gelangen, ohne über C fahren zu müssen.

Das Verkehrsministerium von Einbahnien plant, alle Straßen zu Einbahnstraßen zu erklären. Läßt sich dieser Plan so durchführen, daß man immer noch von jeder Stadt zu jeder anderen gelangen kann?

Problem des Monats Juni/ Juli 1988

Die Ecken eines Dreiecks seien Gitterpunkte, und jede Seite enthalte gleich viele Gitterpunkte. Im Innern des Dreiecks liege genau ein Gitterpunkt.
Warum ist dieser innere Punkt der Schwerpunkt des Dreiecks?

Problem des Monats August 1988

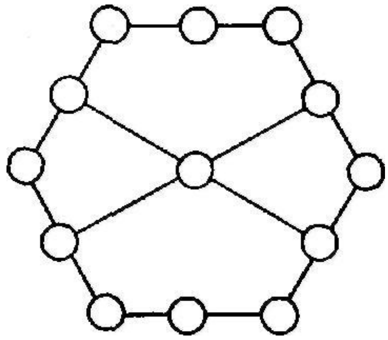


Gegeben sei ein beliebiges konvexes Viereck. Auf ihm wird ein „Schachbrett"-Muster dadurch erzeugt, daß jede der vier Seiten in acht gleiche Teile zerlegt wird.
Ist der Flächeninhalt aller schwarzen Vierecke ebenso groß wie der aller weißen?

Problem des Monats September 1988
Um 12 Uhr starten 3 Freunde in Hamburg zu einem Ausflug nach dem 154 km entfernten Flensburg. Zu Fuß schaffen sie 6 km in der Stunde. Ihr zweisitziger Kabinenroller fährt höchstens 66 km/h.
Wann sind die 3 Freunde frühestens in Flensburg?

Problem des Monats Oktober 1988
Kann man jedes konvexe Viereck durch die vier Kreisscheiben überdecken, deren Durchmesser gleich den Vierecksseiten sind?

Problem des Monats November 1988
Magisches Sechseck
Können die Zahlen von 1 bis 13 so in die Felder verteilt werden, daß die Summe von je drei auf einer Geraden liegenden Zahlen gleich groß ist?



Problem des Monats Dezember 1988
In jedem Trapez mit unterschiedlich großen Basiswinkeln ist diejenige Diagonale, die von der Ecke mit dem kleineren Winkel ausgeht, länger als die andere Diagonale.

Problem des Monats Januar 1989
Auf wie viele Arten läßt sich ein konvexes Achteck in überschneidungsfreie Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte lauter Eckpunkte des Achtecks sind?

Problem des Monats Februar 1989
Verbindet man die Seitenmittelpunkte eines gegebenen Quadrats mit den gegenüberliegenden Quadratecken, so entsteht im Innern ein Achteck.
Welchen Flächenanteil überdeckt dieses Achteck?

Problem des Monats März 1989
Durch $x_1 := 2$ und $x_{n+1} := x_n + \frac{x_n^2 - x_n}{n+1}$, n = 1,2,3,... sei eine Folge definiert.
Sind x_{42} und x_{43} ganzzahlig?

Problem des Monats April 1989
S sei der Diagonalenschnittpunkt eines Vierecks ABCD, das in einen Kreis einbeschrieben ist. Wenn die in den Eckpunkten an den Kreis angelegten Tangenten wieder ein Viereck bilden, so sei dessen Diagonalenschnittpunkt T.
Wie müssen A, B, C und D auf dem Kreis gewählt werden, damit der Abstand zwischen S und T minimal wird?

Problem des Monats Mai 1989
Warum ist es nicht möglich, durch Addition eines Teilers einer natürlichen Quadratzahl wieder eine Quadratzahl zu erhalten?

Problem des Monats Juni 1989
Hein und Fiete haben sich zum 800, Hafengeburtstag folgendes Spiel ausgedacht:
Auf einem Kreis sind 800 Punkte markiert. Jeder Spieler muß abwechselnd eine Sehne zeichnen, aber so, daß sie keine schon vorhandene Sehne innerhalb des Kreises schneidet. Wer nicht mehr zeichnen kann, hat verloren. Hein beginnt.
Kann Fiete erreichen, daß Hein verliert?

Problem des Monats Juli/ August 1989
Ein konvexer Körper wird durch vier reguläre Sechsecke und durch vier reguläre Dreiecke, jeweils der Kantenlänge 1, begrenzt. In jedem Eckpunkt treffen sich genau zwei Sechsecke und ein Dreieck.
Wie groß ist das Volumen dieses Körpers?

Problem des Monats September 1989
Die Schlüssel zu 30 Geldkassetten seien zufällig auf diese Kassetten verteilt und in ihnen eingeschlossen, je ein Schlüssel in einer Kassette. Eine Kassette werde aufgebrochen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit lassen sich die übrigen 29 Kassetten ohne Zerstörung öffnen?

Problem des Monats Oktober 1989
Aus einem Dreieck entsteht durch fortgesetzte Punktspiegelung an den Seitenmitten eine Parkettierung der Ebene aus kongruenten Dreiecken.
Das Ausgangsdreieck werde in einem ersten Schritt rot gezeichnet, im zweiten Schritt werden alle die Dreiecke rot gefärbt, auf deren Seiten mindestens ein roter Punkt liegt. Analog verfährt man weiter.
Wie viele Dreiecke sind nach dem 100. Schritt gefärbt?

Problem des Monats November 1989
Eine natürliche Zahl soll auf 6 enden. Streicht man diese Ziffer und setzt sie vor die anderen Ziffern, so soll die neue Zahl das Vierfache der ursprünglichen Zahl sein.
Gibt es eine Zahl mit diesen Eigenschaften?

Problem des Monats Dezember 1989
Ein Billard-Tisch habe die Form eines spitzwinkligen Dreiecks mit den Seiten a, b und c. Im Punkt S auf c befindet sich eine (als punktförmig anzusehende) Kugel. Nach Anstoß durchläuft sie infolge (idealer) Reflexion an a, b eine Bahn, die zu S zurückführt und anschließend bei (idealer) Reflexion an c den gleichen Verlauf nimmt.
Für welche Punkte S ist eine solche Bahn möglich?

Problem des Monats Januar 1990
P sei ein Punkt im Innern eines regelmäßigen Tetraeders.
Für welche Lage von P ist die Summe der Abstände zu den vier Tetraederflächen am kleinsten?

Problem des Monats Februar 1990
n Städte eines Landes sind durch je eine direkte Eisenbahnlinie verbunden. Ein Eisenbahner soll jede Strecke genau einmal zur Kontrolle abfahren.
Wenn er eine Stadt erreicht hat, deren sämtliche von ihr ausgehenden Linien bereits kontrolliert sind, fliegt er zu einer Stadt, von der aus er seine Kontrollfahrt fortsetzen kann.
Wie groß ist die Minimalzahl der dafür notwendigen Flüge?

Problem des Monats März 1990
Die Mathematische Gesellschaft in Hamburg (gegr. 1690) wünscht sich zu ihrem 300-jährigen Jubiläum 300 natürliche Zahlen mit folgenden Eigenschaften: Die Differenz von je zweien dieser Zahlen teilt die größere der beiden.
Ist dieser Wunsch überhaupt erfüllbar?

Problem des Monats April 1990
Gegeben sind ein Dreieck und ein Punkt P außerhalb des Dreiecks.
Wie kann man eine Gerade durch P konstruieren, welche die Dreiecksfläche halbiert?

Problem des Monats Mai 1990
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die kleinste Lotto-Zahl beim Lotte „6 aus 49“ eine Primzahl?

Problem des Monats Juni/ Juli 1990
Ein Satz von ganzzahligen Gewichten heißt ein *Basis-Satz*, wenn das Gesamtgewicht 29 beträgt und wenn alle Gewichte von 1 bis 29 auf genau eine Weise dargestellt werden können.
Gib alle Basis-Sätze an!

Problem des Monats August/ September 1990
Andreas und Bettina belegen abwechselnd ein schachbrettartiges Spielfeld mit einem Spielstein. Dafür stehen zwei Sorten von Spielsteinen zur Verfügung: Einersteine und Doppelsteine, Wer zuletzt setzen kann, hat gewonnen.

a) Gibt es eine Gewinn Strategie? Wenn ja, für wen?
b) Verallgemeinere das Spiel für ein (n mal n) Spielfeld!
c) Welche anderen Variationen für dieses Spiel fallen Dir ein?

Problem des Monats Oktober 1990

Elke und Alf, die durchtrainierten Jogger, laufen zur gleichen Zeit an den entgegengesetzten Enden ihrer gemeinsamen Joggingstrecke los.
Alf ist gerade 3500 Schritte gelaufen, als ihm Elke begegnet. An den Enden der Strecke wenden beide unverzüglich und laufen zu ihren Startpunkten zurück.
Als Alf die Elke zum zweiten Mal trifft, hat er nach seiner Wende 2500 Schritte gemacht.
Wer von beiden ist schneller?
Wieviel Schritte braucht Alf für die ganze Joggingstrecke?

Problem des Monats November 1990

Errichtet man über der Seite AB eines beliebigen Dreiecks ABC die Mittelsenkrechte und trägt auf ihr die halbe Seitenlänge nach außen hin ab, so erhält man den Punkt C'.
Analog konstruiere man die Punkte A' und B'.
Zeige, daß die Strecken A'C' und BB' gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen.
Fallen Dir noch andere Beziehungen auf?

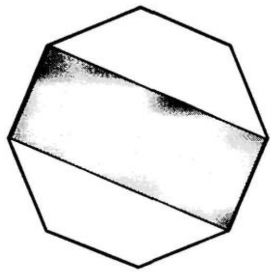
Problem des Monats Dezember 1990

100 Schüler sind in Form eines Quadrates aufgestellt. Von jeder Querreihe wird der kleinste Schüler ausgewählt, und der größte unter diesen zehn sei mit A bezeichnet. Aus jeder Längsreihe wird dann der größte Schüler bestimmt, und der kleinste unter ihnen sei B.
Können A und B der gleiche Schüler sein? Wenn A und B verschiedene Schüler bezeichnen, wer ist dann der größere von beiden?
Versuche das Problem abzuändern oder zu verallgemeinern!

Problem des Monats Januar 1991
In der Ebene sitzen an den Ecken eines Quadrates drei punktförmige Frösche und langweilen sich. Nach einiger Zeit beschließen sie, ein „Bockspringen" zu veranstalten. Dabei kann ein Frosch über einen anderen geradlinig hinweg springen, und sein Landeplatz ist von dem übersprungenen Frosch ebenso weit entfernt wie der Startplatz.
Kann jemals ein Frosch in der vierten Ecke des Ausgangsquadrates sitzen?

Problem des Monats Februar 1991
Auf einem 1 m langen Gummiband sitzt ein Käfer, der über dieses Band krabbeln möchte. Während eines Tages legt er jeweils 10 cm zurück. In der Nacht ruht er sich aus. In der Nacht wird jedoch das gesamte Gummiband stets um genau 1 m gleichmäßig gedehnt.
Kann der Käfer unter diesen Bedingungen überhaupt das andere Ende des Gummibandes erreichen?
Wenn ja, wie lange braucht er dazu?

Problem des Monats März 1991
Welchen Flächenanteil des regelmäßigen Achtecks hat das markierte Rechteck?
Wie ist die Situation beim regelmäßigen Sechseck und beim regelmäßigen Zehneck?



Problem des Monats April 1991
Aus vier ganzen Zahlen a, b, c, d werden vier neue Zahlen a', b', c', d' nach folgender Vorschrift gewonnen:

$$a' = a - b,\ b' = b - c,\ c' = c - d,\ d' = d - a$$

Wie müssen a, b, c, d ausgewählt werden, damit bei Fortsetzung dieses Prozesses unendlich viele Zahlen auftreten?

Problem des Monats Mai 1991
K und L seien zwei Punkte eines Kreises und zugleich Seitenmittelpunkte von $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ eines Dreiecks ABC.
Wie konstruiert man ein solches Dreieck, wenn auch der Punkt C und der Schwerpunkt S auf dem gegebenen Kreis liegen?

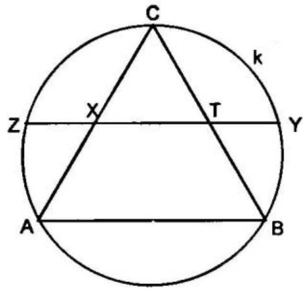
Problem des Monats Juni 1991
Dreißig Schuhe stehen in einer Reihe, je fünfzehn linke und fünfzehn rechte.
Zeige, daß es bei jeder Anordnung der Schuhe stets zehn nebeneinanderstehende Schuhe geben muß, unter denen je fünf linke und fünf rechte vorkommen müssen.

Problem des Monats Juli / August 1991
Die 1991 Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{1991}$ werden nebeneinander aufgeschrieben. Man darf nun zwei beliebige Zahlen a, b ausstreichen und durch eine neue Zahl

$$a + b + a \cdot b$$

ersetzen. Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis schließlich eine einzige Zahl übrig bleibt. Kann man erreichen, daß z.B. die Zahl 100 übrig bleibt?

Problem des Monats September 1991



Die Mittelparallele XT eines gleichseitigen Dreiecks ABC schneidet seinen Umkreis im Punkt Y stets so, daß T die Strecke $\overline{XY}$ nach dem „Goldenen Schnitt“ teilt: Der größere Abschnitt $\overline{XT}$ verhält sich zu dem kleineren Abschnitt $\overline{TY}$ wie die ganze Strecke $\overline{XY}$ zu dem größeren Abschnitt $\overline{XT}$ (vergleiche mit der Zeichnung).

Problem des Monats Oktober 1991

20 Streichhölzer liegen in einer Reihe nebeneinander. Ist es möglich, aus ihnen eine Reihe von 10 Paaren zu bilden, wenn nur folgende Züge erlaubt sind:

a) Ein Streichholz überspringt genau zwei daneben liegende Hölzer und bildet mit dem nächsten ein Paar.
b) Bewegt werden dürfen nur einzeln liegende Hölzer.
c) Beim Überspringen zählt ein Paar wie zwei einzelne Hölzer.

Problem des Monats November 1991

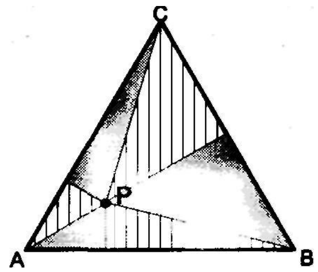
Andrea und Bernd spielen das „Hütchen-Spiel“: Bernd soll erraten, unter welchem von den drei Hütchen Andrea eine Münze versteckt hat.
Nachdem Bernd eine Vermutung geäußert hat, deckt Andrea eines der beiden anderen Hütchen auf. Bernd hat nun die Möglichkeit, seine Vermutung zu ändern oder beizubehalten. Was ist für ihn günstiger?

Problem des Monats Dezember 1991

Eine Menge M natürlicher Zahlen heiße *lückenhaft*, wenn zu jedem Element m aus M der Nachfolger m +1 nicht zu M gehört. Die leere Menge soll auch als lückenhaft gelten.
Finde ein Verfahren, um die Anzahl aller lückenhaften Teilmengen von
M = {1 , 2 , 3 , 4 ,..., n } zu bestimmen.

Problem des Monats Januar 1992
Auf einem Tisch liegen 1992 Streichhölzer. Anke und Lars vereinbaren folgendes Spiel: Jeder darf abwechselnd bis zu 180 Streichhölzer (mindestens 1) wegnehmen. Gewonnen hat, wer die letzten Hölzer nehmen kann.
Mit welcher Strategie läßt sich der Gewinn erzwingen?
Was ändert sich, wenn nicht 1992, sondern 1991 Streichhölzer vorhanden sind?

Problem des Monats Februar 1992
P sei ein innerer Punkt eines gleichseitigen Dreiecks ABC. Fälle von P die Lote auf die Dreieckseiten und verbinde P mit den Eckpunkten. Dabei entstehen Teildreiecke, die abwechselnd rot und grün gefärbt werden.
Bei welcher Lage von P ist die rote Fläche größer als die grüne?

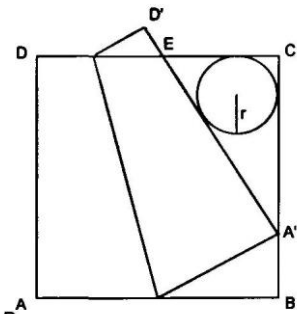


Problem des Monats März 1992
Marc schreibt den folgenden Ausdruck an die Tafel:

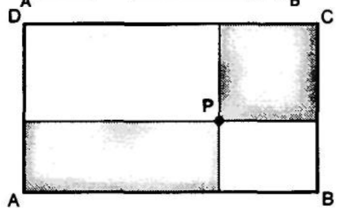
$$1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10$$

und fordert Dierk auf, durch geeignete Beklammerung das Ergebnis 7 zu erzielen.
Ist das möglich, und wenn ja, wie?

Problem des Monats April 1992
Beim Falten eines Quadrates ABCD falle der Eckpunkt A auf den Punkt A' der Seite BC sowie D auf den Punkt D'. Mit E werde der Schnittpunkt der Seiten CD und A'D' bezeichnet, und r sei Inkreisradius des Dreiecks EA'C.
Warum gilt stets: $r = \left|\overline{D'E}\right|$?

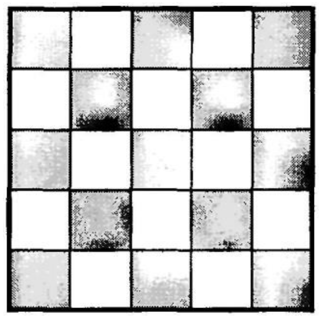


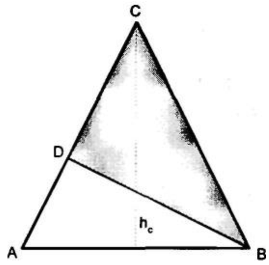
Problem des Monats Mai 1992
Gegeben sei das Rechteck ABCD mit dem Flacheninhalt 1 und einem inneren Punkt P. Zwei zu den Rechteckseiten parallele Geraden durch P teilen das Rechteck in vier kleinere Rechtecke auf.
Warum hat von den beiden Rechtecken mit den Eckpunkten A bzw. C höchstens eines einen größeren Flächeninhalt als 0,25?



Problem des Monats Juni 1992
Warum gibt es unter je sechs irrationalen Zahlen stets drei Zahlen, deren paarweise Summen sämtlich irrational sind?
Gilt das auch schon bei je fünf irrationalen Zahlen?

Problem des Monats Juli / August 1992
Das nebenstehende „Schachbrett“ soll durch geradlinige Schnitte in seine 25 Einzelteile zerlegt werden.
Wie viele Schnitte braucht man mindestens?





Problem des Monats September 1992

Im gleichschenkligen Dreieck ABC sei die Basis $\overline{AB}$ gleichlang mit der Höhe h_c.
D sei der Fußpunkt des Lotes von B auf AC.
Warum verhalten sich die Seitenlangen in dem Dreieck CDB wie 3 : 4 : 5?

Problem des Monats Oktober 1992

In Inflationen wachsen die Warenpreise nach folgender merkwürdigen Regel:
Von einem Monat zum nächsten Monat verdoppeln oder verdreifachen sie sich.
Zu Beginn eines Jahres kosteten zehn Waren alle das gleiche. Ein Jahr später waren alle zehn Preise paarweise verschieden.
Warum war dann der größte Preis mindestens 36mal so groß wie der kleinste?

Problem des Monats November 1992

Der Millionär Dagobert D. ordnet aus Langeweile seine Säcke mit Goldmünzen. Überrascht stellt er fest, daß die Säcke sich sowohl in dreieckiger als auch in quadratischer Form ohne Rest anordnen lassen.
Wie viele Goldsäcke besitzt Herr D. genau, wenn die Zahl zwischen Eintausend und Zweitausend liegt?
Noch größer ist seine Überraschung, als er die Goldsäcke ausgeschüttet hat und er die Münzen ebenfalls in dreieckiger wie auch in quadratischer Form anordnen kann.
Wie viele Münzen hat der Milliardär Dagobert mindestens?

Problem des Monats Dezember 1992

Warum gibt es in jeder arithmetischen Folge, z.B. auch in

$$1992,\ 1992 + 1 \cdot 1993,\ 1992 + 2 \cdot 1993,\ \ldots$$

mindestens zwei, ja sogar unendlich viele Zahlen mit gleicher Quersumme?

Problem des Monats Januar 1993

In ein Quadrat sind 1993 gleichseitige Dreiecke einbeschrieben, d.h., ihre Eckpunkte liegen auf den Quadratseiten.

Warum kann man stets einen Punkt P im Quadrat finden, der zwar nicht notwendig auf 500, aber doch auf mindestens 499 Seiten dieser Dreiecke liegt?

Problem des Monats Februar 1993

Anton, Brigitte und Carl joggen gern. Anton benötigt für den Kilometer stets genau 5 Minuten, Carl genau 6 Minuten und Brigitte braucht genau den Mittelwert, nämlich 5 Minuten und 30 Sekunden. Die 10 km lange Trainingsstrecke läuft Anton also in 50 Minuten, Brigitte in 55 Minuten und Carl in 60 Minuten.

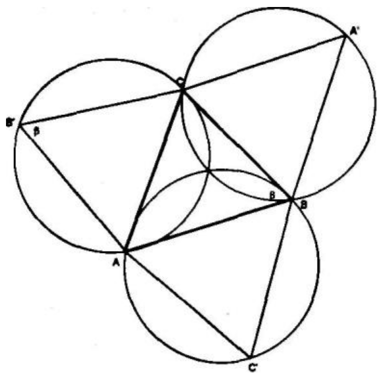
Während eines Sondertrainings verabreden sie (auf Vorschlag von Carl), daß jede/r genau 60 Minuten laufen soll. Dabei legen Anton 12 km, Carl 10 km und Brigitte 11 km zurück. Verblüfft stellt Brigitte fest, daß ihr für den elften Kilometer nur 5 Minuten verbleiben, da sie ja nach 55 Minuten bereits 10 km gelaufen ist.

Wo sind die fehlenden 30 Sekunden geblieben?

Problem des Monats März 1993

Über den Seiten eines vorgegebenen Dreiecks ABC werden nach außen gleichschenklige Dreiecke mit den Giebelpunkten A', B' und C' konstruiert. Dabei stimmen die Giebelwinkel mit den gegenüberliegenden Dreieckswinkeln überein.

Warum schneiden sich die drei Umkreise in einem Punkt, und zwar im Höhenschnittpunkt des vorgegebenen Dreiecks ABC?



Problem des Monats April 1993

Gibt es unendlich viele Quadratzahlen a_1^2, a_2^2, a_3^2, ... derart, daß auch die Summen $a_1^2 + a_2^2$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, ... Quadratzahlen sind?

Problem des Monats Mai 1993

Dem Zauberer S wird die Summe, dem Zauberer P wird das Produkt von drei positiven Zahlen mitgeteilt.

„Wenn ich wüßte," sagt S, „daß deine Zahl größer ist als meine, so würde ich die drei Zahlen wissen." „Aber meine ist kleiner als deine", antwortet P, „und deine Zahlen sind ..., ... und ..."

Welche drei Zahlen konnte P mit Sicherheit nennen?

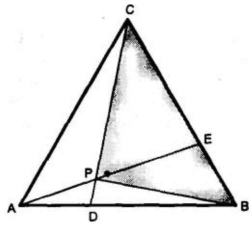
Problem des Monats Juni 1993

Es sei O der Mittelpunkt desjenigen Ankreises an das Dreieck ABC, der $\overline{AC}$ sowie die Verlängerungen von $\overline{BA}$ und $\overline{BC}$ berührt.

Warum liegt der Mittelpunkt D des Kreises durch die Punkte A, B und O stets auf dem Umkreis des gegebenen Dreiecks ABC?

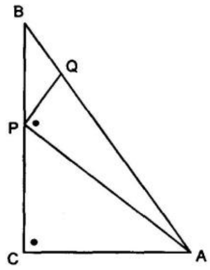
Problem des Monats Juli / August 1993

Zeige: Jede natürliche Zahl n ist darstellbar in der Form $n = (a^2 + b^2) – (c^2 + d^2)$ mit positiven natürlichen Zahlen a, b, c, d.



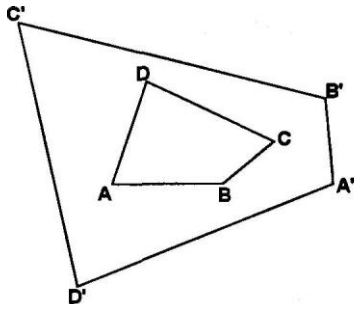
Problem des Monats September 1993
In dem gleichseitigen Dreieck ABC seien D und E Drittelungspunkte (vgl. Zeichnung). Der Schnittpunkt der Transversalen AE und CD heiße P. Warum ist der Winkel BPC ein rechter Winkel?

Problem des Monats Oktober 1993
Das Straßennetz einer Insel enthält nur einfache Kreuzungen und keine Sackgassen.
Auf diesem Straßennetz soll eine Rallye veranstaltet werden. Um die Gefahr von Kollisionen zu vermeiden, muß an jeder Kreuzung abgebogen werden.
Ist es möglich, das Abbiegen an jeder Kreuzung so vorzuschreiben, daß alle Straßen genau einmal durchfahren werden?



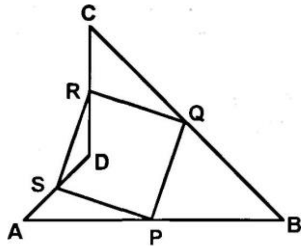
Problem des Monats November 1993
Im Dreieck ABC liege bei C ein rechter Winkel. Zu jedem Punkt P auf der Kathete $\overline{BC}$ wähle man auf der Hypotenuse $\overline{AB}$ den Punkt Q so, daß in dem Dreieck APQ ein rechter Winkel entsteht.
Für welche Lage von P hat Q minimale Entfernung von A?

Problem des Monats Dezember 1993
Gib alle Paare von aufeinanderfolgenden Primzahlen an, deren Summe mindestens 6 Teiler hat.



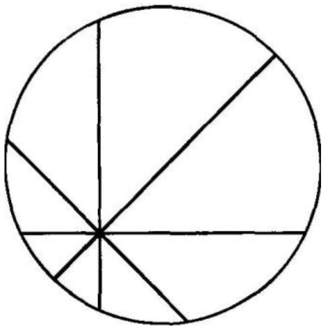
Problem des Monats Januar 1994
ABCD sei ein konvexes Viereck. A werde an B nach A' gespiegelt, B an C nach B', C an D nach C und schließlich D an A nach D'.
In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der Vierecke A'B'C'D' und ABCD zueinander?

Problem des Monats Februar 1994
Ein Schachbrett wird durch 32 Dominosteine vollständig belegt.
Warum gibt es keine Belegung, bei der sieben Dominosteine waagerecht und alle anderen senkrecht liegen?



Problem des Monats März 1994
In einem Viereck ABCD seien die Winkel bei A, B und bei C jeweils 45°.
Warum ist sein Seitenmittenviereck PQRS stets ein Quadrat?

Problem des Monats April 1994



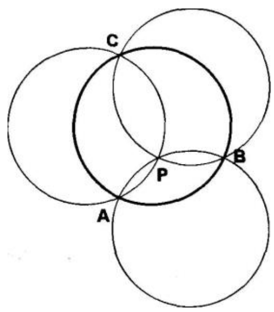
Konditoren besitzen zum Teilen von Torten in acht gleiche Teile einen Tortenschneider. Versehentlich wurde dieser Tortenschneider nicht im Zentrum der Torte aufgesetzt, so daß acht sehr ungleiche Stücke entstanden.
Ein Kunde findet die Ungleichmäßigkeit durchaus interessant und will eine halbe Torte davon haben.
Der Konditor legt einfach jedes zweite Stück auf ein Tablett und überreicht es dem Kunden.
Bei welchem Aufsetzen des Tortenschneiders ist dieses Verfahren gerechtfertigt, bei welchem nicht?

Problem des Monats Mai 1994
Für welche Primzahlpaare p, q ist

$$p^q + q^p$$

ebenfalls eine Primzahl?

Problem des Monats Juni 1994

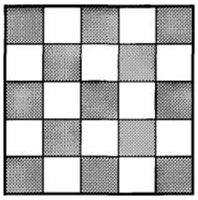


Kreis-Schablone als „Lineal“
Zeichne mit der Schablone einen Kreis und wähle auf der Kreislinie beliebig Punkte A, B, C.
Wenn Du nun durch je zwei dieser Punkte mit derselben Schablone neue Kreise zeichnest, so scheint es so, als ob sich die drei Kreise in einem Punkt P schneiden. Gilt das exakt?

Problem des Monats Juli/ August 1994
1994 einzeln schaltbare Lämpchen seien in einem Kreis angeordnet und zunächst eingeschaltet.
Nach einem Zufallsprozeß werden einige Lämpchen umgeschaltet und zwar entweder

- vier benachbarte Lämpchen oder
- von fünf benachbarten Lämpchen alle bis auf das mittlere.

Kann es passieren, daß gleichzeitig alle Lämpchen ausgeschaltet sind?



Problem des Monats September 1994
Gegeben ist ein „Schachbrett“ mit 25 Feldern.
Kann man das Papier so falten, daß mit einem einzigen Schnitt alle 25 Felder abgetrennt werden?

Problem des Monats Oktober 1994
Auf jeder der 100 Seiten eines kuriosen Notizbuches steht eine Aussage, und zwar steht auf der ersten Seite:

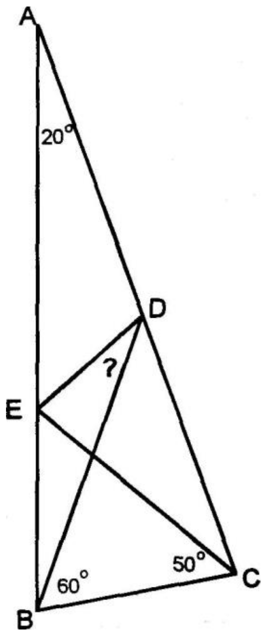
Dieses Notizbuch enthält genau eine falsche Aussage.

Ebenso steht auf der zweiten Seite:

Dieses Notizbuch enthält genau zwei falsche Aussagen.

Usf., auf der letzten Seite steht: Dieses Notizbuch enthält genau einhundert falsche Aussagen.
Welche dieser Aussagen entsprechen der Wahrheit, und welche sind falsch?

Problem des Monats November 1994
In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit dem Giebelpunkt A und dem Giebelwinkel 20° seien die beiden Punkte D und E folgendermaßen gewählt:
D liegt auf dem Schenkel AC mit ρDBC = 60° und E auf AB mit ρECB = 50°.
Wie groß ist der Winkel EDB?



Problem des Monats Dezember 1994
Gegeben seien vier Zahlen a, b, c, d, für die gilt:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a + b + c + d = 0.$$

Warum gibt es unter diesen vier Zahlen stets zwei, deren Summe gleich Null ist?

Problem des Monats Januar 1995

Xaver zeigt Yvonne ein Blatt, auf dem er die Zahlen 1990 bis 2000 als Summen von möglichst wenig Quadratzahlen schreiben wollte. Er begann so:

$1990 = 44^2 + 7^2 + 2^2 + 1^2$

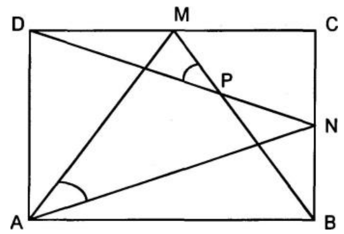
$1991 = 44^2 + 7^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$.

Yvonne sagt sogleich: „Nach Deiner Methode brauchst Du aber mehr Quadratzahlen als unbedingt nötig sind.“ „Ich benötige für keine Zahl mehr als sechs Quadratzahlen,“ verteidigt sich Xaver.

Daraufhin sagt Yvonne: „In den meisten Fällen wärst Du mit drei Quadratzahlen ausgekommen, bei drei Zahlen sogar mit zwei Quadratzahlen. Es gibt für einige Zahlen sogar bis zu 12 Möglichkeiten. Bei zwei Zahlen benötigt man jedoch vier Quadratzahlen.“

Hat Yvonne recht?

Problem des Monats Februar 1995



Es seien M und N zwei Seitenmittelpunkte in dem Rechteck ABCD (vergl. Zeichnung) und P der Schnittpunkt von DN mit MB.

Warum sind die Winkel ρMAN und ρDPM stets gleich groß?

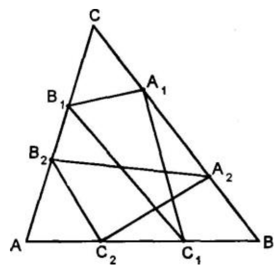
Problem des Monats März 1995

Der als Lügenbaron bekannte Freiherr von Münchhausen hatte beschlossen, vom 1. März ab nicht mehr zu lügen. Als leidenschaftlicher Wildentenjäger verkündete er seinem Koch an jedem Morgen:

„Heute werde ich mehr Enten schießen als vor zwei Tagen, aber weniger als vor einer Woche.“

Wie viele Tage kann der Baron längstens bei der Wahrheit bleiben, und wie viele Enten hat er dann mindestens erlegt?

Problem des Monats April 1995



In einem Dreieck ABC seien die Punkte A_1 auf a, B_1 auf b und C_1 auf c beliebig gewählt.

Durch Spiegelung dieser Punkte an den jeweiligen Seitenmittelpunkten ergeben sich die Punkte A_2, B_2, C_2.

Warum haben die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ stets gleiche Flächeninhalte?

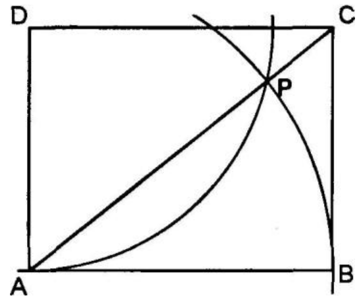
Problem des Monats Mai 1995

Welche natürlichen Zahlen n lassen sich in der Form

$n = a + b + c + d$

darstellen, wobei $a \cdot b = c \cdot d$ gilt und a, b, c, d positive ganze Zahlen sind, und welche lassen sich nicht so darstellen?

Problem des Monats Juni 1995



Gegeben ist ein Rechteck mit den Seiten a = 5 cm, b = 4 cm.

Bernd sagt: „Wenn ich um den Punkt A einen Kreis k_1 mit dem Radius a und um D einen Kreis k_2 mit dem Radius b schlage, so erhalte ich im Innern des Rechtecks ABCD einen Schnittpunkt P, der auf der Diagonalen AC liegt.“

Angela erwidert: „Nach meiner Zeichnung sieht das auch so aus. Ich bin mir aber nicht ganz sicher, ob P wirklich auf AC liegt.“

Liegt nun P auf AC oder nicht?

Problem des Monats Juli/ August 1995

Ein quadratisches Spielfeld ist schachbrettartig mit 25 quadratischen Legefeldem markiert. Außerdem sind 25 jeweils einfarbige quadratische Kärtchen in der Größe der Legefelder vorhanden, so daß man das Spielfeld vollständig mit den Kärtchen pflastern kann.

a) Es gebe unter den Kärtchen höchstens 6 verschiedene Farben. Zeige, daß es dann immer möglich ist, das Spielfeld so zu pflastern, daß das bedeckte Spielfeld als Farbmuster symmetrisch zu einer Diagonalen ist.
b) Stimmt diese Aussage auch dann noch, wenn 7 Farben oder mehr vorkommen? Versuche für jede Anzahl von Farben eine Aussage zu machen.

Problem des Monats September 1995

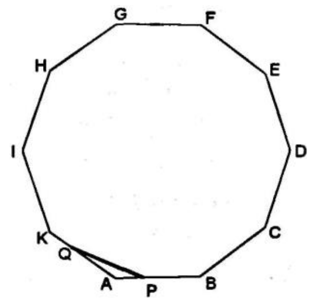
Bilde, ausgehend von einer natürlichen Zahl, laufend neue Zahlen, indem Du die letzte Ziffer wegstreichst und das Vierfache dieser Ziffer addierst.
Beispiel: Aus 1995 wird $199 + 4 \cdot 5 = 219$.

a) Bestimme Zahlen, die zu einem Zyklus gehören. Gibt es Einerzyklen?
a) b) In einer Folge der Zahlen komme 1001 vor. Warum kann dann keine Primzahl dabeigewesen sein?

Problem des Monats Oktober 1995

Die Brüder Max und Moritz besitzen gemeinsam eine Schafherde, die sie verkaufen möchten. Auf dem Markt prüft ein Interessent die Herde nach Zahl und Qualität und macht das folgende Angebot: „Für jedes Schaf zahle ich so viele DM, wie Ihr Schafe habt!“
Die beiden Brüder stutzen über dieses merkwürdige Angebot, aber sie finden es ganz vorteilhaft und willigen ein. „Schade, daß wir nicht 1000 Schafe haben, dann wären wir jetzt Millionäre,“ scherzt Max und nimmt dann von dem Käufer das Geld in Empfang. Er erhält lauter 10 DM-Scheine und einen Rest unter 10 DM in Münzen.
Nachdem die Herde weg ist, teilt Max das Geld folgendermaßen auf. Er gibt sich selbst und Moritz abwechselnd einen Schein. Dabei erhält er sowohl den ersten als auch den letzten Schein. Zum Schluß schiebt er seinem Bruder die Münzen zu.
Wieviel muß Max zum Ausgleich aus eigener Tasche dazulegen?

Problem des Monats November 1995



In einem regelmäßigen Zehneck ABCDEFGHIK der Kantenlänge 1 schneide eine Gerade ein Dreieck PAQ ab mit $|PA| + |AQ| = 1$.
Wie groß ist die Summe der Winkel, unter denen die Strecke PQ von B, C, D, E, F, G, H, I und K aus erscheint?

Problem des Monats Dezember 1995

Achim und Birte haben ein Kartenspiel mit 2n Karten, auf denen die Zahlen von 1 bis 2n aufgetragen sind. Sie spielen nach folgender Regel:
Nachdem die gut durchgemischten Karten an beide zu gleichen Teilen ausgeteilt worden sind, legen sie abwechselnd eine ihrer Karten auf einen Stapel und nennen die auf der Karte stehende Zahl. Das Spiel ist beendet, wenn die Summe der auf dem Stapel liegenden Zahlen durch 2n+1 teilbar ist. Wer die passende Karte auslegen kann, hat gewonnen.
Wenn Achim und Birte mit optimaler Strategie spielen und Achim z.B. anfängt, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für ihn zu gewinnen?

Problem des Monats Januar 1996
Wir nennen ein Rechteck *quadratischer* als ein anderes Rechteck, wenn bei ihm das Verhältnis der längeren zur kürzeren Seite kleiner ist als bei dem anderen Rechteck.
Kann man in einem gegebenen Rechteck auf jeder Seite einen Punkt so wählen, daß die vier Punkte ein Rechteck bilden, welches quadratischer als das Ausgangsrechteck ist?

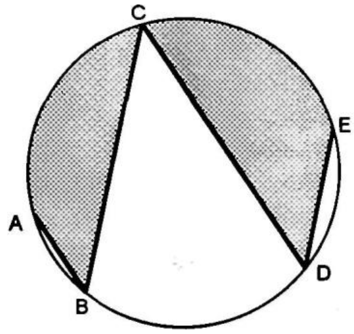
Problem des Monats Februar 1996
Gegeben sind drei positive Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft

$$a+b+c=1$$

Warum gilt dann stets

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5\,?$$

Problem des Monats März 1996
Auf einem Kreis seien die Punkte A, B, C, D und E so gewählt, daß die Winkel ABC, BCD und CDE das gleiche Maß 45° haben. Färbe wie in der Zeichnung die Teilflächen abwechselnd weiß und schwarz.
Warum ist die weiße Fläche genauso groß wie die schwarze?

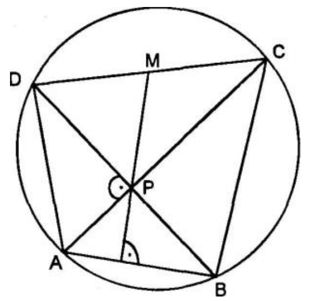


Problem des Monats April 1996
Kann man in dem Produkt

$$(1!)\cdot(2!)\cdot(3!)\cdot(4!)\cdot\ldots\cdot(100!)$$

von diesen einhundert Faktoren einen Faktor so weglassen, daß das Restprodukt eine Quadratzahl ist?

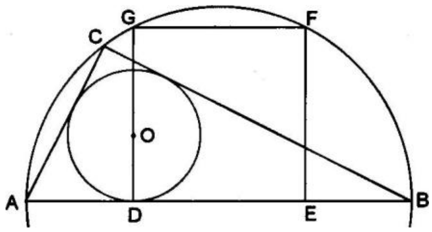
Problem des Monats Mai 1996
Die beiden Diagonalen eines Sehnenvierecks ABCD schneiden sich in P rechtwinklig.
Nun verbindet man den Mittelpunkt M einer Vierecksseite mit P.
Warum schneidet die Verbindungsgerade MP die Gegenseite im rechten Winkel?



Problem des Monats Juni 1996
An eine Tafel werden n positive Zahlen a_1, a_2, ..., a_n geschrieben. Mit folgender Operation können sie verändert werden:
Man wähle irgend zwei Zahlen a_i und a_k mit $i < k$.
a_i wird durch den größten gemeinsamen Teiler von a_i und a_k ersetzt, a_k durch das kleinste gemeinsame Vielfache.
Warum sind nach einer gewissen Anzahl dieser Operationen keine Veränderungen mehr möglich?

Problem des Monats Juli/ August 1996
In ein 10 Δ10-Feld seien 100 ganze Zahlen eingetragen, die folgende Bedingung erfüllen: Bringt man fünf beliebige Zeilen und fünf beliebige Spalten zum Schnitt, so ist die Summe dieser 25 Schnittzahlen stets gerade.
Wie viele der hundert eingetragenen Zahlen können dann ungerade sein?

Problem des Monats September 1996

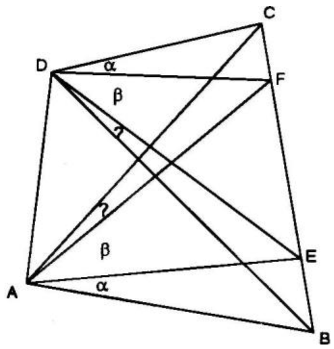


Das Quadrat DEFG sei einem Halbkreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ einbeschrieben.
Der Punkt C sei so auf der Kreislinie gewählt, daß das Dreieck ABC zum Quadrat DEFG flächeninhaltsgleich ist.
Warum liegt der Inkreismittelpunkt O des Dreiecks ABC auf einer Quadratseite?

Problem des Monats Oktober 1996

Wahr oder falsch? Je zwei aufeinanderfolgende Glieder der Folge $n^3 + 3$ also 4, 11, 30, 67,... sind teilerfremd.

Problem des Monats November 1996



Auf der Seite BC eines konvexen Vierecks ABCD liegen zwei Punkte E und F, wobei E näher an B liegt als F. Weiter haben folgende Winkelpaare gleiches Maß:

ρEAB und ρCDF

ρFAE und ρFDE

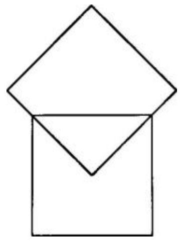
Warum haben dann auch folgende Winkel gleiches Maß: ρCAF und ρEDB?

Problem des Monats Dezember 1996

Ein Wägungsproblem

In einem Korb liegen 2n + 1 Kugeln von jeweils ganzzahligem Gewicht. Egal, welche Kugel aus dem Korb entfernt wird, die übrigen 2n Kugeln können stets in zwei gleich schwere Haufen von je n Stück aufgeteilt werden.
Warum geht das nur, wenn alle Kugeln gleich schwer sind?

Problem des Monats Januar 1997



Zwei kongruente Quadrate liegen so, dass zwei Seiten des ersten durch die Ecken des anderen gehen und sich in dessen Mitte treffen. Es gibt vier Drehungen, bei denen das eine Quadrat auf das andere abgebildet wird. Warum liegen die Drehzentren dieser vier Drehungen auf einer Geraden?

Problem des Monats Februar 1997

Wie man leicht nachrechnet, gelten folgende Gleichungen:

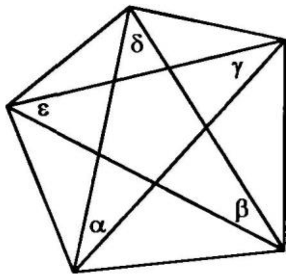
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

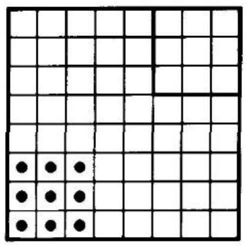
Suche weitere Gleichungen dieser Art. Gib ein Verfahren an, wie man alle derartigen Gleichungen finden kann.

Problem des Monats März 1997



Gegeben ist ein konvexes Fünfeck ohne parallele Seiten. Dann gibt es zu jeder Seite genau einen Eckpunkt, der von der durch diese Seite gehenden Gerade den größten Abstand hat.
Von diesem Eckpunkt aus erscheint die Seite unter einem bestimmten Sehwinkel. Wie groß ist die Summe der fünf Sehwinkel?

Problem des Monats April 1997

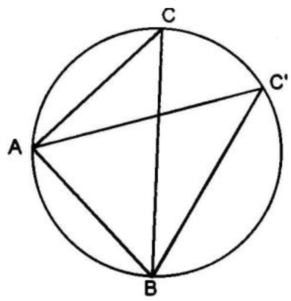


Auf einem 8Δ8-Spielfeld befinden sich neun Steine im linken unteren 3Δ3-Quadrat. Sie können nach folgender Regel ihre Position verändern: Ein Stein A darf über irgendeinen Stein B auf ein Feld springen, das symmetrisch bezüglich B liegt und das noch frei ist.
Ist es möglich, dass alle Steine schließlich in dem rechten oberen Ecken-Quadrat landen?

Problem des Monats Mai 1997

Wie viele Zahlen zwischen 1 und 1997 haben eine durch 5 teilbare Quersumme?

Problem des Monats Juni 1997



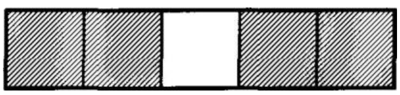
Gegeben ist ein Dreieck ABC mit seinem Umkreis. Auf welchen Linien bewegen sich

a) der Schwerpunkt S,
b) der Höhenschnittpunkt H,
c) der Inkreismittelpunkt O,

wenn bei fest gehaltenen Punkten A, B der Punkt C auf dem Umkreis läuft?

Problem des Monats Juli/ August 1997

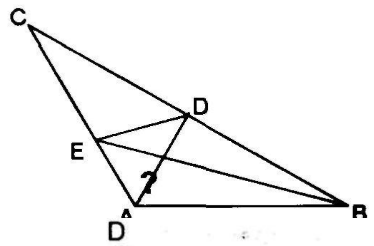
Ein Stempel überdeckt fünf geradlinig nebeneinander liegende kongruente Quadrate. Unglücklicherweise ist das Mittelfeld so beschädigt, dass beim Stempeln dieses Mittelfeld nicht druckt.



Kann man mit diesem Stempel trotzdem die ganze Ebene genau einmal bedrucken?

Problem des Monats September 1997

In einem Dreieck ABC gilt Folgendes:
Die Winkelhalbierende bei A schneidet BC in einem Punkt D. Die Winkelhalbierende bei B schneidet AC in einem Punkt E. DE halbiert den Winkel CDA.
Wie groß ist der Winkel bei A?



Problem des Monats Oktober 1997

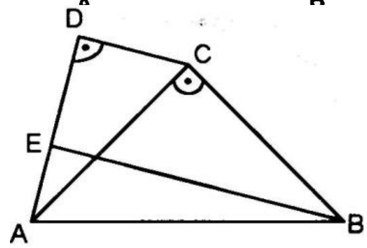
Der Stammbruch $\frac{1}{2}$ lässt sich auf 3 Arten als Summe von Stammbrüchen darstellen:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$$

Wie viele Paare natürlicher Zahlen (a, b) gibt es, die die Gleichung

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

erfüllen, wenn für n z.B. eine der Zahlen 1997, 1998 oder 1999 gewählt wird?

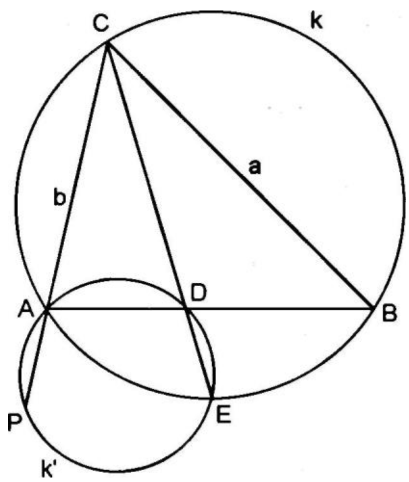


Problem des Monats November 1997

ABC sei ein gleichschenkliges und bei C rechtwinkliges Dreieck. Über der Kathete $\overline{AC}$ liege nach außen ein bei D rechtwinkliges Dreieck CDA, und zwar so, dass der Fußpunkt E des Lotes von B auf AD zwischen A und D liegt.
Warum gilt dann stets |BE| = |AD| + |DC|?

Problem des Monats Dezember 1997

ABC sei ein beliebig vorgegebenes Dreieck mit a > b.
Die Winkelhalbierende bei C schneide $\overline{AB}$ in D und den Umkreis k in E.
Der Umkreis k' des Dreiecks AED schneide die Gerade CA (außer in A) in einem Punkt P.
Warum gilt stets |PA| = a – b?



Problem des Monats Januar 1998

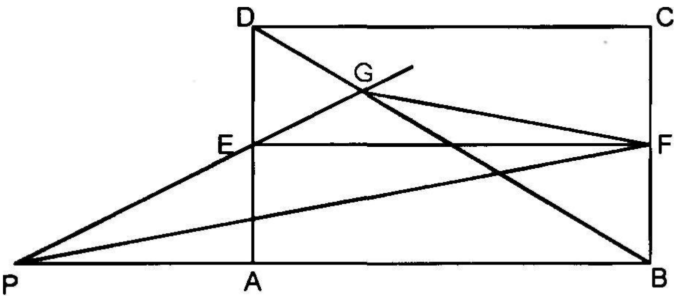
Auf wie viele Weisen lässt sich die Zahl 1998 darstellen in der Form

$$1998 = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + \ldots + a_k 2^k$$

wenn alle Koeffizienten a_i nur die Werte 0, 1 oder 2 annehmen können?

Problem des Monats Februar 1998

ABCD sei ein beliebig vorgegebenes Rechteck mit den Seitenmittelpunkten E, F auf den Seiten AD bzw. BC.
Für jeden Punkt P auf der Geraden AB, der links von A liegt, gilt Folgendes:
Wenn G der Schnittpunkt von PE mit der Diagonalen BD ist, so sind die Winkel GFE und PFE stets gleich groß.



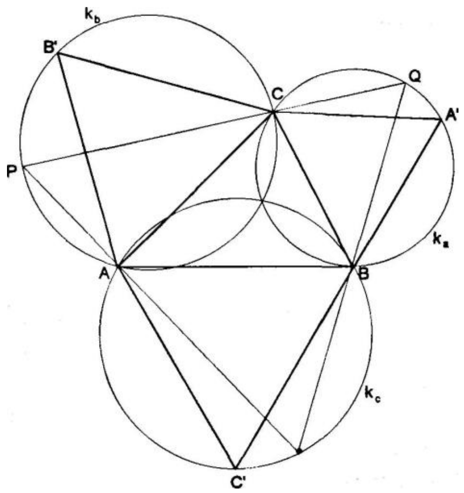
Problem des Monats März 1998

Die Stockwerke eines vierstöckigen Hauses können auf acht verschiedene Weisen in den Farben blau und gelb gestrichen werden, wenn man folgende Vorschriften beachtet:
Keine zwei benachbarten Stockwerke sind blau, sie dürfen aber beide gelb sein.
Welche Anzahl der Möglichkeiten ergibt sich für ein

a) zehnstöckiges Haus,
b) zwanzigstöckiges Haus?

Problem des Monats April 1998

Über jeder Seite eines beliebig vorgegebenen Dreiecks ABC seien nach außen die gleichseitigen Dreiecke mit ihren Umkreisen k_a, k_b und k_c gezeichnet. P sei ein beliebiger Punkt des (äußeren) Kreisbogens von kb, und die Gerade PC schneide k, in Q.
Warum schneiden sich PA und QB stets auf k_c?



Problem des Monats Mai 1998

In einer Urne A befinden sich 3 weiße und 6 schwarze Kugeln. Eine andere Urne B enthält 55 weiße und 45 schwarze Kugeln. Aus jeder Urne werden zufällig zwei Kugeln gezogen und ihre Farben notiert.

a) Für welche der beiden Urnen ist es wahrscheinlicher, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen, als zwei Kugeln von verschiedener Farbe?
b) Wie viele weiße und schwarze Kugeln muss eine Urne enthalten, damit die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen, genau 0,5 ist?

Problem des Monats Juni 1998

Ein konvexes Viereck ABCD habe folgende Eigenschaft:
Es gibt einen Punkt M derart, dass die Dreiecke BMA und DMC gleichschenklig sind und beide bei M ihren Giebelwinkel mit dem Maß 120° haben.

a) Warum schneiden sich die Diagonalen im Winkel von 60°?
b) Warum sind die Diagonalen gleich lang?
c) Sei N ein innerer Punkt des Vierecks mit der Eigenschaft: Das Dreieck AND ist gleichseitig.
   Warum ist dann auch das Dreieck CNB gleichseitig?

Problem des Monats Juli/ August

Dagobert spielt „Lotto 6 aus 36“.
Der auf seine alten Tage genügsam gewordene Dagobert frönt seinem neuen Hobby: Er spielt Lotto, allerdings will er entgegen seiner bisherigen Gewohnheit nicht gewinnen.

a) Wie muss er neun Lottoscheine ausfüllen, damit er bei der anschließenden Ziehung auf mindestens einem Schein keine der sechs gezogenen Zahlen angekreuzt hat?
b) Geht es schon mit acht Lottoscheinen?

Problem des Monats September 1998

Zwei Kreise mit dem gleichen Radius r liegen in einer Ebene nebeneinander. Eine Gerade g_1 schneidet den einen Kreis in den Punkten A_1 und B_1, den anderen in den Punkten A_2 und B_2.
Es gilt: $|A_1B_1| = |B_1A_2| = |A_2B_2| = 14$.
Eine andere Gerade g_2 schneidet ebenfalls die beiden Kreise, und zwar in den Punkten C_1 und D_1 bzw. C_2 und D_2. Hier gilt: $|C_1D_1| = |D_1C_2| = |C_2D_2| = 6$.
Wie groß ist der Kreisradius r?

Problem des Monats Oktober 1998

Auf jede der zwölf Flächen zweier Würfel wird eine positive ganze Zahl geschrieben. Nach einem Wurf werden als Ergebnis die Augenzahlen der beiden nach oben zeigenden Flächen addiert.
Ist es möglich, die zwölf Zahlen so zu wählen, dass alle Ergebnisse 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 und 13 gleichwahrscheinlich sind?

Problem des Monats November 1998

Innerhalb eines Parallelogramms ABCD wird ein Punkt M so gewählt, dass für die Winkel gilt:

$$|\rho MBC| = 20°, |\rho MCB| = 50°, |\rho MDA| = 70°, |\rho MAD| = 40°.$$

Wie groß sind die Winkel in dem Parallelogramm?

Problem des Monats Dezember 1998

Die drei positiven ganzen Zahlen a, b, c sind paarweise teilerfremd, a und c sind ungerade, und es gilt die Pythagoras-Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$.
Warum ist dann b + c stets eine Quadratzahl?
Was lässt sich über a + c aussagen?

Problem des Monats Januar 1999
Ein Würfel mit der Kantenlänge 20 ist aus 8000 sich nicht überschneidenden Einheitswürfeln zusammengesetzt. In jeden der Einheitswürfel wird eine Zahl geschrieben. Dabei gilt: Betrachtet man die zwanzig Würfel irgendeiner Reihe parallel zu den Würfelkanten, so ist die Summe aller hier eingetragenen Zahlen 1.
Weiterhin weiß man, dass in einem Würfel die Zahl 1999 steht. Durch diesen Würfel verlaufen drei Würfelscheiben parallel zu den Würfelflächen. Wie groß ist die Summe aller Zahlen in diesen drei Scheiben?

Problem des Monats Februar 1999
Wie groß ist beim Lotto „6 aus 49“ die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Ausspielung ein Zwilling auftritt, d.h. dass mindestens zwei benachbarte Zahlen auftreten?
Die Zusatzzahl soll nicht berücksichtigt werden.

Problem des Monats März 1999
Ein spitzwinkliges Dreieck wird durch den Halbkreis über einer Seite (nach außen) ergänzt. Wie findet man eine Gerade, die diese Figur in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerschneidet? (Dieses Problem hat bereits Euklid vor über 2300 Jahren gestellt.)

Problem des Monats April 1999
Eine Menge M von 1999 verschiedenen natürlichen Zahlen ist gegeben. Keine von ihnen lässt sich als Summe von zwei Zahlen aus M schreiben.
Welches ist der kleinste Wert, den die größte Zahl aus M haben kann?

Problem des Monats Mai 1999
Der Schnittpunkt der Diagonalen in dem Parallelogramm ABCD sei S. Warum muss CD Tangente an den Kreis durch die Punkte B, C, S sein, falls BC Tangente an den Kreis durch die Punkte A, B, S ist?

Problem des Monats Juni 1999
Eine Kreisscheibe wird durch 1999 Durchmesser in 3998 gleich große Sektoren unterteilt. Eine Hälfte der Sektoren wird blau, die andere rot gefärbt (in beliebiger Reihenfolge). Die blauen Sektoren werden nun im Uhrzeigersinn von 1 bis 1999 durchnummeriert, die roten ebenso, aber im entgegengesetzten Sinn.
Warum gibt es stets einen Halbkreis, der exakt die Zahlen von 1 bis 1999 enthält?

Problem des Monats Juli/ August 1999
Vier Orte liegen in den Eckpunkten eines Quadrates. Es soll ein (geradliniges) Straßennetz gebaut werden, auf dem man von jedem Ort zu jedem anderen gelangen kann.
Wie sieht das Netz aus, das eine minimale Gesamtlänge hat?

Problem des Monats September 1999
Es seien a und b zwei natürliche Zahlen mit der Eigenschaft, dass $a \cdot b$ ein Teiler von $a^2 + b^2$ ist.
Warum müssen dann a und b übereinstimmen?

Problem des Monats Oktober 1999
Von einem konvexen Fünfeck weiß man, dass alle Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben.
Warum kann dann sein Flächeninhalt nicht kleiner als 2,5 sein?

Problem des Monats November 1999
M sei die Menge aller positiven ganzen Zahlen, bei denen die (Dezimal-)Ziffern entweder eine streng monoton steigende oder eine streng monoton fallende Folge bilden,
z.B. gilt 731 ι M, 7310 ι M und 1589 ι M.
Wie groß ist die Summe aller Zahlen aus M?

Problem des Monats Dezember 1999
Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten eines Fünfecks der Reihe nach miteinander, so erhält man das zugehörige Mittenfünfeck.
Von einem Fünfeck weiß man, dass es Mittenfünfeck ist.
Wie kann man dann ein zugehöriges Ausgangsfünfeck konstruieren? Ist es eindeutig bestimmt? Verallgemeinere die Aufgabenstellung sinnvoll!

Problem des Monats Januar 2000
Ein Gewichtssatz besteht aus den Gewichten von 1 g bis 2000 g. Alle Gewichte werden auf die beiden Schalen einer Balkenwaage so verteilt, dass Gleichgewicht herrscht.
Kann man stets zwei Gewichte auf jeder Seite wegnehmen, ohne das Gleichgewicht zu stören?

Problem des Monats Februar 2000
Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks wird mit den Eckpunkten verbunden. Dadurch wird das Dreieck in drei kleinere Dreiecke zerlegt. Es stellt sich heraus, dass eines dieser kleineren Dreiecke zu dem gegebenen Dreieck ähnlich ist.
Wie groß sind bei diesem Dreieck die Winkel?

Problem des Monats März 2000
Für eine positive Zahl x bezeichne [x] den ganzzahligen Anteil und {x} die Zahl aus den Nachkommaziffern von x, also $x = [x] + \{x\}$.
Gibt es eine reelle Zahl x mit $\{x^2\} + \{x\} = 1$?
Kann es eine rationale Zahl geben, die diese Gleichung erfüllt?

Problem des Monats April 2000
Im Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c gelte $b < a$. D sei der Höhenfußpunkt von h_c und E der Mittelpunkt von c.
Beweise:
Wenn das Dreieck bei C einen rechten Winkel hat, so halbiert die Winkelhalbierende dieses Winkels auch den Winkel DCE.
Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

Problem des Monats Mai 2000
Auf einem Schachbrett bewegt sich eine Figur nach den Regeln für einen König. Diese Figur wird nun nacheinander so gesetzt, dass sie jedes Feld genau einmal erreicht und mit dem letzten Zug wieder das Ausgangsfeld besetzt. Es entsteht also ein geschlossener Weg.
Warum ist die Anzahl der Diagonalzüge stets eine gerade Zahl?

Problem des Monats Juni 2000
Gegeben ist ein Punkt P in einem Rechteck ABCD. Wir vergleichen die Summen
$|AP|^2 + |PC|^2$ und $|BP|^2 + |PD|^2$.
Für welche Lage von P ist die erste Summe größer als die zweite?
Können die Summen gleich sein?
Was ergibt sich, wenn der Punkt P außerhalb des Rechtecks liegt?

Problem des Monats Juli/ August 2000
Die beiden Straßenräuber Hotz und Plotz verteilen ihre Beute, die aus einem Haufen mit 100 gleichen Münzen besteht, folgendermaßen:
Hotz ergreift eine Hand voll Münzen aus dem Stapel und Plotz entscheidet, wer diese Hand voll Münzen erhält. So verfahren sie, bis einer der beiden 9 Händevoll Münzen erhalten hat. Der andere erhält dann die eventuell noch übrigen Münzen. (Es kann vorkommen, dass alle Münzen verteilt sind, bevor einer von ihnen 9 Händevoll Münzen zugeteilt bekommen hat).
Welches ist die größte Anzahl von Münzen, die Hotz mit Sicherheit erhalten kann, unabhängig von den Entscheidungen seines gewitzten Kumpels Plotz?

Problem des Monats September 2000
Durch eine seitenparallele Gerade wird ein Quadrat in zwei ungleiche Rechtecke zerlegt; das größere sei G und das kleinere sei K.
Bei welcher Zerlegung kann man K auf G derart legen, dass auf jeder Seite von G genau ein Eckpunkt von K zu liegen kommt?

Problem des Monats Oktober 2000
Es seien $a > 1$ und $n > 0$ natürliche Zahlen, so dass $a^n + 1$ eine Primzahl ist.
Für welche n ist das überhaupt möglich?
Warum besitzt dann die Zahl $a^n - 1$ mindestens n positive Teiler?

Problem des Monats November 2000
A, C seien die Endpunkte eines Durchmessers in einem gegebenen Kreis k und P ein Punkt dieses Durchmessers. Eine von AC verschiedene Gerade durch P schneide k in den Punkten B und D. Dadurch entsteht ein Viereck ABCD.
Wie muss man diese Gerade wählen, damit der Flächeninhalt des Vierecks ABCD maximal wird?

Problem des Monats Dezember 2000
Eine Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ mit ganzen Zahlen a_i hat folgende Eigenschaft:
Die Summe von je fünf aufeinander folgenden Gliedern der Folge ist positiv, die Summe von je sieben aufeinander folgenden aber negativ. Wie viele Glieder kann die Folge höchstens haben?

Problem des Monats Januar 2001
In einen Kreis vom Radius 1 ist ein Sechseck ABCDEF einbeschrieben, die Punkte liegen also auf der Kreislinie. Drei Seiten erfüllen folgende Bedingung:

$|AB| = |CD| = |EF| = 1.$

Die Mittelpunkte der drei anderen Seiten seien X, Y, Z.
Warum ist das Dreieck XYZ stets gleichseitig?
(Morley's Geist, in Anlehnung an den Satz von Morley)

Problem des Monats Februar 2001
Auf einer Kreislinie werden n Punkte markiert und je zwei von ihnen durch eine Sehne verbunden. Die Punkte seien so gewählt, dass sich niemals drei Sehnen in einem Kreispunkt schneiden. Wie groß ist die **Anzahl der Teilflächen**, in welche die Kreisfläche durch die Sehnen geteilt wird ? Wähle zunächst $n = 2, 3, 4, 5, 6,$ und zähle die Gebiete ab-

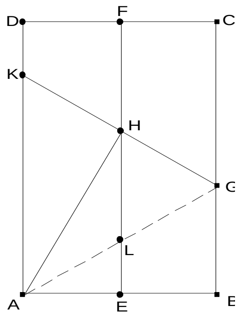
Problem des Monats März 2001
Auf der (Erd)-Kugel seien 2001 Orte ausgewählt und durch ein Kantennetz verbunden. Jeder Kante wird genau eine der Zahlen -1 oder $+1$ zugeordnet. Unter dem ***Wert eines Ortes O*** verstehen wir dann das Produkt aller Zahlen auf denjenigen Kanten, die bei O zusammentreffen. Warum gibt es mindestens einen Ort mit dem Wert +1 ?

Problem des Monats April 2001
Auf jedem der n Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks liegt ein Spielstein. Ein Spielzug besteht darin, einen oder zwei Steine wegzunehmen. Zwei Steine dürfen aber nur dann weggenommen werden, wenn sie auf benachbarten Ecken liegen.
Gewonnen hat der Spieler, der den letzten Stein wegnehmen kann.
Gibt es für einen der Spieler eine Gewinnstrategie und ist sie unabhängig von der Eckenzahl n?

Problem des Monats Mai 2001
In einem konvexen Fünfeck sei jede Diagonale parallel zu einer Seite. Warum reicht bereits diese Eigenschaft aus, um die beim regelmäßigen Fünfeck bekannte Eigenschaft zu begründen:
Das Verhältnis einer Diagonale zu ihrer parallelen Seite ist für alle fünf Diagonalen gleich, und zwar gleich der **Goldenen-Schnitt-Zahl** $G = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$?

Problem des Monats Juni 2001
Vor Dir liegen drei Haufen mit Steinen, der eine enthält 51, der zweite 49 und der dritte 5 Steine. Du darfst je zwei Haufen zusammenfügen oder einen Haufen, der eine gerade Anzahl von Steinen enthält, halbieren. Ist es möglich, irgendwann 105 Haufen mit je einem Stein zu erhalten?

Problem des Monats Juli/ August 2001
Eine natürliche Zahl n heiße Q-Zahl, falls n von einer Quadratzahl >1 geteilt wird. So sind 8 und 9 offensichtlich Q-Zahlen. Finde drei aufeinanderfolgende Q-Zahlen !
Gibt es auch vier oder sogar fünf aufeinanderfolgende Q-Zahlen ?



Problem des Monats September 2001
EF sei die längere Mittelparallele eines DIN-A4-Blattes ABCD. Falte dieses Blatt so an einer Geraden AG, dass das Bild H von B auf der Mittelparallelen liegt. K sei der Schnittpunkt von GH mit AD. Falte nun das Trapez AGCD an KG und dann das überstehende Dreieck an AD. Nach diesen Faltprozessen entsteht ein Dreieck. Warum ist dieses Dreieck gleichseitig ?
Zu welchem Ergebnis kommst Du, wenn das Rechteck kein DIN-A-Format hat

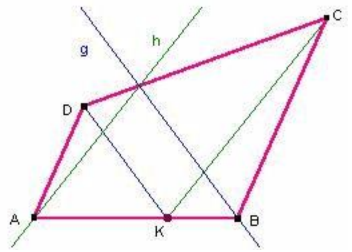
Problem des Monats Oktober 2001
Finde alle positiven natürlichen Zahlen k , so dass $2^k + 1$ und $2^{k+1} + 1$ beides Primzahlen sind.

Problem des Monats November 2001
Auf der Tischplatte liegen sechs Kreisscheiben unterschiedlicher Größe (z.B. Bierdeckel). Ihre Mittelpunkte werden von keiner anderen Scheibe überdeckt.
Warum gibt es dann keinen Punkt der Tischplatte, der von allen sechs Scheiben überdeckt wird?

Problem des Monats Dezember 2001
Suche ungerade Zahlen, die Summe zweier Quadratzahlen ($\cong 0$) sind. Gibt es zwei aufeinander folgende ungerade Zahlen, die beide Summe zweier Quadratzahlen ($\cong 0$) sind?

Problem des Monats Januar 2002
Schon Euklid hat bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Man findet aber auch **2002** aufeinanderfolgende Zahlen, die alle **keine** Primzahlen sind,
z.B. 2003! + 2 , 2003! + 3 , ... , 2003! + 2003.,
Gibt es aber auch **2002** aufeinanderfolgende Zahlen, unter denen sich **genau zehn Primzahlen** befinden?

Problem des Monats Februar 2002
In dem Trapez ABCD ist die Seite AD parallel zu der Seite BC. K sei ein Punkt auf der Seite AB. Zeichne durch A die Parallele zu KC und durch B die Parallele zu KD.
Warum liegt der Schnittpunkt der beiden Parallelen auf der Seite CD ?



Problem des Monats März 2002
Wie man leicht nachrechnet, gilt $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = \sqrt{9}-\sqrt{8}$ mit den beiden aufeinander folgenden Zahlen 8 und 9. Für welche natürlichen Zahlen n gibt es eine weitere natürliche Zahl m mit $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ **?**

Problem des Monats April 2002

Das chinesische Yin und Yang – Zeichen hat als Grundform zwei in einen Kreis einbeschriebene kleine Kreise. In der Abbildung ist erkennbar, welche Teilfläche schwarz bzw. weiß gefärbt ist, und offensichtlich sind die beiden Flächen gleich groß. (Die beiden zu Yin und Yang eigentlich dazugehörigen ‚Augen' sind hier weggelassen.)
Wie kann man eine Gerade finden, die sowohl die weiße als auch die schwarze Fläche halbiert?

Problem des Monats Mai 2002
n Glühlampen befinden sich in einer Reihe. Zu Beginn leuchtet mindestens eine von ihnen. Am Ende jeder Minute werden alle leuchtenden Lampen ausgeschaltet, während jede ausgeschaltete Lampe eingeschaltet wird, sofern sie vorher genau einen leuchtenden Nachbarn hatte. Gib alle Anzahlen ***n*** an, für die es eine geeignete Anfangsstellung gibt, so dass jederzeit mindestens eine Lampe leuchtet.

Problem des Monats Juni 2002
ein Pizzastück hat die Form eines unregelmäßigen Dreiecks. Astrid, Beate und Conrad wollen sich das Stück gerecht teilen, indem sie von einem Punkt im Inneren drei gerade Schnitte zu den Ecken führen.
Wie ist das möglich?

Problem des Monats Juli/ August 2002
In einem Parallelogramm ABCD seien folgende Punkte markiert: H auf $\overline{AB}$ mit |AH| = $\frac{1}{3}$|AB| , G auf $\overline{AD}$ mit |AG| = $\frac{1}{4}$|AD| und F der Mittelpunkt zwischen B und C. In welchem Verhältnis schneidet die Gerade HC die Strecke $\overline{GF}$?

Problem des Monats September 2002

In einer Reihe stehen 15 Elefanten. Jeder hat ein (positives) ganzzahliges Gewicht (in kg). Addiert man das Gewicht eines jeden Elefanten und das doppelte Gewicht seines rechten Nachbarn, so erhält man immer
15000 kg. Das gilt natürlich nicht für den Elefanten am rechten Ende.
Welches Gewicht hat der siebente Elefant? Prüfe diese Frage auch für 14 Elefanten mit der entsprechenden Eigenschaft!

Problem des Monats Oktober 2002

Wenn man in $p^2 - 1$ für p die Primzahlen 5, 7, 11 einsetzt, so rechnet man schnell nach, dass $p^2 - 1$ durch 24 teilbar ist.
Für welche Primzahlen p ist $p^2 - 1$ ebenfalls durch 24 teilbar?

Problem des Monats November 2002

Gegeben seien drei Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 und den Radien r_1, r_2, r_3 .
Jeder der drei Kreise berührt die beiden anderen Kreise.
a) Wie hängt der Umfang des Dreiecks $M_1M_2M_3$ mit den Kreisradien zusammen?
Kann man durch geeignete Wahl der Kreise erreichen, dass das Dreieck $M_1M_2M_3$ gleichschenklig, gleichseitig oder rechtwinklig ist?

Problem des Monats Dezember 2002

John und Mary denken sich je eine natürliche Zahl aus, die sie Bill vertraulich mitteilen. Bill schreibt die Summe und das Produkt dieser beiden Zahlen auf je ein Blatt Papier. Ein Blatt hält er verdeckt, das andre zeigt er den beiden (auf ihm ist die Zahl 2002 notiert). John schaut sich die Zahl an und erklärt, dass er nicht wisse, welche Zahl Mary sich ausgedacht hat. Mary hört diese Aussage und erklärt dann ihrerseits, dass sie auch nicht wisse, welche Zahl sich John ausgedacht hat. Welche Zahl hat sich Mary ausgedacht?

Problem des Monats Januar 2003

Gibt es 2003 verschiedene Lösungen in ganzen Zahlen x, y, z der Gleichung
$x^2 + y^2 - z^2 = 2003$?

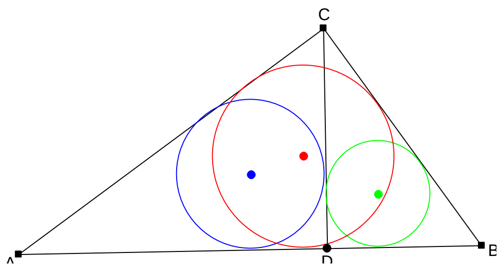
Problem des Monats Februar 2003

Es seien *a, b, c* die Seitenlängen eines Dreiecks. Warum gilt stets

$$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \le 2 \qquad ?$$

Welche der beiden Ungleichungen kann zur Gleichung werden?

Problem des Monats März 2003



In einem Dreieck ABC mit einem rechten Winkel bei C sei D der Fußpunkt der Höhe h_c. Es seien ferner r_1, r_2, r die Inkreis-Radien der Dreiecke ADC, DBC und ABC.
Warum gilt stets $|\mathbf{h_c}| = \mathbf{r_1} + \mathbf{r_2} + \mathbf{r}$?

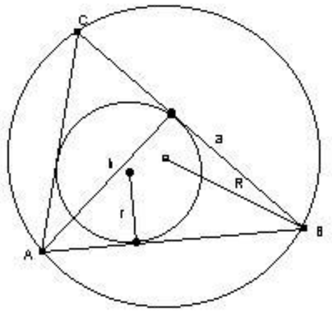
Problem des Monats April 2003

Karina möchte die zwölf Kanten eines würfelförmigen Pakets der Kantenlänge 10 cm mit einem Band schmücken. Das Band hat eine Länge von 1,20 m. Sie will dabei möglichst nur zwei Schnitte machen.
Ist das überhaupt möglich?

Problem des Monats Mai 2003

Gegeben ist eine Tafel Schokolade in Form eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge n, das in lauter gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 1 dadurch aufgeteilt wird, dass jede der Seiten in n gleichlange Teile zerlegt ist
Zwei Personen spielen nach folgenden Regeln:
Einer beginnt, indem er aus der Tafel durch genau einen Bruch parallel zu einer der Dreiecksseiten irgendein dreieckiges Stück herausbricht und es verspeist. Dann schiebt er den Rest seinem Gegenspieler zu, der sich ebenfalls ein dreieckiges Stück herausbricht und verspeist, usw. Der Spieler, der das letzte 1-Dreieck verspeist, gewinnt. Ferner gewinnt er, wenn sein Gegner kein dreieckiges Stück mehr abbrechen kann. Finde für jedes n eine Strategie, die es einem der Spieler (entweder dem, der anfängt, oder seinem Gegner) erlaubt, stets zu gewinnen, unabhängig davon, wie sein Gegner spielt.

Problem des Monats Juni 2003



In einem Dreieck ABC seien der Umkreisradius mit R, der Inkreisradius mit r, die Länge der kürzesten Höhe mit h und die längste Seite mit a bezeichnet. Beweise die Ungleichung

$$\frac{R}{r} > \frac{a}{h}$$

Problem des Monats Juli/ August 2003
Multipliziere die Zahl **142857** nacheinander mit 2, 3, 4, 5 und 6. Wie bei 285714 sind auch bei den anderen Ergebnissen die Ziffern durch zyklische Vertauschung der Ziffern von 142857 entstanden.
Wie lässt sich diese Eigenschaft begründen, wenn man weiß, dass 142857 die Periode des Bruches $\frac{1}{7}$ darstellt? Probiere auch mit den Perioden **076923** von $\frac{1}{13}$ und mit **0588235294117647** von $\frac{1}{17}$. Bei letzterer kannst Du sogar mit den Zahlen von 2 bis 16 multiplizieren.

Problem des Monats September 2003
Gegeben ist ein Sehnenviereck ABCD mit zueinander senkrechten Diagonalen.
Warum liegt der Diagonalenschnittpunkt S auf dem Lot, das vom Mittelpunkt M der Seite AB auf DC gefällt wird ?

Problem des Monats Oktober 2003
Auf den positiven (reellen) Zahlen sei eine binäre Verknüpfung * wie folgt definiert:
$x * y := x + y + t \cdot \sqrt{x \cdot y}$ mit einem Parameter t > 0.
Diese Verknüpfung ist offensichtlich kommutativ. Für welche t ist sie assoziativ?
Schreibe die Bedingung der Assoziativität ausführlich auf. Diese Gleichung ist allerdings schwer nach t aufzulösen. Wenn es ein geeignetes t gibt, dann muss die Assoziativität für beliebige x, y, z, also auch für spezielle, erfüllt sein. Wähle z.B. x = 1, y = 1, z = 4.

Problem des Monats November 2003
In einem Quadratgitter werden Quadrate so eingezeichnet, dass ihre Eckpunkte Gitterpunkte sind und ihre Seiten um 45° gegen die Gitterlinien geneigt sind.
Wie viele innere Gitterpunkte hat ein derartiges Quadrat, dessen Seiten 2003 senkrechte Gitterlinien überspannen ?
Gibt es ein Quadrat, das genau 87 innere Gitterpunkte enthält ?

Problem des Monats Dezember 2003

Zahlenprophet für 2004

Denke Dir eine dreistellige Zahl und führe mit dieser nacheinander folgende Rechenoperationen aus:
addiere 99, bilde die Quersumme (*Summe der Ziffern*), multipliziere mit 2, bilde die Quersumme, multipliziere mit 9, bilde die Quersumme, addiere 3, bilde die Quersumme, multipliziere mit 167 und addiere 1503. Warum erhältst Du stets **2004** Versuche auch, den Propheten abzuwandeln.

Problem des Monats Januar 2004

Ein Siebeneck-Problem

Von einem Siebeneck $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$ sei folgendes bekannt:
alle ‚Zweierdiagonalen' (nach Überspringen einer Ecke) sind gleich lang. Ebenso sind alle ‚Dreierdiagonalen' (nach Überspringen von zwei Ecken) untereinander gleich lang.
Muss dann das Siebeneck regelmäßig sein, d.h. in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen?

Problem des Monats Februar 2004

Ein Zahlen-Problem: Nimm von jeder der Zahlen m mit $n + 1 < m <$ In den größten ungeraden Teiler und addiere sie alle. Beispiel für $n = 6$: $7+1+9+5+11+3 = 36 = 6^2$. Warum ergibt die Summe für jedes n genau n^2?

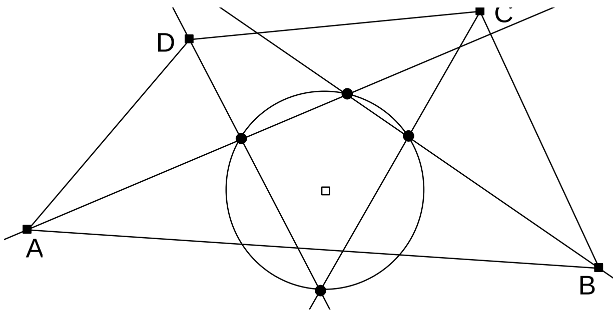
Problem des Monats März 2004

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C. Die Katheten haben die Länge 1. Auf der Hypotenuse wählen wir einen Punkt D, von dem aus wir die Lote auf die Katheten fällen. Dadurch wird das Dreieck ABC in drei Flächen zerlegt, zwei Dreiecke und ein Rechteck.
Warum ist bei jeder Wahl des Punktes D der größte Flächeninhalt dieser drei Flächen mindestens $\frac{2}{9}$ groß? Wann ist er gleich $\frac{2}{9}$?

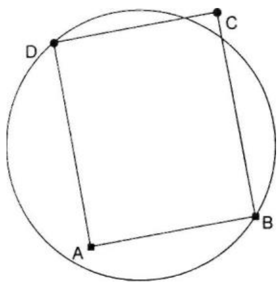
Problem des Monats April 2004

Gibt es Primzahlen p und q, für welche die aus ihnen gebildete Zahl $p^q + q^p$ selbst wieder eine Primzahl ist?
Wenn ja, sind es dann unendlich viele Paare p, q, oder gibt es vielleicht nur wenige, die man direkt angeben kann?

Problem des Monats Mai 2004



Warum bilden in jedem Viereck ABCD die Schnittpunkte von benachbarten Winkelhalbierenden ein Viereck, das einen Umkreis besitzt (Sehnenviereck)? Allerdings kann es passieren, dass die vier Punkte zusammenfallen; das wäre der Grenzfall eines Vierecks.

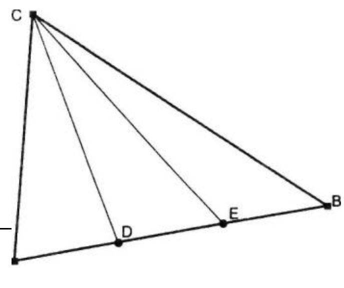


Problem des Monats Juni 2004

Auf einer Kreisscheibe werde ein Punkt A fest gewählt. Finde den geometrischen Ort aller Punkte C, wenn ABCD ein Rechteck bildet, dessen Ecken B und D auf dem Rand der Kreisscheibe liegen.

Problem des Monats Juli/ August 2004

In einem Dreieck ABC zerlegen zwei Geraden durch C die Seite AB in drei gleichlange Teilstrecken.
Gibt es ein geeignetes Dreieck, bei dem zusätzlich auch der Winkel bei C in drei gleich große Teilwinkel zerlegt wird?



Problem des Monats September 2004
Ein konvexes Vieleck liegt so in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, dass die Koordinaten der Eckpunkte gerade ganzzahlige Werte haben.
Warum hat dann auch der Flächeninhalt einen geraden ganzzahligen Wert ?
(Als Einheitsfläche wird wie üblich ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 gewählt.)
Gilt die Behauptung auch für nichtkonvexe Vielecke?

Problem des Monats Oktober 2004
Für eine natürliche Zahl n seien $1 < d_1 < d_2 < ..... < d_k = n$ sämtliche positive Teiler von n.
Man zeige $d_1 \cdot d_2 + d_2 \cdot d_3 + ... + d_{k-1} \cdot d_k < n^2$
Wann kann diese Teilersumme n^2 teilen?

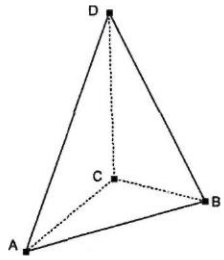
Problem des Monats November 2004
Gegeben seien sechs aufeinander folgende positive ganze Zahlen. Warum gibt es stets eine Primzahl, die Teiler von genau einer dieser Zahlen ist?

Problem des Monats Dezember 2004
Auf jeder Ecke eines regelmäßigen n-Ecks liegt eine Münze. Astrid und Beate haben sich ein Spiel mit folgender Regel ausgedacht:
Abwechselnd dürfen sie eine oder zwei Münzen wegnehmen, zwei aber nur, wenn sie auf benachbarten Ecken liegen. Wer die letzte Münze wegnehmen kann, hat gewonnen.
Astrid und Beate überlegen jede für sich, ob es günstig ist, als erste zu ziehen oder lieber die andere beginnen zu lassen.
Gibt es überhaupt eine Gewinnstrategie, und wenn ja, für wen?
Hängt die Gewinnstrategie, wenn es sie gibt, von der Eckenzahl n ab?

Problem des Monats Januar 2005

Auf wie viele verschiedene Weisen kannst Du die Zahl 2005 als Summe von positiven ganzen Zahlen schreiben, die alle untereinander „annähernd gleich“ sind?
Dabei heißen zwei Zahlen annähernd gleich, wenn sie sich höchstens um 1 unterscheiden.
Beispiel: 286 + 287 + 287 + 286 + 286 + 286 + 287 = 2005.
Zwei Summen, bei denen sich die Summanden nur in der Reihenfolge unterscheiden, werden als gleich gewertet.

Problem des Monats Februar 2005



a) Stelle ein Papiermodell eines Tetraeders her, bei dem die Kanten CD und AB zueinander senkrecht stehen.
b) Warum gilt in jedem derartigen Tetraeder folgende Gleichung:
$|AD|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 + |BD|^2$

Problem des Monats März 2005

Wenn für eine Primzahl p die beiden Zahlen $p^3 + 16$ und $p^4 + 32$ ebenfalls Primzahlen sind, dann muss auch $p^6 + 128$ eine Primzahl sein.

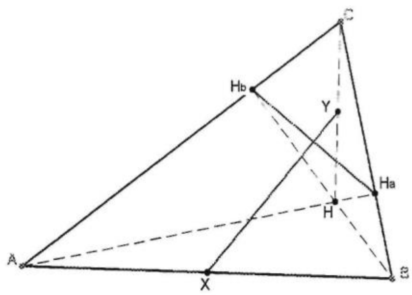
Problem des Monats April 2005

In der Ebene sind ein Kreis und eine Gerade gegeben, die sich nicht schneiden. Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein Quadrat, von dem zwei benachbarte Ecken auf dem Kreis und die beiden anderen auf der Geraden liegen.
Für welche Lage von Kreis und Gerade gibt es
a) kein Quadrat, b) genau ein Quadrat oder c) mehrere Quadrate?

Problem des Monats Mai 2005

An jedem Tag ändert sich der Aktienkurs der „Seifenblasen AG“ um einen festen Prozentsatz n % (bezogen auf den Vortag) entweder nach oben oder nach unten. Dabei ist n eine positive rationale Zahl. Man denke sich die Kurse beliebig genau berechnet.
Kann es sein, dass die Aktienkurse an zwei verschiedenen Tagen exakt übereinstimmen?

Problem des Monats Juni 2005



H sei der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ABC. Mit X bzw. Y seien die Mittelpunkte der Strecken AB und CH bezeichnet.
Warum steht die Gerade durch die Höhenfußpunkte H_a und H_b senkrecht auf der Geraden XY?

Problem des Monats Juli/ August 2005

Bei einem Zwei-Personen-Spiel gilt folgende Spielregel:
Aus einem Haufen von n Spielsteinen darf jeder Spieler abwechselnd ein, zwei, drei oder vier Steine wegnehmen (mindestens einen).
Wer den letzten Stein nehmen muss, hat verloren. Nun wird verabredet, dass A die Anzahl n der Spielsteine im Haufen bestimmen darf, während B festlegen darf, wer mit dem Spiel beginnen soll.
Gibt es für A oder für B eine Gewinnstrategie?

Problem des Monats September 2005

Bei welcher Eigenschaft eines Dreiecks lässt sich beweisen, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handeln muss?

a) zwei Seitenhalbierende sind gleich lang
b) zwei Höhen sind gleich lang

zwei Winkelhalbierende sind gleich lang.

Problem des Monats Oktober 2005 = Mai 2003

Gegeben ist eine Tafel Schokolade in Form eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge n, das in lauter gleichseitige Dreiecke der Seitenlange 1 dadurch aufgeteilt wird, dass jede der Seiten in n gleichlange Teile zerlegt ist.
Zwei Personen spielen nach folgenden Regeln: Einer beginnt, indem er aus der Tafel durch genau einen Bruch parallel zu einer der Dreiecksseiten irgendein dreieckiges Stück herausbricht und es verspeist. Dann schiebt er den Rest seinem Gegenspieler zu, der sich ebenfalls ein dreieckiges Stück herausbricht und verspeist, und so fort.
Der Spieler, der das letzte 1-Dreieck verspeist, gewinnt. Ferner gewinnt er, wenn sein Gegner kein dreieckiges Stück mehr abbrechen kann.
Finde für jedes n eine Strategie, die es einem der Spieler (entweder dem, der anfangt, oder seinem Gegner) erlaubt, stets zu gewinnen, unabhängig davon, wie sein Gegner spielt.

Problem des Monats November 2005

Gegeben sind ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und zwei zueinander senkrechte Durchmesser mit den Endpunkten A, B bzw. C, D. Der Inkreis des Dreiecks ABC habe den Radius ρ. In den durch einen Kreisbogen begrenzten Quadranten BMD lässt sich ebenfalls ein Kreis einbeschreiben. Ist sein Radius größer, kleiner oder gleich ρ?

Problem des Monats Dezember 2005

Ein Würfel wird auf einer ebenen Fläche über seine Kanten abgerollt und kommt nach einigen Schritten wieder auf sein Ausgangsfeld zurück.
Kann es sein, dass die obere Fläche dann zwar die gleiche wie in der Ausgangsstellung, aber um 90° verdreht, ist?

Problem des Monats Januar 2006

Zwanzig Kinder stellen sich in einem Kreis auf. Sie sind von 1 bis 20 nummeriert und ebenso angeordnet. Ein Gewinn soll nach folgender Regel vergeben werden:
Es scheidet fortlaufend jedes zweite Kind aus, bis nur eines übrig bleibt.

a) Welche Nummer hat dieses Kind, wenn zunächst das Kind mit Nummer 2 ausscheidet?
b) Du hast die Nummer 14. Mit welcher Nummer sollte die Streichung beginnen, damit Du gewinnst?
c) Auf dem Kreis sind jetzt die Zahlen von 1 bis 2006 nacheinander eingetragen. Welche Zahl gewinnt, wenn die Zahl 2 als erste gestrichen wird?
d) Welche Zahl muss als erste gestrichen werden, damit 2006 übrig bleibt?

Problem des Monats Februar 2006

Dies ist ein magisches Multiplikationsquadrat (mMQ): In jeder Zeile und Spalte ist das Produkt gleich derselben magischen Zahl, hier 60.

3	4	5
2	15	2
10	1	6

a) Gib ein mMQ mit lauter verschiedenen Zahlen an, bei einer geeigneten magischen Zahl.
b) Es gibt auch mMQs mit 16 Feldern. Schreibe einige auf.
c) Gibt es ein mMQ mit 16 Feldern, auf denen lauter verschiedene Zahlen stehen?
d) Gibt es ein mMQ mit 16 Feldern, auf denen lauter verschiedene Zahlen stehen und bei dem sogar die Produkte auf den Diagonalen gleich der magischen Zahl sind?

Problem des Monats März 2006

Vor Dir liegen sechs Münzen, die alle gleich aussehen; aber eine davon ist unecht. Wir kennen das Gewicht weder der echten noch der unechten Münze, allerdings haben alle echten Münzen untereinander gleiches Gewicht, die unechte hat ein anderes Gewicht.
Um die unechte Münze herauszufinden, steht eine Skalenwaage zur Verfügung, welche das Gesamtgewicht der jeweils aufgelegten Münzen anzeigt.
Wie kann man mit nur drei Wägungen die unechte Münze identifizieren?

Problem des Monats April 2006

Auf der Erdkugel werden fünf beliebige (punktförmige) Orte gekennzeichnet.
Warum kann man stets vier von ihnen durch eine Halbkugel (einschließlich ihres Randes) überdecken? Gelingt das auch immer für alle fünf Orte?

Problem des Monats Mai 2006

Zwei verschieden große Gefäße sind randvoll mit Saft gefüllt, wobei die Literzahlen ganzzahlig sind. Mit Hilfe eines dritten Gefäßes, das die gesamte Saftmenge aufnehmen kann und zunächst leer ist, soll der Saft in einem vorgegebenen Verhältnis auf die beiden größeren Gefäße verteilt werden. Da eine Maßeinteilung fehlt, muss bei jedem Umfüllen das abgebende Gefäß leer oder das aufnehmende Gefäß voll werden.

a) Die gegebenen Saft mengen seien 3 Liter und 5 Liter.
a) Wie kann man sie in zweimal 4 Liter aufteilen, kurz: (3 • 5 • 0) } (0 • 4 • 4)?
b) Kann man jede ganze Literzahl (von 1 bis 5) in das mittlere Gefäß füllen?
c) Untersuche, ob und, wenn ja, wie man die beiden folgenden Aufgaben lösen kann:
c_1) (15 • 18 • 0) } (0 • 16 • 17) c_2) (37 -43 • 0) } 0 • 40 • 40)

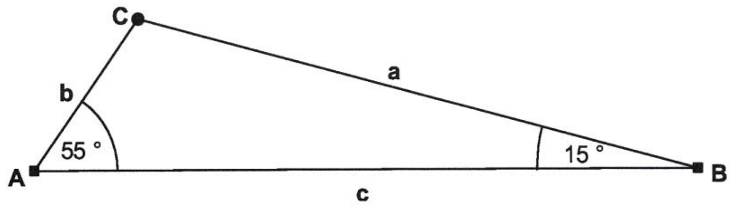
Problem des Monats Juni 2006
In dem Dreieck ABC sei der Winkel bei A 60°. Die Mittelsenkrechte der Seite AB schneide die Gerade AC im Punkt N und die Mittelsenkrechte der Seite AC schneide die Gerade AB im Punkt M.
Warum sind dann die Strecken MN und BC gleich lang?

Problem des Monats Juli/ August 2006
ABCD sei ein Trapez mit den parallelen Seiten AB und CD . Der Schnittpunkt der Diagonalen sei P.
Warum liegt P auf der Verbindungsgeraden g der Mittelpunkte von AB und CD?
Wenn $|CD| < |AB|$, so haben die Geraden AD und BC einen Schnittpunkt S.
Warum liegt dieser Schnittpunkt S ebenfalls auf der Geraden g?
September 2006

Problem des Monats September 2006
Lena möchte aus n^3 weißen Würfelchen der Kantenlänge 1 einen großen Würfel der Kantenlänge n bauen. Sie möchte es dabei so einrichten, dass alle 6 Außenflächen vollständig weiß sind.
Peter will Lenas Plan verhindern und überlegt sich, wie er möglichst wenige Flächen der Würfelchen rot anstreicht und trotzdem erreicht, dass mindestens eine Außenfläche des großen Würfels nicht mehr vollständig weiß ist.
Wie sollte Peter im Fall $n = 2$ und im Fall $n = 3$ vorgehen?

Problem des Monats Oktober 2006
Warum gilt in jedem Dreieck ABC, dessen Winkel $\alpha = 55°$ und $\beta = 15°$: $c^2 = a^2 + a \cdot b$?

Zusatz: Welche Eigenschaft muss ein Dreieck haben, damit diese Aussage gilt?



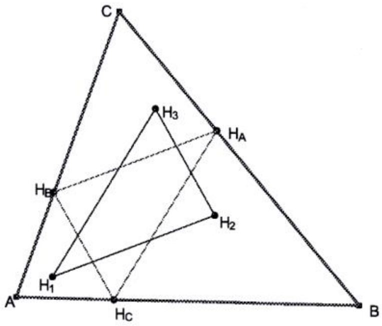
Problem des Monats November 2006
Wenn von zwei Zahlen x und y bekannt ist, dass $x + y = 1$ und $x^3 + y^3 = 3$ gilt, wie groß ist dann $x^2 + y^2$?

Problem des Monats Dezember 2006
In einem spitzwinkligen Dreieck sei der Inkreis mit dem Radius ρ gezeichnet. Drei Tangenten an diesen Inkreis schneiden von dem Dreieck drei rechtwinklige Dreiecke ab. Dadurch wird das Ausgangsdreieck in ein Sechseck und die drei ' rechtwinkligen Dreiecke zerlegt.
Die Radien der Inkreise der rechtwinkligen Teildreiecke seien ρ_A, ρ_B und ρ_C und u sei der Umfang des Sechsecks.
Warum gilt dann $u = 6\rho + 2(\rho_A + \rho_B + \rho_C)$?

Problem des Monats Januar 2007
Einem gleichseitigen Dreieck und einem regelmäßigen 2007-Eck seien die Inkreise ein- und die Umkreise umbeschrieben.
Warum sind die Seitenlängen des Dreiecks und des 2007-Ecks gleich, wenn beide Kreisringe den gleichen Flächeninhalt haben?

Problem des Monats Februar 2007
Jannik und Noemi finden folgendes Zahlenspiel sehr spannend:
Jannik wählt eine Zahl n größer als 100. Dann nennt Noemi eine Zahl $d > 1$.
Ist diese Zahl d ein Teiler von n, hat Noemi gewonnen, anderenfalls muss Jannik seine Zahl um d verringern. Nun wählt Noemi eine neue Zahl, die sie bisher noch nicht genannt hat. So geht es weiter. Wenn Janniks Zahl negativ geworden ist, hat Noemi verloren.
Gibt es für Jannik oder für Noemi eine Gewinnstrategie?

Problem des Monats März 2007
In einem Dreieck ABC seien H_A, H_B, H_c die Höhenfußpunkte.
Warum ist das Dreieck $H_1H_2H_3$, dessen Ecken die Höhenschnittpunkte der Dreiecke AH_CH_B, BH_AH_C und CH_BH_A sind, kongruent zu dem Dreieck $H_AH_BH_C$?



Problem des Monats April 2007
Überprüfe folgende Aussage: Immer, wenn man 2007 Zahlen unter den ersten 3009 ungeraden Zahlen auswählt, sind stets zwei verschiedene Zahlen dabei, von denen die eine die andere teilt.

Problem des Monats Mai 2007
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Hypotenuse c und dem Umfang u seien 〈 der Inkreisradius und r der Umkreisradius. Warum gilt dann:

$$\frac{u}{\rho} - \frac{\rho}{r} = 2$$

Problem des Monats Juni 2007
Es sei n eine natürliche Zahl, die kein Quadrat ist. Um die der Quadratwurzel $\sqrt{n}$ am nächsten gelegene natürliche Zahl a zu finden, bestimmt Anna stattdessen die beiden Quadratzahlen b^2 und $(b + 1)^2$, zwischen denen n liegt.
Anna wählt $a = b$, wenn b^2 näher bei n ist, anderenfalls nimmt sie $a = b + 1$.
Führt Annas Methode immer zum Ziel, auch bei der Kubikwurzel?

Problem des Monats Juli 2007
Es ist spannend herauszufinden, ob geometrische Konstruktionen schon mit weniger als den üblichen Hilfsmitteln gelingen. Stellt Euch vor, es stehen nur ein Zirkel und nicht einmal ein Lineal zur Verfügung. Wie kann man, wenn zwei Punkte A und B gegeben sind, die Strecke AB trotzdem durch eine exakte Konstruktion verdoppeln und halbieren?
Gesucht sind also zwei Punkte D und H auf der nicht gezeichneten Geraden AB mit der Eigenschaft $|AB| = |CD|$ und $|AH| = |HB|$

Problem des Monats August/ September 2007

Um Punkt 12 Uhr beginnen Armin, Bernd und Carl auf einer kreisförmigen Bahn von 300 Meter Umfang zu joggen. Jeder von ihnen läuft mit konstanter Geschwindigkeit in eine der beiden möglichen Richtungen.

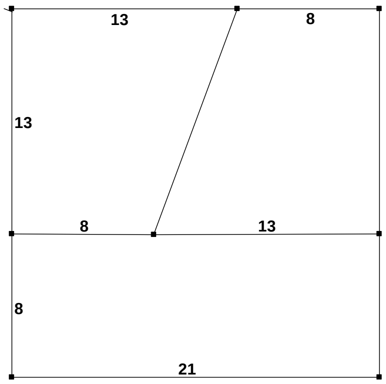
Zeige, dass es, falls Armins Geschwindigkeit von der Bernds und Carls verschieden ist, einen Zeitpunkt gibt, an dem Armin von Bernd und Carl mindestens 100 Meter entfernt ist.

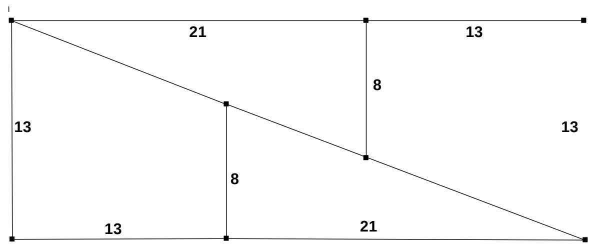
(Als Entfernung nimmt man die Länge des kürzeren der beiden Kreisbögen.)

Problem des Monats Oktober 2007

$$441 = 442\ ?$$

Zeichne sorgfältig das links stehende Quadrat, zerschneide es und setze es zu dem rechts stehenden Rechteck zusammen.





Problem des Monats November 2007

Mit einer beliebigen Startzahl $x = x_0$ mit $0 < x < 1$ bilde man die Zahlenfolge

$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots$, wobei für jeden Index k gilt

$$x_{k+1} = x_k - x_k^2 \,.$$

Zeige, dass stets

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots x_n^2 < 1$$

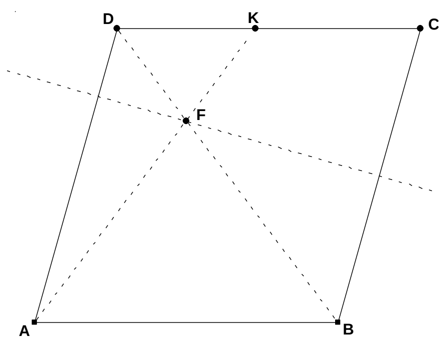
wahr ist.

Problem des Monats Dezember 2007

Es seien ABCD eine Raute und K ein Punkt zwischen C und D mit $|AD| = |BK|$.

Ferner bezeichne F den Schnittpunkt der Diagonalen BD mit der Mittelsenkrechten auf BC.

Warum liegen dann die drei Punkte A, F und K auf einer Geraden?

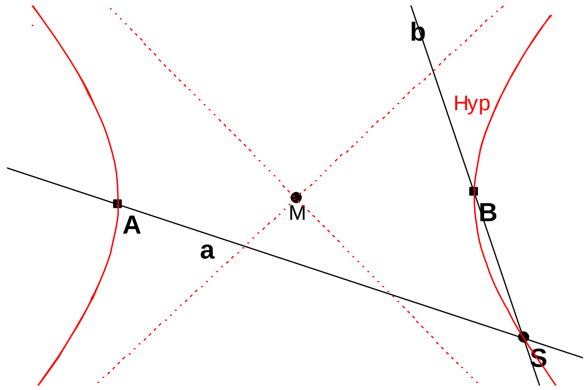


Problem des Monats Januar 2008

Unter einem (Zahlen-) Palindrom versteht man eine natürliche Zahl, deren Ziffern von rechts und links gelesen stets die gleiche Zahl ergeben.
So sind z.B. die Zahlen 1, 343, 2002 Palindrome, dagegen 2008 nicht.
Ist es möglich, **2008** Paare der Form $(n, n+110)$ zu finden, wobei sowohl n als auch $n+110$ Palindrome sind?

Problem des Monats Februar 2008

Gegeben sind zwei Punkte A und B und zwei Geraden a durch A und b durch B. a und b mögen sich in einem Punkte S schneiden.
Nun variieren wir die beiden Geraden a, b folgendermaßen: a wird um A gedreht und b um B, wobei die Drehwinkel entgegengesetzt sind.
Bei dieser Variation wandert der Schnittpunkt auf einer Linie.
Warum ist diese Linie eine gleichseitige Hyperbel?



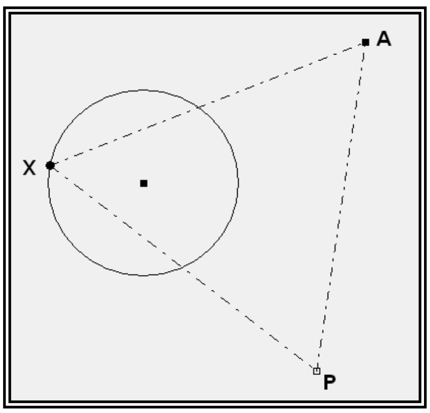
Problem des Monats März 2008

Man denke sich auf dem Kreis (eines gedachten Ziffernblattes einer Uhr) zwei Punkte (α,β) markiert. Wir nennen das Paar (α,β) ***uhrig***, falls es einen Zeitpunkt gibt, an dem sich der Stundenzeiger in $\boldsymbol{\alpha}$ und der Minutenzeiger in $\boldsymbol{\beta}$ befindet oder an dem sich der Stundenzeiger in $\boldsymbol{\beta}$ und der Minutenzeiger in $\boldsymbol{\alpha}$ befindet.
Welche Bedingungen müssen $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ erfüllen, damit das Paar (α,β) ***uhrig*** ist?
Kann es sein, dass mit dem Paar (α,β) auch das Paar (β,α) ***uhrig*** ist?

Problem des Monats April 2008

Gegeben seien ein Kreis k und ein Punkt A außerhalb des Kreises. Zu jedem Punkt X von k werden die beiden gleichseitigen Dreiecke AXP bzw. XAP' konstruiert.

Beschreibe die Punktmenge, die P bzw. P' durchläuft, wenn X alle Punkte von k durchläuft.



Problem des Monats Mai 2008

Zahlen-Ratespiel: Schreibe die Zahlen auf 6 Kärtchen. Als Zahlenkünstler sagst du „ich habe mir die Zahlen gut eingeprägt. Denke dir eine Zahl zwischen 1 und 26 und teile mir mit, auf welchen Karten sie steht. Dann kann ich dir sofort sagen, welche Zahl du dir gedacht hast.“

A	4	25	19	16
1	7	10	22	13

B	5	17	8	14
2	20	26	11	23

C	4	12	14	23
3	5	22	21	13

D	8	17	24	16
6	7	15	25	26

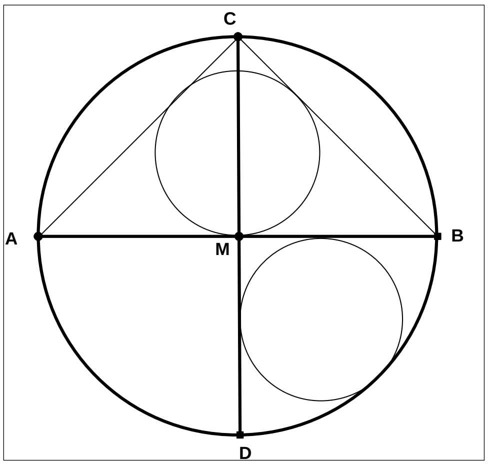
E	10	11	15	14
9	13	12	17	16

F	19	26	20	23
18	25	22	21	24

Versuche, das Spiel für Zahlen bis 80 oder gar bis 242 zu verallgemeinern

Problem des Monats Juni 2008

In einen Kreis mit Mittelpunkt *M* werden zwei Durchmesser von *A* nach *B* und von *C* nach *D* gezeichnet. Beide Durchmesser stehen dabei senkrecht aufeinander.



Der Inkreis des Dreiecks *ABC* habe den Radius ρ.
Der größte Kreis in dem Kreissegment *MDB* habe den Radius ρ_1.

Welcher von beiden Radien ist der größere?

Problem des Monats Juli/ August 2008

Diese Gleichung $x^y = y^x$ wird bekanntlich durch die beiden Zahlen 2 und 4 gelöst.

a) Prüfe nach, dass auch $x = \frac{9}{4}$ und $y = \frac{27}{8}$ die Gleichung lösen.

b) Es gibt sogar unendlich viele Lösungen:

Für jede natürliche Zahl *n* seien $x = (1+\frac{1}{n})^n$ und $y = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$.

Beweise, es gilt auch hier $x^y = y^x$

Problem des Monats August/ September 2008
Wähle im Innern eines gleichseitigen Dreiecks einen Punkt P und fälle von ihm aus die Lote auf die Dreiecksseiten. Die Lotfußpunkte zerlegen die Seiten in sechs Abschnitte.

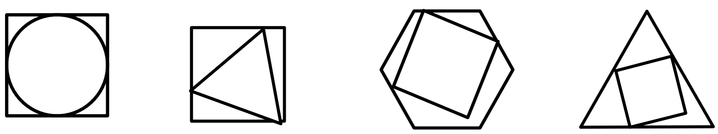
Färbe die Abschnitte abwechselnd weiß und schwarz. Warum ist die Gesamtlänge der weißen Abschnitte gleich der Gesamtlänge der schwarzen Abschnitte?
Verbinde P mit den Eckpunkten des Dreiecks. Die sechs entstehenden Teildreiecke werden abwechselnd weiß und schwarz gefärbt. Warum ist die Gesamtfläche der weißen Dreiecke gleich der Gesamtfläche der schwarzen Dreiecke?
Warum ist auch die Summe der Umfänge der weißen Teildreiecke gleich der Summe der Umfänge der schwarzen Dreiecke?
Warum ist auch die Summe der Inkreisradien der weißen Teildreiecke gleich der Summe der Inkreisradien der schwarzen Dreiecke?

Problem des Monats Oktober 2008
Die Primzahlen ≥ 5 werden der Größe nach nummeriert:

Primzahl:	5	7	11	13	17	19	...
Nummer:	1	2	3	4	5	6	...

Warum ist immer die Primzahl größer als das Dreifache ihrer Nummer?

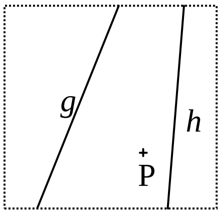
Problem des Monats November 2008
Wähle aus den Formen Kreis, gleichseitiges Dreieck, regelmäßiges Sechseck und Quadrat die eine als "Außenfigur" und eine andere als "Innenfigur" aus.
Untersuche, wie die Innenfigur möglichst groß in die Außenfigur eingesetzt werden kann und welchen Flächenanteil die Innenfigur dann ausfüllt.
Beispiele:

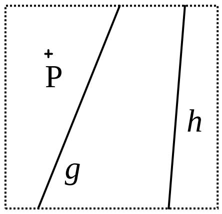


Problem des Monats Dezember 2008
Ein Problem zum Jahresausklang:
Gibt es eine Quadratzahl, deren Dezimaldarstellung mit 2008 beginnt?
Wie steht es zum Jahresbeginn mit der Zahl 2009?

Problem des Monats Januar 2009
Die Jahreszahl 2009 ist eine vierstellige Zahl mit der Quersumme 11.
Wie viele vierstellige Zahlen mit der Quersumme 11 gibt es?
Wie viele 2009-stellige Zahlen mit der Quersumme 11 gibt es?

Problem des Monats Februar 2009
Zwei nicht-parallele Geraden *g* und *h* schneiden sich außerhalb des Zeichentisches in einem Punkt C. P sei ein beliebig vorgegebener Punkt auf dem Zeichentisch.
Wie kann man (nur auf dem Zeichentisch) die Gerade PC konstruieren?

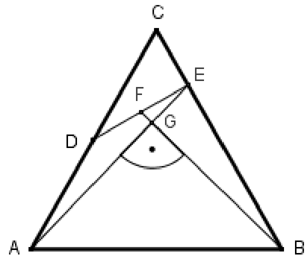




Problem des Monats März 2009
Kann es passieren, dass sich das Doppelte, das Dreifache, Vierfache ... oder das Neunfache einer positiven ganzen Zahl ergibt, wenn man ihre führende Dezimalziffer an ihr rechtes Ende setzt?

Problem des Monats April 2009
In dem gleichseitigen Dreieck ABC sei D der Mittelpunkt von AC. Der Fußpunkt des Lotes von D auf BC sei E. Man verbinde den Mittelpunkt F von DE mit B.
Diese Strecke schneidet AE in einem Punkt G.

Warum schneiden sich diese beiden Strecken in G rechtwinklig?



Problem des Monats Mai 2009
Eine natürliche Zahl heißt „Einserschlange“, wenn in ihrer Dezimaldarstellung nur Einsen vorkommen.

a) Für welche Primzahlen p gibt es eine Einserschlange, die durch p teilbar ist?
b) Für welche Primzahlen p gibt es sogar mehrere durch p teilbare Einserschlangen?

Problem des Monats Juni 2009
Aus einem vorhandenen Sudoku-Rätsel lässt sich ein scheinbar neues herstellen, indem man Zahlen austauscht, bestimmte Zeilen oder Spalten vertauscht oder das ganze Schema dreht oder spiegelt. Alle solche Sudoku-Rätsel seien als „kongruent“ bezeichnet.

a) Wie viele kongruente Sudoku-Rätsel gibt es zu einem vorhandenen?
b) Das Zahlenschema eines „Mini-Sudoku“ hat eine 2er-Teilung statt einer 3er-Teilung. Wie viele nicht-kongruente Zahlenschemata gibt es für Mini-Sudokus?

1	3	2	4
4	2	3	1
3	1	4	2
2	4	1	3

Problem des Monats Juli/August 2009

+	1	2	3	4	5	…
1	2	3	4	5	6	…
2	3	4	**5**	6	7	…
3	4	5	6	7	8	…
4	5	6	7	8	9	…
5	6	7	8	9	10	…
…	…	…	…	…	…	…

„Plus oder Mal – ganz egal,“ murmelt Carla, das Rechen-Ass. „Was hast du gemacht?“ fragt Heino. „Ich habe in einer Additionstabelle ein innen liegendes Ergebnisfeld ausgewählt und die Zahlen der vier diagonal angrenzenden Ergebnisfelder zusammengezählt. Dasselbe habe ich in einer Multiplikationstabelle gemacht. In beiden Tabellen hängt die Summe auf gleiche Weise mit der Zahl im ausgewählten Feld zusammen.“

·	1	2	3	4	5	…
1	1	2	3	4	5	…
2	2	4	**6**	8	10	…
3	3	6	9	12	15	…
4	4	8	12	16	20	…
5	5	10	15	20	25	…
…	…	…	…	…	…	…