MATHEMATIK

Aufgabensammlung

Probleme des Monats aus den Hamburger Schülerzirkeln

1986

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V.

Schriften des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V.

Heft 36

MATHEMATIK

Aufgabensammlung

Probleme des Monats aus den Hamburger Schülerzirkeln

1986

ausgewählt und zusammengestellt von
K. Sielaff, H. Müller und K. Kießwetter
Hamburg

— Als Manuskript gedruckt —

Chemoprint-Druck · 6300 Gießen 1 · Frankfurter Str. 131 · Ruf (0641) 2 17 12

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

In Hamburg gibt es seit 1980 sogenannte Schülerzirkel Mathematik. Die Idee zu ihrer Einrichtung war in Gesprächsrunden mit Lehrern am Institut für Lehrerfortbildung und mit Mitgliedern der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg entstanden:

Für mathematisch besonders interessierte Schüler bietet der Mathematikunterricht in der Regel nicht genügend Anregungen und nicht hinreichend anspruchsvolle Aufgabenstellungen. Anders aber als z.B. für musikalisch oder sportlich besonders leistungsfähige Schüler besteht für die Mathematiker kaum eine Möglichkeit, außerhalb der Schule mathematische Problemstellungen mit Gleichgesinnten zu bearbeiten und so die eigene Leistungsfähigkeit zu erproben.

Auch die mathematischen Wettbewerbe, wie z.B. der Bundeswettbewerb Mathematik, ändern daran wenig, weil sie von den Teilnehmern ein bereits gut ausgebildetes Leistungsvermögen verlangen.

Aus diesen und anderen Überlegungen wurden die Schülerzirkel eingerichtet. Die Müller-Reitz-Stiftung im Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft konnte für eine finanzielle Unterstützung gewonnen werden. Organisatorische und ideelle Unterstützung leisten die Mathematische Gesellschaft und das Institut für Lehrerfortbildung in Hamburg.

Als optisches Signal der Schülerzirkel haben wir die "Spirale" gewählt. Die Spirale sehen wir als Symbol für unsere Arbeitsweise an; sie steht einerseits für das tiefere Eindringen in mathematische Zusammenhänge und andererseits für das Öffnen und Reifen der mathematischen Fähigkeiten, Stufe für Stufe, und in beiden Richtungen unbegrenzt fortsetzbar.

Die Zirkel finden während der Schulzeit alle vierzehn Tage statt und sind räumlich über das Gebiet der Hansestadt verteilt (Universität im Zentrum und vier Gymnasien mehr am Rande der Stadt). Betreut werden sie von Mitgliedern aus dem Lehrkörper der Universität Hamburg. Jedoch werden einige Zirkel auch von engagierten Mathematiklehrern geleitet.
Das Alter der Teilnehmer liegt zwischen 14 und 18 Jahren. Zu jedem Schülerzirkel kommen 6 bis 10 Schüler (nur wenige Mädchen).

Es hat sich gezeigt, daß trotz der großen Unverbindlichkeit der Zusammenkünfte (keine Anmeldungspflicht, kostenlos, freiwillig, Ein- und Ausstieg jederzeit möglich) eine gute Kontinuität der Arbeit möglich war. Die Gruppengröße ist optimal für eine sehr intensive Arbeitsweise.

Jeden Monat wird an die Gymnasien und Gesamtschulen in Hamburg sowie in den Nachbarorten ein Informationsschreiben mit den aktuellen Terminen verschickt (vgl. Beispiel S. 6). Im Mittelpunkt dieses Schreibens steht das PROBLEM des MONATS. Dieses Problem wird dann jeweils in der ersten Zusammenkunft des Folgemonats behandelt.

Bei der Auswahl der Monats-PROBLEME lassen wir uns u.a. von folgenden Gesichtspunkten leiten :

a) Der Schwierigkeitsgrad liegt deutlich unterhalb dem der meisten Aufgaben aus dem Bundeswettbewerb Mathematik. Dadurch soll erreicht werden, daß eine größere und jüngere Schülergruppe angesprochen wird. Tatsächlich werden die PROBLEME auch unabhängig von den Schülerzirkeln in einigen Schulen bearbeitet.

b) Die PROBLEME werden möglichst aus verschiedenen Gebieten der Mathematik gewählt, wobei allerdings wegen der Altersstruktur der Teilnehmer die Analysis und die Lineare Algebra ausgespart bleiben müssen.

c) Der Aufgabentext soll möglichst eingängig und nicht zu lang sein. Um die redaktionelle Arbeit zu vereinfachen, muß der Aufgabentext in die "Lücke" des Informationsschreibens passen.

d) Die Bearbeitung des Monats-PROBLEMS soll Gelegenheit geben, gängige Lösungsmethoden zu entwickeln oder Ausblick auf verwandte oder auf verallgemeinerte Probleme zu eröffnen. Manchmal bietet es sich an, kleine mathematische Theorieteile als Vor- und Nachbereitung einzuarbeiten.

e) Gelegentlich gibt auch das Thema der Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft Anlaß für ein bestimmtes Monats-PROBLEM, z.B. "Stochasterix" im November 82 und "Euler" im November 83.

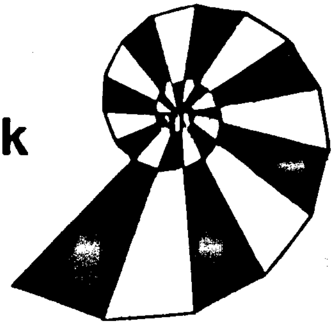
Für die Probleme des Monats beanspruchen wir keinerlei Urheberrecht, wie wir umgekehrt auch nicht mehr genau angeben können, ob und wo wir eine Aufgabe dieser oder ähnlicher Art in der Literatur gefunden haben. Im übrigen verweisen wir auf die Literatur (eine Auswahl findet man ab Seite 75), die weitere geeignete Probleme enthält.
In diesem Heft sind alle PROBLEME des Monats in chronologischer Reihenfolge zusammengestellt. Die beigefügten Lösungen und Bemerkungen sind in der Regel aus der Arbeit in den Schülerzirkeln erwachsen, geben aber nur das wieder, was wir in kurzer Zeit und mit vertretbarem Aufwand rekonstruieren konnten. Unsere Namenskürzel lassen erkennen, wer jeweils das PROBLEM redaktionell bearbeitet hat. Die Autoren danken Frau B. Srocke für die sachkundige und sorgfältige Herstellung der Druckvorlagen.

Wir hoffen, durch die preisgünstige Verbreitung dieses Heftes möglichst vielen Kollegen Anregungen und Hilfen für eine ähnliche Arbeit mit mathematisch interessierten Schülern wie in den Hamburger Schülerzirkeln zu geben, und wünschen viel Erfolg dabei.

Hamburg, im Juni 1986

Klaus Sielaff, Helmut Müller, Karl Kießwetter

Schülerzirkel Mathematik



Wer löst gerne mathematische Probleme ?

Für Schüler und Schülerinnen (ab 14 Jahre) besteht die Gelegenheit, gemeinsam mit erfahrenen Mathematikern interessante Probleme zu bearbeiten, z.B. Aufgaben aus dem Bundeswettbewerb Mathematik oder das

Problem des Monats (Mai 85)

Andreas denkt sich eine Zahl von 0 bis 15 . Bernd soll diese Zahl raten. Er darf aber nur solche Fragen stellen, auf die Andreas mit "ja" oder "nein" antworten kann.
Wie gelingt es Bernd, die Zahl stets mit 7 Fragen zu raten, wenn Andreas bei höchstens einer Antwort lügen darf ?

Die Veranstalter hoffen, daß durch die Arbeitsweise in den Zirkeln das Interesse und die Freude an mathematischen Fragestellungen gesteigert werden.
Eine Neuaufnahme ist jederzeit möglich, die Teilnahme ist kostenlos.
Das Problem des Monats wird in der ersten Zusammenkunft des Folgemonats in den Schülerzirkeln besprochen. Ort und Termine:

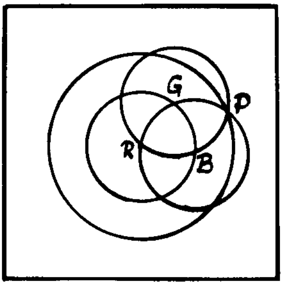
Innenstadt : *Geomatikum, Bundesstr. 55 Raum 241*	*16.00-17.45*	*Fr.*	*10.u.31.5.*
Fuhlsbüttel: *Gymnasium Alstertal, Erdkampsweg 89, R. 21*	*16.00-17.45*	*Mo.*	*13.5.*
Harburg : *Friedrich-Ebert-Gymnasium Alter Postweg 30*	*16.15-18.00*	*Fr.*	*3.u.31.5.*
Othmarschen: *Christianeum, Otto-Ernst-Str. 34 R.36*	*15.30-17.15*	*Mo.*	*13.5.*
Volksdorf : *Walddörfer-Gymnasium, Ahrensburger Weg 28,R.103*	*16.15-18.00*	*Fr.*	*10.u.31.5.*

Weitere Informationen können unter folgenden Rufnummern erfragt werden:
Mathematische Gesellschaft, Bundesstraße 55, 2 HH 13, Tel.: 4123 5177,
Institut für Lehrerfortbildung, Felix-Dahn-Str.3, HH 6, Tel.: 4112701
außerdem bei jedem Mathematiklehrer in Hamburg.

Problem **(April 1981)**

Die Punkte einer quadratischen Fläche der Seitenlänge 10 cm seien auf irgendeine Weise mit den drei Farben rot, gelb und blau gefärbt.
Warum gibt es immer zwei Punkte gleicher Farbe, die 1 cm voneinander entfernt sind ?

Lösung



Ohne Einschränkung der Allgemeinheit möge der Mittelpunkt R des Quadrates die Farbe rot haben. Man betrachte nun alle Punkte auf dem Einheitskreis K_1 um R. Wenn dort kein roter Punkt existiert, müssen alle Punkte gelb oder blau gefärbt sein. Falls alle Punkte sogar gleiche Farbe tragen, findet man auf K_1 stets zwei in der Entfernung von 1 cm. Wir brauchen daher nur noch den Fall zu betrachten, daß es auf dieser Kreislinie K_1 niemals 2 Punkte gleicher Farbe in der Entfernung 1 cm gibt.

B sei ein blauer Punkt auf K_1 . Man schlage den Einheitskreis K_2 um B; er schneidet K_1 nach Annahme in zwei gelben Punkten G und G'. Der Einheitskreis K_3 um G schneidet K_2 in R und in einem Punkt P außerhalb von K_1 . Nur wenn P rot gefärbt ist, haben wir noch kein geeignetes Punktepaar gefunden. Da aber nach Annahme auf K_1 niemals ein gleichfarbiges Punktepaar gefunden wird, müßten alle Punkte auf dem Kreis K_4 um R mit dem Radius $|RP| = \sqrt{3}$ rot gefärbt sein. Unter ihnen findet man dann stets ein Paar, das 1 cm Abstand hat.
Offensichtlich schöpft die vorliegende Argumentation nicht die gesamte Punktmenge des gegebenen Quadrates aus. Es bleibt die Frage offen, wie klein das Ausgangsquadrat sein darf, um trotzdem stets zwei gleichgefärbte Punkte im Abstand 1 cm finden zu können.

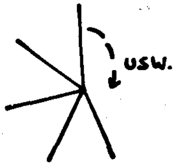
ks

Problem **(September 1981)**

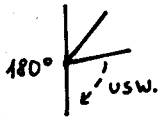
Aus lauter kongruenten regelmäßigen Vielecken soll die ganze Ebene lückenlos ausgelegt werden.
Für welche Eckenzahlen ist dies möglich, für welche nicht ?

Vorbemerkung

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.



a) Kein Eckpunkt eines Vielecks liegt im Innern der Seite eines anderen Vielecks.
oder:
Um jeden Punkt, in dem mehrere Vielecke zusammenstoßen, liegen nur (gleiche) Eckenwinkel.



b) "Ein Eckpunkt liegt im Innern einer Seite".
oder:
Um einen Punkt liegen gleiche Eckenwinkel und ein Winkel von 180°.

Lösung I (mit einfachsten mathematischen Mitteln)

a) Für den Winkel α_n im benutzten n-Eck gilt $\alpha_n < 180$.
Daraus ergibt sich für die Zahl m der Eckenwinkel um den betrachteten Punkt

$$m = \frac{360}{\alpha_n} > \frac{360}{180} = 2 \; .$$

Das Dreieck hat den kleinstmöglichen Eckenwinkel. Also gilt $\alpha_n \geq 60$ und

$$m = \frac{360}{\alpha_n} \leq \frac{360}{60} = 6 \; .$$

Zu $m = 3$ gehört $\alpha_n = \frac{360}{3} = 120$, also die (schon bekannte) Lösung "6-Eck".

Zu $m = 4$ gehört $\alpha_n = \frac{360}{4} = 90$, also die (schon bekannte) Lösung "Quadrat".

Zu $m = 5$ gehört $\alpha_n = \frac{360}{5} = 72$. "Zwischen" Quadrat und Dreieck gibt es aber kein regelmäßiges n-Eck.

Zu $m = 6$ gehört $\alpha_n = \frac{360}{6} = 60$, also das Dreieck.

b) Man hat hier $m = \frac{180}{\alpha_n}$, gewinnt entsprechend $2 \leq m \leq 3$ und verifiziert dann.

Lösung II (welche auf eine diophantische Gleichung führt)

a) Es ist $\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180$ und $m = \frac{360}{\alpha_n}$.

Daraus gewinnt man $m = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$.

Es kommt nun darauf an, für welche n der Bruch $\frac{4}{n-2}$ eine natürliche Zahl ist usw.

b) Die diophantische Gleichung ist hier $m = 1 + \frac{2}{n-2}$. ...

Andere Zugänge

Die Problemstellung wurde eingangs innermathematisch formuliert. Es gibt andere Zugänge, welche gleichzeitig eine Einbettung in umfassendere Problemfelder vornehmen. Stichworte :

a) Bienenwaben
b) Bierkästen
c) Parkette (in Schlössern, Badezimmern ...)

Anschlußprobleme

a) Archimedische Parkette erhält man, wenn man (verallgemeinernd) mehrere Sorten von regelmäßigen n-Ecken zuläßt.

b) Man kann sich aber auch mit einem "räumlichen Analogon" befassen, bei dem dann die Platonischen Körper an die Stelle der regelmäßigen n-Ecke treten.

kk

Problem **(April 1982)**

Ein Schriftsetzer benötigt zum Durchnumerieren eines umfangreichen Buches 6821 Ziffern.
Wieviele Seiten hat das Buch ?
Wieviele Nullen, Einsen, Zweien, ..., Neunen muß er verwenden ?

Lösung

Durch einfaches Abzählen erhält man :

Für die ersten 9 Seiten braucht er 9 Ziffern,

für die Seiten 10 bis 99 braucht er $2\cdot(99-10+1) = 180$ Ziffern und

für die Seiten 100 bis 999 braucht er $3\cdot(999-100+1) = 2700$ Ziffern.

Damit sind 2889 Ziffern verbraucht, so daß noch 3932 übrig bleiben. Bei 4-ziffrigen Zahlen sind das $3932/4 = 983$ Zahlen, d.h. das Buch hat 1982 (sic!) Seiten.
Um die Anzahl der einzelnen Ziffern zu bestimmen, gehen wir so vor :
In der letzten (=Einer-)Stelle treten die Ziffern 1, 2, ..., 9, 0, 1, 2, ... periodisch auf, d.h. in jedem Zehnerblock 1, ..., 9, 0 jede gleich oft. Nun gibt es bei 1982 genau 198 vollständige Zehnerblocks plus 1, 2. Also tritt in der Einerstelle

199 mal die 1, 2
und 198 mal die 3, 4, 5, ..., 9, 0 auf.

In der zweiten Stelle ist die Periode 100. In jedem 100-Block treten 10 mal die 1, ..., 10 mal die 9 auf. In der ersten Periode tritt die Null nicht auf. Da es 19 vollständige 100-Blocks gibt, tritt in der zweiten Stelle insgesamt

200 mal die 1, 2, ..., 7,
193 mal die 8
und 190 mal die 9 und die 0 auf.

An der dritten Stelle tritt in jedem vollständigen 1000-Block jede Ziffer 100 mal auf, im ersten nicht die Null. Bei einem vollständigen 1000-Block und dem Rest treten auf

200 mal die 1, 2, ..., 8,
183 mal die 9
und 100 mal die 0.

Schließlich erscheint an der vierten Stelle 983 mal die 1, nämlich bei den Zahlen 1000 bis 1982.

Ziehen wir Bilanz, so tritt insgesamt

	die	1	1582	mal,	
	die	2	599	mal,	
	die	3	598	mal,	
	die	4	598	mal,	
	die	5	598	mal,	
	die	6	598	mal,	
	die	7	598	mal,	
	die	8	591	mal,	
	die	9	571	mal	
und	die	0	488	mal	auf.
			6821		

Alternativ-Lösung

Mit führenden Nullen braucht man für 999 Seiten $3 \cdot 999$ Ziffern, für 9999 Seiten $4 \cdot 9999$ Ziffern. Also hat das Buch mehr als Tausend und weniger als Zehntausend Seiten.
Bei Zahlen (4-ziffrig) ≤ 999 treten

999 führende Nullen in der Tausender-Stelle,
99 führende Nullen in der Hunderter-Stelle,
und 9 führende Nullen in der Zehner-Stelle

auf, also insgesamt 1107.
Damit werden für 999 Seiten genau $4 \cdot 999 - 1107 = 2889$ Ziffern benötigt. Da für jede weitere Seite 4 Ziffern nötig sind und andererseits noch 3932 übrig sind, hat das Buch genau 983 Seiten ohne führende Null, also insgesamt 1982.

Bemerkung

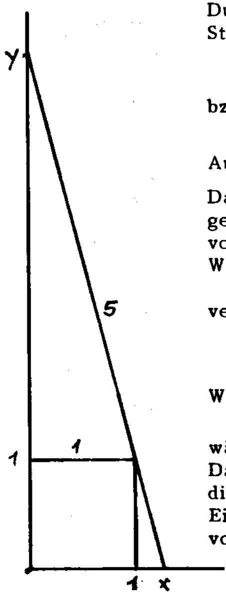
Es fällt auf, daß die Ziffern - abgesehen von der Null - , die nicht in 1982 vorkommen, alle gleich oft auftreten. Man überlege sich, ob das stets so ist.

hm

Problem **(Juli 1982)**

An einer senkrechten Wand steht ein Würfel von 1 m Kantenlänge. Eine 5 m lange Latte soll so an die Wand gelehnt werden, daß sie die Kante des Würfels berührt.
Wie hoch reicht die Latte ?

Lösung



Durch Flächenvergleich oder durch Anwendung der Strahlensätze erhält man

$$\frac{1}{2}xy = 1 + \frac{y-1}{2} + \frac{y-1}{2} , \qquad \boxed{xy = x + y}$$

bzw.

$$(y-1) : 1 = y : x \quad , \quad y \cdot x = x + y \; .$$

Außerdem gilt $\boxed{x^2 + y^2 = 25}$.

Damit sind wir auf ein nichtlineares Gleichungssystem gestoßen. Approximativ könnte man folgendermaßen vorgehen:
Wähle y_1 mit $1 < y_1 < 2$, berechne $\sqrt{25 - y_1^2}$ und vergleiche mit $\dfrac{y_1}{y_1 - 1}$.

Wenn $\sqrt{25 - y_1^2} > \dfrac{y_1}{y_1 - 1}$,

wähle y_2 mit $1 < y_2 < y_1$ und umgekehrt.
Dadurch kann man eine Intervallschachtelung für die gesuchte Höhe y gewinnen.
Eine zweite Lösung entsteht durch Vertauschung von x und y (Symmetriegründe).

Es gibt aber auch einen exakt angebbaren Term für die Berechnung von y :
Da Summe und Produkt von x, y stets gleich sind, $x + y = x \cdot y$, wird dafür eine Variable z substituiert, also $z := x+y = x \cdot y$; dann gilt

$$z^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 25 + 2z.$$

z ist also Lösung der quadratischen Gleichung

$$z^2 - 2z - 25 = 0 ,$$

d.h. eine der beiden Zahlen 1 ± 26 . Nach Voraussetzung gilt $z \;\; 0$, also $z = 1 + 26$.

Macht man die Substitution rückgängig, so erhält man

$$x + y = 1 + \sqrt{26} \quad \text{und} \quad x \cdot y = 1 + \sqrt{26} \, ,$$

und damit müssen **x, y** Lösungen der folgenden quadratischen Gleichung sein:

$$u^2 - (1 + \sqrt{26}) \cdot u + (1 + \sqrt{26}) = 0$$

$$x, y = \frac{1 + \sqrt{26}}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{26})^2}{4} - (1 + \sqrt{26})}$$

$$x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{26}) + \frac{1}{2}\sqrt{23 - 2 \cdot \sqrt{26}} \;\wedge\; y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{26}) - \frac{1}{2}\sqrt{23 - 2 \cdot \sqrt{26}}$$

oder auch umgekehrt.

Die Lösung läßt ebenfalls die Symmetrie erkennen (x, y erfüllen dieselbe quadratische Gleichung und gehen durch Vertauschung auseinander hervor).

Dezimale Näherungen für die beiden Auflagepunkte sind

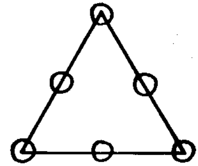
$$x = 1{,}2605184 \quad , \quad y = 4{,}8385012$$

oder umgekehrt.

ks

Problem **(August 1982)**

a) Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 sollen so auf die Markierungen im nebenstehenden Dreieck verteilt werden, daß man stets die gleiche Summe erhält, wenn man die drei Zahlen einer Seite addiert (→ magisches Dreieck).
Wieviele "wesentlich verschiedene" Lösungen gibt es, und was bedeutet dabei "wesentlich verschieden" ?



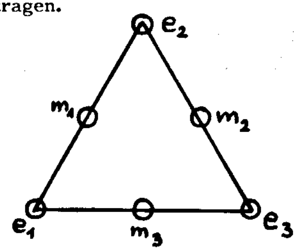
b) Gibt es magische Dreiecke auch mit den Zahlen 43, 17, 69, 30, 82, 56 ?

c) Drei natürliche Zahlen seien (willkürlich) auf drei Markierungen des obigen Dreiecks verteilt. Welche Bedingungen müssen diese drei Zahlen erfüllen, damit man dort durch drei weitere natürliche Zahlen zu einem magischen Dreieck ergänzen kann ?

Lösungen zu a)

I) Es gibt verschiedene Möglichkeiten, durch "systematisches Probieren" magische Dreiecke aus den vorgegebenen Zahlen zu erhalten.
Dies ist in der Regel die Methode, welche Schüler benutzen.

II) Wir stellen hier eine mathematisch elegante Lösung vor, bei der man durch "Superzeichenbildung" auf einfache Gleichungen kommt. Man darf nicht erwarten, daß Schüler (in der Regel) diese Lösung selbständig finden. Jedoch können sie, wenn diese Lösung ihnen vorgestellt wird, die Methode auf andere, ähnliche Problemstellungen übertragen.



Wir nehmen an, wir hätten ein magisches Dreieck vorgegeben, und suchen notwendige Bedingungen.

Mit $E = e_1 + e_2 + e_3$ und

$M = m_1 + m_2 + m_3$ und

s = Seitensumme

gelangt man zu dem Gleichungssystem

$$1 + 2 + \dots + 6 = 21 = E + M \quad , \quad 3 \cdot s = 2 \cdot E + M$$

Daraus gewinnt man :

$$3 \cdot s = 21 + E \quad , \quad 3 \text{ teilt } E \quad , \quad s = 7 + \frac{E}{3} \quad .$$

Wegen $E \geqslant 1 + 2 + 3$ ist $s \geqslant 7 + 2 = 9$,

wegen $E \leqslant 4 + 5 + 6$ ist $s \leqslant 7 + 5 = 12$.

Danach sind nur folgende Fälle möglich

(1) $E = 6 , \quad s = 9 , \quad M = 15$

(2) $E = 9 , \quad s = 10 , \quad M = 12$

(3) $E = 12$, $s = 11$, $M = 9$

(4) $E = 15$, $s = 12$, $M = 6$

Eine zweite Überlegung, welche von den sechs verteilten Zahlen nur benutzt, daß drei dieser Zahlen ungerade ($\rightarrow$ u) und drei gerade ($\rightarrow$ g) sind, kommt (genau) zu den folgenden vier wesentlich verschiedenen Aufteilungen.

(1)
$$\begin{array}{ccc} & u & \\ \cdot & & \cdot \\ u & \cdot & u \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} & u & \\ g & & g \\ u & g & u \end{array} \longrightarrow s \text{ gerade, } E \text{ ungerade}$$

(2)
$$\begin{array}{ccc} & g & \\ \cdot & & \cdot \\ g & \cdot & g \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} & g & \\ u & & u \\ g & u & g \end{array} \longrightarrow s \text{ ungerade, } E \text{ gerade}$$

(3)
$$\begin{array}{ccc} & g & \\ \cdot & & \cdot \\ u & \cdot & u \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} & g & \\ g & & g \\ u & u & u \end{array} \longrightarrow s \text{ ungerade, } E \text{ gerade}$$

(4)
$$\begin{array}{ccc} & u & \\ \cdot & & \cdot \\ g & \cdot & g \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} & u & \\ u & & u \\ g & g & g \end{array} \longrightarrow s \text{ gerade, } E \text{ ungerade}$$

Jetzt hat man so viele Informationen, daß man schnell die folgenden vier (einzigen) wesentlich verschiedenen "magischen" Verteilungen der vorgegebenen Zahlen findet.

(1) ungerade Zahlen auf den Ecken
$\rightarrow E = 9$, $s = 10$
$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 6 & & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{array}$$

(2) gerade Zahlen auf den Ecken
$\rightarrow E = 12$, $s = 11$
$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 5 & & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{array}$$

(3) ungerade Zahlen auf der unteren Seite
$\rightarrow s = 9$, $E = 6$
$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 6 & & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{array}$$

(4) gerade Zahlen auf der unteren Seite
$\rightarrow s = 12$, $E = 15$
$$\begin{array}{ccc} & 5 & \\ 3 & & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{array}$$

"Wesentlich verschieden" wird wie üblich gefaßt. Man erhält hier vier Äquivalenzklassen von Lösungen, wenn man Lösungen als äquivalent bezeichnet, falls diese sich durch Spiegelung und Drehung ineinander überführen lassen.

Lösung zu b)

Sind a und b ganze Zahlen und ist $v = (e_1, m_1, e_2, m_2, e_3, m_3)$ ein "Lösungsvektor" aus ganzen Zahlen, so ist auch $v^* = a \cdot v + b$ ein solcher "Lösungsvektor". Man findet dann schnell $a = 13$ und $b = 4$, so daß z.B. $a \cdot (3, 6, 1, 4, 5, 2) + b = (43, 82, 17, 56, 69, 30)$ gilt, was das magische Dreieck

```
    17
  82  56
43  30  69
```

liefert.

Lösung zu c)

Die nebenstehende Skizze zeigt den Typ eines "trivialen" magischen Dreiecks. Nach diesem "Strickmuster" kann man für die vorgegebenen natürlichen Zahlen x, y, z (ohne zusätzliche Bedingungen!) zu einem magischen Dreieck ergänzen, wenn x, y und z so verteilt sind :

```
    b
  c   a
a   b   c
```

a) alle auf einer Seite, z.B.

```
    •
  •   •
x   y   z
```

b) alle um eine Ecke z.B.

```
    •
  z   •
x   y   •
```

c) alle auf den Ecken

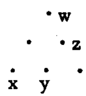
```
    z
  •   •
x   •   y
```

d) alle auf den Mitten

```
    •
  y   z
•   x   •
```

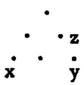
Es bleiben noch folgende, davon "wesentlich verschiedene" Fälle übrig :

e)



Hier muß $w + z = x + y$ und damit $x + y - z = w > 0$ gelten. Andererseits ist diese Ungleichung offensichtlich hinreichend für die Existenz.

f)



Hier gilt entsprechend $y + z - x > 0$ usw.

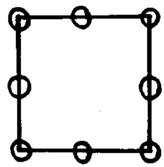
Die gesuchte Bedingung lautet:
Ist die Verteilung der drei Zahlen so, daß auf einer der drei Dreiecksseiten nur eine der Zahlen liegt, nämlich z_1, und auf einer anderen Dreiecksseite die beiden anderen Zahlen, nämlich z_2 und z_3, so muß

$$z_2 + z_3 - z_1 > 0$$

gelten .

Anschlußprobleme

1) Kann man mit den Zahlen $1, 2, \dots, 8$ ein "magisches Quadrat zweiter Art" bilden ?



2) Kann man mit den Zahlen $1, 2, \dots, 2n$ ein "magisches n-Eck zweiter Art" bilden ?
3) Welche Analogie gibt es für den dreidimensionalen Raum (magisches Tetraeder) ?
   Summiert man dort besser über Kanten oder über Flächen ?

kk

Problem **(September 1982)**

In Septumbrien gibt es nur zwei Sorten von Münzen, deren Werte in der Landeswährung Sept durch natürliche Zahlen angegeben werden. Ein Kaufmann hat herausgefunden, daß er bei seiner Preisauszeichnung genau 35 Werte vermeiden muß, insbesondere den Preis 58 Sept.
Wieviel Sept sind die beiden Münzen wert ?

Lösung

Die beiden Münzen haben Werte a und b Sept, $a,b \; \mathbb{N}$; ohne Einschränkung können wir a b annehmen. Dann müssen a und b teilerfremd sein, denn sonst könnten die Nichtvielfachen ihres größten gemeinsamen Teilers nicht aus a und b linear kombiniert werden, und das wären unendlich viele Zahlen und nicht nur 35.
Um die Aufgabe zu lösen, muß man die Zahlen n von der Form

$$(1) \qquad n = a \cdot x + b \cdot y \quad , \qquad x,y \; \mathbb{N} = 0,1,2,\ldots$$

untersuchen. Dies ist ein altes zahlentheoretisches Problem, das auf FROBENIUS (1849-1917) und SYLVESTER (1814-1897) zurückgeht. Wir setzen

$$S(a,b) := a \cdot (b-1) - b$$

und zeigen folgenden

Satz (Sylvester (1884))

Sind a, b teilerfremde Zahlen, so gilt
1) jedes $n \in \mathbb{N}$, $n > S(a,b)$ ist in der Form (1) darstellbar;
2) für $0 \leq n \leq S(a,b)$ ist genau eine der beiden Zahlen **n** oder $S(a,b) - n$ in der Form (1) darstellbar.

Nehmen wir zunächst diesen Satz als bewiesen an. Für teilerfremde a,b ist S(a,b) stets ungerade, denn $(a-1) \cdot (b-1) = S(a,b) + 1$ ist gerade, da sonst a und b beide gerade sein müßten, im Widerspruch zu ihrer Teilerfremdheit. Nach 2) des Satzes von Sylvester ist von den $S(a,b)+1$ Zahlen n mit $0 \leq n \leq S(a,b)$ genau die Hälfte darstellbar und die andere Hälfte nicht. Also ist

$$35 = \frac{1}{2} \cdot (S(a,b) + 1) \qquad \text{oder} \qquad S(a,b) = 69$$

und daher

$$70 = S(a,b) + 1 = (a-1) \cdot (b-1) \quad .$$

Als mögliche Zerlegungen von 70 gibt es

$$\begin{aligned} 70 &= 1 \cdot 70 \\ &= 2 \cdot 35 \\ &= 5 \cdot 14 \\ &= 7 \cdot 10 \quad . \end{aligned}$$

Die zugehörigen Paare (a,b) sind (2,71), (3,36), (6,15) und (8,11). Das erste Paar scheidet aus, da mit ihm 58 darstellbar ist, die beiden nächsten ebenfalls, weil sie nicht teilerfremd sind. Übrig bleibt damit als Lösung

$$a = 8 \quad , \quad b = 11 \quad .$$

In der Tat sind die folgenden 35 Zahlen nicht darstellbar:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 29, 31, 34, 36, 37, 39, 42, 45, 47, 50, 53, 58, 61, 69.

Alle anderen natürlichen Zahlen sind in der Form (1) darstellbar.

Beweis des Satzes von Sylvester

Es sei

(2) $$n = a\cdot x + b\cdot y \quad , \qquad x,y \in \mathbb{Z} \quad .$$

Dann gibt es nach der Division mit Rest ein $r \in \{0,1,\ldots,b-1\}$ mit

$$x = q\cdot b + r \quad , \qquad q \in \mathbb{Z} \quad .$$

Dieses r ist durch a, b und n eindeutig bestimmt, d.h. unabhängig von x und y, denn aus

$n = ax' + by'$ und $x' = q'b + r'$ mit $r' \in \{0,1,\ldots,b-1\}$

folgt durch Einsetzen :

b teilt $n - ax' = n - a\cdot(q'b + r')$ oder b teilt $n - ar'$.

Da b auch $n-ar$ teilt, ergibt sich nach Subtraktion: b teilt $a\cdot(r-r')$.

Da nun a und b teilerfremd sind, muß b die Differenz $r-r'$ teilen, was aber – wie gewünscht – $r = r'$ zur Folge hat.

Ist noch $x,y \geq 0$, so gilt mit dem soeben bestimmten r

$$n - ar \geq n - ax = by > -b \quad .$$

Also gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$, das in der Form (1) dargestellt werden kann, genau ein $r \in \{0,1,\ldots,b-1\}$ mit

i) b teilt $n - ar$

und ii) $n - ar > -b$.

Aber es gilt auch die Umkehrung: Gelten i) und ii) für ein $r \in \{0,\ldots,b-1\}$, so ist n in der Form (1) darstellbar, denn aus i) folgt $n - ar = b\cdot y$, $y \in \mathbb{Z}$, und aus ii) $y \geq 0$.

Um also sicherzustellen, daß n in der Form (1) dargestellt werden kann, reicht es aus, i) und ii) zu erfüllen. Da i) stets gilt (siehe (2)), erhält man für maximal gewähltes r, d.h. $r = b-1$: jedes $n > a\cdot(b-1) - b =: S(a,b)$ ist in der Form (1) darstellbar. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Nun wird die Zahl $S(a,b) - n$ in der Form (1) dargestellt, wenn nach i) gilt:

b teilt $S(a,b) - n - as = a\cdot(b-1) - b - n - as$,

d.h. b teilt $a\cdot(s+1) + n$, wobei $s \in \{0,1,\ldots,b-1\}$.

Setzen wir noch $r' := b - 1 - s$, so ist $r' \in \{0,\ldots,b-1\}$, und es gilt

b teilt $a\cdot(b-r') + n$

oder b teilt $n - ar'$.

Die Bedingung ii) besagt für $S(a,b) - n$:

$$\begin{aligned}
& a\cdot(b-1) - b - n - as > -b \\
\Leftrightarrow\quad & ab - a - n - as > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & ab - a - n - a(b-1-r') = -n + ar' > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & n - ar' < 0 \quad .
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit: $S(a,b) - n$ ist in der Form (1) genau dann darstellbar, wenn gilt

$$\text{i')} \quad b \text{ teilt } n - ar'$$

und

$$\text{ii')} \quad n - ar' < 0$$

für ein (eindeutig bestimmtes) $r' \in \{0,\dots,b-1\}$.

Da i) bzw. i') immer erfüllt ist und von ii) und ii') stets genau eines, ist der Satz von Sylvester vollständig bewiesen.-

Bemerkungen

1) Läßt man zur Darstellung von n auch negative Zahlen zu (wie in (2)), so ist bei teilerfremden a und b jedes $n \in \mathbb{N}$ linear kombinierbar. Für den Kaufmann bedeutet dies aber ein ständiges Wechseln der Münzen.

2) Wesentlich komplizierter wird die Situation bei drei oder mehr Münzen. Hier besagt ein Satz von Frobenius, daß es stets eine Grenzzahl gibt, ab der jede größere natürliche Zahl dargestellt werden kann. Das Bestimmen dieser Grenzzahl ist aber nicht einfach, vgl. etwa den interessanten Artikel von C. Smoryński, "Skolem's Solution to a Problem of Frobenius", Math. Intelligencer 3, 123-32, (1981).

3) Siehe auch R. Honsberger, Mathematical Gems II, Math. Ass. of Amer. (1976), "A Putman Paper Problem", p. 136-146 (vgl. Literatur S. 75).

4) Zusatzaufgabe

   Wenn es in Septumbrien nur zwei Münzen mit den Werten a bzw. b gibt, welches ist dann der größte Preis, der nicht bezahlt werden kann ?

   Wie ist die Situation, wenn von jeder Münzensorte mindestens eine verlangt wird ?

hm

Problem **(Oktober 1982)**

Auf einer Brotscheibe liegen genau 1982 Zuckerkörner.
Warum läßt sich mit einem scharfen Messer durch einen geraden Schnitt die Brotscheibe so zerteilen, daß auf beiden Seiten gleich viele Körner liegen ?

Lösung

Man denke sich alle Verbindungsgeraden von je zwei "Zuckerkörnern" gezogen. Nun wähle man einen Punkt P so, daß er auf keiner dieser Verbindungsgeraden liegt.
Eine Gerade durch P teilt die "Zuckerkörner" in zwei Teilmengen T_1 und T_2. Falls z.B. in T_1 weniger "Zuckerkörner" als in T_2 liegen, drehe man die Gerade um P so, daß die Anzahl der "Zuckerkörner" sich zugunsten von T_1 ändert. Diese Änderung geschieht immer in Einerschritten, da nach Voraussetzung niemals zwei oder mehr "Zuckerkörner" auf einer Geraden durch P liegen. Weil die Gesamtzahl 1982 der "Zuckerkörner" eine gerade Zahl ist, endet dieses Verfahren, wenn $|T_1| = |T_2| = 991$ gilt.

ks

Problem **(November 1982)**

Professor Dr. Stochasterix hat gerade seine Vorlesung beendet und steht nun vor dem Hörsaal. Als die Studenten in durchaus zufälliger Reihenfolge den Saal verlassen, fällt dem Professor auf, daß die ersten fünf sämtlich Frauen sind. "Interessant", sagt er zu seinem Freund, "die Chancen dafür waren genau 50 zu 50."
Wieviele Studenten befanden sich in dem Hörsaal und wieviele von ihnen waren weiblich ?

Lösung

Das Problem ist bewußt so gewählt, daß bereits geringe Stochastik-Kenntnisse zur Bearbeitung ausreichen. Es genügt der Ansatz mit einem Urnenmodell: x sei die Anzahl der weiblichen und n die Anzahl aller Teilnehmer der Vorlesung. Dementsprechend sei eine Urne mit x roten und n-x schwarzen Kugeln gefüllt. Dann handelt es sich um das Ziehen ohne Zurücklegen von 5 Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln ($n \geq 5$). Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, genau 5 rote Kugeln zu ziehen. Alle $\binom{n}{5}$ Fünfermengen sind gleichwahrscheinlich, und von ihnen sind die $\binom{x}{5}$ Teilmengen mit nur roten Kugeln die "günstigen". Also gilt für die Wahrscheinlichkeit des betrachteten Ereignisses E

$$P(E) = \frac{\binom{x}{5}}{\binom{n}{5}} ,$$

und diese Wahrscheinlichkeit soll genau $\frac{1}{2}$ betragen :

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)} = \frac{1}{2} \qquad \text{(A)}$$

Diese Gleichung 5.Grades in x und n wird dadurch etwas handlich, daß alle Faktoren natürliche Zahlen sind, die sich auf geeignete Weise kürzen lassen müssen. Durch systematisches Probieren kommt man schnell auf die Lösung

$$n = 10\,, \; x = 9: \qquad \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{2}$$

Offen bleibt hierbei die Frage, ob es weitere Lösungen der Gleichung (A) gibt. Begnügt man sich mit der mehr pragmatischen Betrachtungsweise, daß die Wahrscheinlichkeit P(E) nahezu 1/2 sein soll, so gibt es unendlich viele "Lösungen", z.B. gilt

mit $n = 56\,, x = 49: \quad \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{56 \cdot 55 \cdot 54 \cdot 53 \cdot 52} = 0{,}49920 \approx \frac{1}{2}$

$n = 566, x = 493: \quad \frac{493 \cdot 492 \cdot 491 \cdot 490 \cdot 489}{566 \cdot 565 \cdot 564 \cdot 563 \cdot 562} = 0{,}500046 \approx \frac{1}{2}$

$n = 674, x = 587: \quad \frac{587 \cdot 586 \cdot 585 \cdot 584 \cdot 583}{674 \cdot 673 \cdot 672 \cdot 671 \cdot 670} = 0{,}499956 \approx \frac{1}{2}$

Allerdings hört die Pragmatik bei solch großen Teilnehmerzahlen dann auch wieder auf. Nach einer Überprüfung mit einem Computerprogramm müßten mindestens 4320 Männer anwesend sein, wenn es eine exakte Lösung geben sollte.
Daß es exakte Lösungen außer der genannten geben könnte, wird an einer einfacheren, aber ähnlich aufgebauten Gleichung deutlich. Nach einer Mitteilung von Herrn Gerhard Kirchner, Hamburg, hat die Gleichung

$$\frac{\binom{x}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad \frac{x \cdot (x-1)}{n \cdot (n-1)} = \frac{1}{2}$$

außer der "trivialen" Lösung $x = 3$, $n = 4$ z.B. folgende weitere Lösungen :

x	n	$\frac{x\cdot(x-1)}{n\cdot(n-1)}$	Zerlegung in kürzende Faktoren
15	21	$\frac{15\cdot 14}{21\cdot 20}$	$\frac{3\cdot 5\cdot 2\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 2\cdot 2\cdot 5} = \frac{1}{2}$
85	120	$\frac{85\cdot 84}{120\cdot 119}$	$\frac{5\cdot 17\cdot 7\cdot 12}{2\cdot 5\cdot 12\cdot 7\cdot 17} = \frac{1}{2}$
493	697	$\frac{493\cdot 492}{697\cdot 696}$	$\frac{17\cdot 29\cdot 12\cdot 41}{17\cdot 41\cdot 2\cdot 12\cdot 29} = \frac{1}{2}$
2871	4060	$\frac{2871\cdot 2870}{4060\cdot 4059}$	$\frac{29\cdot 99\cdot 41\cdot 70}{41\cdot 99\cdot 2\cdot 70\cdot 29} = \frac{1}{2}$
16731	23661	$\frac{16731\cdot 16730}{23661\cdot 23660}$	$\frac{99\cdot 169\cdot 70\cdot 239}{2\cdot 70\cdot 169\cdot 99\cdot 239} = \frac{1}{2}$

Mit der Substitution $a = 2x - 1$ und $b = 2n - 1$
folgt $2a^2 - 1 = b^2$.
Das ist eine Pellsche Gleichung, von der man zeigen kann, daß sie unendlich viele Lösungen hat.

ks

Problem **(Dezember 1982)**

Wie lautet die 100. Ziffer in der Dezimaldarstellung von

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \qquad ?$$

Dabei können Neunerperioden stets vermieden werden, z.B. $3{,}235\overline{9} = 3{,}236$.

Lösung

Numerische Berechnung mit Taschenrechnergenauigkeit liefert erstaunlicherweise 1,00000000 ; sie gibt aber natürlich keine Auskunft über die 100. Dezimale. Vielleicht gibt es ja eine einfache Lösung ?
Schön wäre es beispielsweise, wenn $\sqrt{5} \pm 2$ selbst 3. Potenzen wären, weil dann die Kubikwurzeln wegfielen. Probiert man mit $1+\sqrt{5}$, so folgt

$$(1+\sqrt{5})^2 = 1 + 2\cdot\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}$$

und

$$(1+\sqrt{5})^3 = (6+2\cdot\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt{5}) = 8\cdot\sqrt{5}+16 = 8\cdot(\sqrt{5}+2)\ ,$$

also

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2+\sqrt{5} \quad \text{und daher} \quad \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ .$$

Analog ist

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2-\sqrt{5} \quad \text{und daher} \quad \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ,$$

so daß für die zu berechnende Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$ herauskommt.
Die 100. Ziffer in der Dezimaldarstellung ist natürlich gleich 0, wie alle anderen hinter dem Dezimalpunkt.
Wäre man nicht auf diese Idee gekommen, so würde man setzen

$$x := \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

und erhielte

$$\begin{aligned} x^3 &= \sqrt{5}+2 - 3\cdot\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2(\sqrt{5}-2)} + 3\cdot\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)^2} - (\sqrt{5}-2) \\ &= 4 - 3\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + 3\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \quad , \text{denn } (\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = 1 \\ &= 4 - 3\cdot x \quad . \end{aligned}$$

Die Zahl x ist also Nullstelle des Polynoms $X^3 + 3X - 4$. Eine reelle Nullstelle ist offensichtlich 1 . Dividiert man $X^3 + 3X - 4$ durch $(X-1)$, so ergibt sich

$$X^2 + X + 4 = \left(X+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\ .$$

Offensichtlich besitzt dieses Polynom keine relle Nullstelle, so daß als einzige Lösung $x = 1$ folgt.

Bemerkung

Aus dem Beweis geht hervor, daß 1 auch dann die einzige relle Lösung ist, wenn man die dritten Wurzeln als nicht reell zuläßt.

hm

Problem **(Januar 1983)**

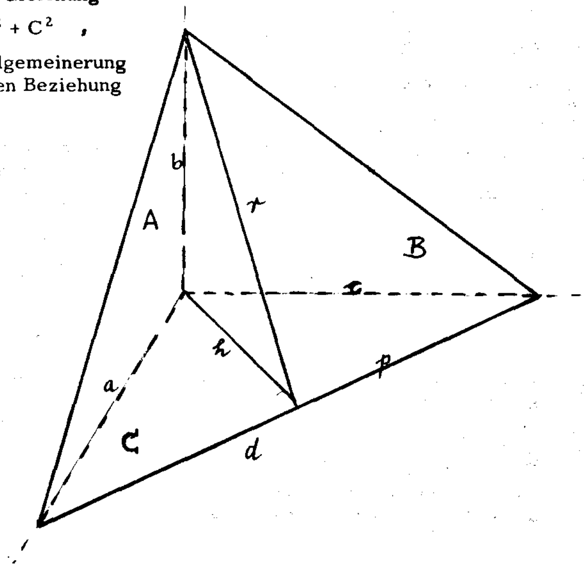
In einer Ecke eines Tetraeders stoßen die drei Kanten paarweise senkrecht aufeinander. Die Inhalte der drei angrenzenden Flächen seien A, B, C.
Wie groß ist der Inhalt D der vierten Fläche ?

Lösung

Bewiesen wird die Gleichung

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 \quad ,$$

die wie eine Verallgemeinerung der pythagoräischen Beziehung aussieht.



Mit den in der Skizze eingetragenen Bezeichnungen gilt :

$$D = \frac{1}{2} \cdot d \cdot r \quad ,$$

$$4A^2 = a^2b^2 \quad , \quad 4B^2 = b^2c^2 \quad , \quad 4C^2 = a^2c^2 \quad ,$$

$$d^2 = a^2 + c^2 \quad , \quad r^2 = b^2 + h^2 \quad , \quad h^2 = c^2 - p^2 \quad , \quad p \cdot d = c^2$$

(Sätze für rechtwinklige Dreiecke).
Durch Einsetzen und Umformen ergibt sich die gesuchte Beziehung :

$$\begin{aligned} 4D^2 &= d^2r^2 = (a^2+c^2) \cdot (b^2+h^2) = (a^2+c^2) \cdot (b^2+c^2-p^2) \\ &= a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + c^4 - a^2p^2 - c^2p^2 \\ &= 4A^2 + 4C^2 + 4B^2 + c^4 - p^2(a^2+c^2) \\ &= 4A^2 + 4B^2 + 4C^2 + c^4 - c^4 \qquad \text{(u.a. da } a^2+c^2 = d^2\text{)} \; , \\ D^2 &= A^2 + B^2 + C^2 \quad , \end{aligned}$$

q.e.d.

ks

Problem **(Februar 1983)**

An einer Tafel stehen die Zahlen 1, 2, 3, ... , 1983 . Man darf zwei beliebige Zahlen streichen und dafür ihre Differenz anschreiben. Wiederholt man diesen Vorgang genügend oft, so bleibt an der Tafel schließlich nur noch eine Zahl stehen.
Warum ist diese stets gerade ?
Wie müßte diese Aufgabe für 1984 bzw. 1985 formuliert werden ?

Lösung I

Beim Differenzenbilden hat man die drei Fälle :

die beiden Zahlen sind	die Differenz ist	Anzahl der ungeraden Zahlen vermindert sich um
u , u	g	2
g , g	g	0
u , g (bzw. g,u)	u	0

Zum Schluß bleibt somit genau dann eine gerade Zahl übrig, wenn man mit einer geraden Anzahl von ungeraden Zahlen begonnen hat. Dies ist aber bei 1, 2, 3, ... , 1983 wegen "1984 : 2 = 992 und 992 gerade" der Fall. Geht man bis 1984, so ändert man die Anzahl der ungeraden Zahlen nicht. Geht man bis 1985, so hat man am Anfang eine ungerade Zahl mehr; und damit bleibt zum Schluß eine ungerade Zahl übrig (die jeweilige Formulierung der Aufgabe kann dem Leser überlassen werden).

Lösung II

Die Anfangsüberlegungen bleiben gleich. Doch dann variiert man. Es ist für die Entscheidung in gerade und ungerade nämlich gleich, ob man die Summe oder die Differenz bildet. Also gilt:
Ist die Anfangssituation 1, 2, 3, ... , n , so bleibt eine gerade (ungerade) Zahl genau dann übrig, wenn

$$1 + 2 + \ldots + n \quad \text{gerade (ungerade) ist.}$$

Die Diskriminante ist also $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Anschlußaufgaben

1) Man beginnt mit den Zahlen 1, 2, ... , n . Welche ist die größtmögliche / kleinstmögliche Zahl, welche am Ende übrig bleiben kann, und wie erhält man sie ?

2) Welche Prozeduren kann man anstelle von Differenzenbildung (bzw. Summenbildung) vornehmen, ohne die "Ergebnisse" in den Aufgabenstellungen zu verändern ?

kk

Problem **(März 1983)**

Die alten Griechen haben eine Zahl "vollkommen" genannt, wenn die Summe ihrer echten Teiler genauso groß ist wie die Zahl selbst.
Unter den Zahlen der Form $n = p^k \cdot q$ mit Primzahlen p, q mit der natürlichen Zahl k gibt es vollkommene Zahlen, z. B. die Zahl $28 = 2^2 \cdot 7$; denn $1+2+4+7+14 = 28$.
Welche Bedingungen an **p, q, k kennzeichnen vollkommene Zahlen ?**

Lösung

Wir bezeichnen mit $\sigma(n)$ die Summe der positiven Teiler von n. Ist $n = n_1 \cdot n_2$ eine Zerlegung von n in teilerfremde Faktoren n_1 und n_2, so besitzt jeder Teiler d von n eine eindeutige Zerlegung $d = d_1 \cdot d_2$, wobei d_1 ein Teiler von n_1 und d_2 einer von n_2 ist.
Daher gilt $\sigma(n) = \sigma(n_1) \cdot \sigma(n_2)$. Ist nun

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$, so folgt wegen

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{e_1}) \cdot \sigma(p_2^{e_2}) \cdot \ldots \cdot \sigma(p_r^{e_r}) \qquad \text{und}$$

$$\sigma(p^e) = 1 + p + \ldots + p^e = \frac{p^{e+1}-1}{p-1} \qquad \text{(geometrische Reihe)}$$

schließlich

$$(1) \qquad \sigma(n) = \frac{p_1^{e_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{e_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_r^{e_r+1}-1}{p_r-1}$$

mit $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$.

Speziell ist $\sigma(p) = 1+p$, so daß eine Primzahl niemals vollkommen sein kann. Daher können wir $k>0$ voraussetzen.

Wir diskutieren nun folgende Möglichkeiten :

I) $p = q$, also $n = p^{k+1}$.

Dann ist wegen (1) $\sigma(p^{k+1}) = \dfrac{p^{k+2}-1}{p-1}$.

Wäre n vollkommen, also $\sigma(n) = 2 \cdot n$, so ist $p^{k+2} = 2 \cdot (p-1)p^{k+1} + 1$.

Dann teilt p^{k+1} die linke Seite, aber nicht die rechte. Da dies unmöglich ist, kann in diesem Falle n nicht vollkommen sein.

II) Übrig bleibt der Fall $p \neq q$, d.h. p und q sind teilerfremd.

II.1) $p, q > 2$, d.h. n ist ungerade.
Dann ist $\sigma(n) = \sigma(p^k \cdot q) = \dfrac{p^{k+1}-1}{p-1} \cdot (1+q) < \dfrac{p^{k+1}}{p-1} \cdot (1+q)$.

a) $3 \leq p < q$, so ist $\dfrac{\sigma(n)}{n} < \dfrac{p}{p-1} \cdot \dfrac{1+q}{q}$.

Da $\frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1}$ und $\frac{1+q}{q} = 1 + \frac{1}{q}$ streng monoton fallen, ist $\frac{p}{p-1} \leq \frac{3}{2}$ und $\frac{1+q}{q} \leq \frac{6}{5}$.

Daher folgt $\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{5} < 2$,

d.h. n ist nicht vollkommen. Ähnlich schließt man in

b) $3 \leq q < p$. Dann ist $\frac{p}{p-1} \leq \frac{5}{4}$ und $\frac{1+q}{q} \leq \frac{4}{3}$

und daher $\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{3} < 2$.

Also gibt es keine ungerade vollkommene Zahl der Form $p^k \cdot q$.

II.2) $q = 2$, $p > 2$.

$$\sigma(p^k \cdot 2) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} \cdot 3 .$$

Wäre n vollkommen, so folgt $\frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} \cdot 3 = 4 \cdot p^k$ oder

$$3 \cdot p^{k+1} = 4 \cdot p^k (p-1) + 3 .$$

Deshalb teilt p^k die linke Seite, daher auch 3. Dies heißt $p^k = 3$, also $p = 3$, $k = 1$, und in der Tat ist $n = 3^1 \cdot 2 = 6$ vollkommen.

II.3) $p = 2$, $q > 2$.

$$\sigma(2^k \cdot q) = (2^{k+1} - 1)(1+q) .$$

Wäre $2^k \cdot q$ vollkommen, so wäre $(2^{k+1} - 1)(1+q) = 2^{k+1} \cdot q$, also teilt 2^{k+1} den zweiten Faktor $1+q$ der linken Seite,

d.h. $1+q = 2^{k+1} \cdot s$, $s \in \mathbb{N}$.

Setzt man dies ein und kürzt 2^{k+1} heraus, so folgt

$$(2^{k+1} - 1) \cdot s = q .$$

Da dies eine Zerlegung der Primzahl q bedeutet, muß $2^{k+1} - 1 = 1$ oder $s=1$, d.h. $k=0$ oder $s=1$ gelten.

Da aber $k>0$ vorausgesetzt ist, ergibt sich $s=1$, also $q = 2^{k+1} - 1$.

Insgesamt haben wir folgendes Resultat für Zahlen n der Form $n = p^k \cdot q$ erhalten:

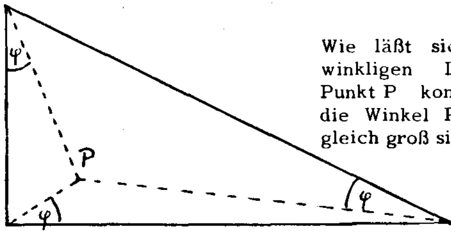
1) Es gibt unter ihnen keine ungeraden vollkommenen Zahlen.
2) Bei jeder geraden vollkommenen Zahl n ist $p=2$ und $q=2^{k+1}-1$.
   Man prüft sofort nach, daß diese Zahlen tatsächlich vollkommen sind.

Bemerkungen

1. Dieses Resultat war bereits Euklid (365-300 v.Chr.) bekannt.
2. Bereits L. Euler (1707-1783) wußte, daß jede gerade vollkommene Zahl diese Form haben muß.
3. Nun kann 2^e-1 nur dann prim sein, wenn e selbst prim ist, wie sich aus einer Zerlegung $e = a\cdot b$, $a>1$, $b>1$ ablesen läßt wegen
$$2^e-1 = 2^{ab}-1 = (2^a-1)(2^{a(b-1)}+ \dots +2^a+1) .$$
So ist z.B. 2^p-1 prim für $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, \dots$
Diese ergeben die vollkommenen Zahlen
$$2^1(2^2-1) = 6 \ , \ 2^2(2^3-1) = 28 \ , \ 2^4(2^5-1) = 496 \ , \ \dots$$
4. Primzahlen der Form 2^p-1 heißen Mersenne-Primzahlen nach Mersenne (1588-1648). Wegen ihrer einfachen Bauart lassen sie sich mit Hilfe von Computern gut untersuchen. Daher sind die größten heute bekannten Primzahlen meist Mersenne-Primzahlen. Den "Weltrekord" hält z.Zt. (Sep.1985) $p = 216091$, das eine Mersenne-Primzahl von über 65000 Stellen ergibt.
5. Bis heute ist nicht bekannt, ob es unendlich viele Mersenne-Primzahlen und damit auch unendlich viele gerade vollkommene Zahlen gibt.
6. Dagegen weiß man über ungerade vollkommene Zahlen wesentlich weniger. So ist z. B. nicht bekannt, ob es überhaupt welche gibt. Falls es eine gäbe, müßte sie mehr als 100 Stellen haben.

hm

Problem **(April 1983)**



Wie läßt sich in jedem rechtwinkligen Dreieck ABC ein Punkt P konstruieren, für den die Winkel PAB, PBC und PCA gleich groß sind ?

Lösung

Die Winkel bei P sind durch die 3 Dreieckswinkel eindeutig bestimmt, und zwar ergibt sich

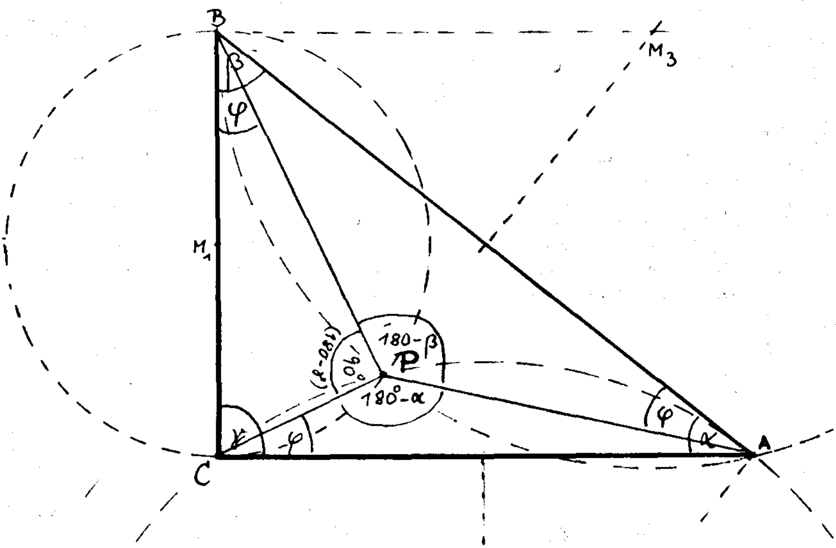
$\sphericalangle CPB = 90° = (180° - \gamma)$, $\sphericalangle APC = 180° - \alpha$ und $\sphericalangle BPA = 180° - \beta$

jeweils unter Ausnutzung der Gleichheit der Teilwinkel φ:

z.B. $\sphericalangle APC = 180° - \varphi - (\alpha - \varphi) = 180° - \alpha$.

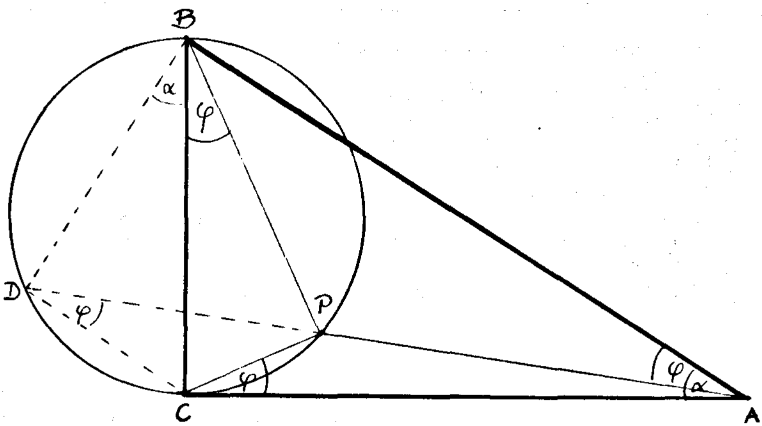
Daher liegt P jeweils auf Kreisen zu gegebenen Peripheriewinkeln

1. auf dem Thaleskreis über $\overline{BC}$
2. auf dem Kreis, der $\overline{AB}$ zur Sehne und $(180° - \beta)$ als Peripheriewinkel hat (Mittelpunkt: Schnittpunkt des Lotes in B auf $\overline{BC}$ mit der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$)
3. auf dem Kreis, der $\overline{AC}$ zur Sehne und $(180° - \alpha)$ als Peripheriewinkel hat.



Die angegebene Konstruktion macht deutlich, daß sie sofort auf beliebige (nicht rechtwinklige) Dreiecke verallgemeinert werden kann. Zugleich gibt sie die in der Aufgabe liegende Symmetrie wieder.

Eine andere Lösung macht stärkeren Gebrauch von der Rechtwinkligkeit des Dreiecks:
Konstruiere den Thaleskreis über $\overline{BC}$; trage in B an $\overline{BA}$ den rechten Winkel an, dessen freier Schenkel den Thaleskreis in D schneidet. Verbinde D mit A; Schnittpunkt mit dem Thaleskreis ist der gesuchte Punkt P.



Zur Begründung wird gezeigt, daß die eingetragenen Winkel untereinander gleich sind.
$\varphi := \sphericalangle PAB$; da das Dreieck ABD nach Konstruktion rechtwinklig ist und da D auf dem Thaleskreis über $\overline{BC}$ liegt, gilt $\sphericalangle CDA = \varphi$. Als Peripheriewinkel über der gleichen Sehne $\overline{CP}$ sind die beiden Winkel $\sphericalangle CDP$ und $\sphericalangle CBP$ gleich groß, also gleich φ. Da P auf dem Thaleskreis liegt und da $\sphericalangle BCA$ ein rechter Winkel ist, muß $\sphericalangle ACP = \sphericalangle CBP = \varphi$ gelten.

Bemerkung

Diese zweite Konstruktion ermöglicht auch eine Antwort auf folgende Anschlußfrage:
Wenn P durch das Dreieck eindeutig bestimmt ist und mit ihm der Winkel φ, so gibt es eine Funktion Φ, die bei rechtwinkligen Dreiecken jedem Dreieckswinkel α den Winkel φ zuordnet: $\varphi = \Phi(\alpha)$.
Welche Eigenschaften hat Φ, wie läßt sich φ berechnen ?
Φ ist nicht die konstante Funktion, da $0 < \varphi < \alpha$ gilt und α beliebig klein gewählt werden kann. Φ kann auch keine lineare Funktion sein, da aus Symmetriegründen $\Phi(90° - \alpha) = \Phi(\alpha)$ gilt. Aus der letzten Zeichnung läßt sich ablesen :

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad |DC| = a \cdot \sin\alpha, \quad |BD| = c \cdot \tan\varphi$$

$$\begin{aligned}
& & |DC|^2 + |BD|^2 &= a^2 \\
&\Leftrightarrow & a^2 \cdot \sin^2\alpha + c^2 \cdot \tan^2\varphi &= a^2 \\
&\Leftrightarrow & \frac{a^2}{c^2} \cdot \sin^2\alpha + \tan^2\varphi &= \frac{a^2}{c^2} \\
&\Leftrightarrow & \sin^4\alpha + \tan^2\varphi &= \sin^2\alpha \\
&\Leftrightarrow & \tan^2\varphi &= \sin^2\alpha\,(1 - \sin^2\alpha) \\
&\Leftrightarrow & \tan^2\varphi &= \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \qquad \text{wegen } 0 < \varphi < \alpha < 90° \\
&\Leftrightarrow & \tan\varphi &= \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\
&\Leftrightarrow & \tan\varphi &= \frac{1}{2}\sin 2\alpha
\end{aligned}$$

$$\Phi : \alpha \longrightarrow \arctan\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$$

Wie verallgemeinert sich diese Funktion, wenn das Dreieck nicht rechtwinklig ist ?

ks

Problem **(Mai 1983)**

n Zwillingspaare werden von 1 bis n numeriert. Sie sollen sich nun so in einer Reihe aufstellen, daß zwischen den Zwillingsgeschwistern mit der Nummer k genau k andere Personen stehen, für $n=3$ z.B.

$$2 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad .$$

Ist das die einzig mögliche Aufstellung ?
Gibt es derartige Aufstellungen auch für $n = 4, 5, 6, 7$?

Lösung

Natürlich gibt es noch die in der Mitte gespiegelte Aufstellung

$$3 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad .$$

Dies sind die einzigen Möglichkeiten für $n = 3$, denn:
Beginnt man mit 2, so muß als nächstes die 3 kommen, da die 1 zu einer Kollision führt. Dann ergibt sich zwangsläufig die Aufstellung aus der Aufgabe. Ganz ähnlich zeigt man, daß es nur eine Möglichkeit mit der 3 als Startzahl gibt. Zu prüfen bleibt, ob mit der 1 begonnen werden darf. Aber nach

$$1 \; \_ \; 1 \; \_ \; \_ \; \_$$

kann die 3 nur so untergebracht werden:

$$1 \; 3 \; 1 \; \_ \; \_ \; 3 \quad ,$$

aber nun bleibt kein Platz für die 2 .

Um die Frage bei größeren Zahlen zu untersuchen, setzen wir gleich allgemein $n = u+g$, wobei u die Anzahl der ungeraden und g die Anzahl der geraden Zahlen $\leq n$ ist. Denken wir uns nun die n Zwillingspaare entsprechend der Vorschrift in eine Reihe aufgestellt: $a(1), \ldots, a(2n)$. Jetzt ordnen wir diese Zahlen in Zickzack-Form an:

$$\begin{array}{ccccccccc} a(1) & & a(3) & & \cdots & & a(2n-1) & & \\ & a(2) & & a(4) & & \cdots & & a(2n) & , \end{array}$$

und bezeichnen mit g_1, u_1 bzw. g_2, u_2 die Anzahl der geraden, ungeraden Zahlen in der ersten bzw. der zweiten Reihe. Dann gilt

$$u_1 + u_2 = 2u \quad , \quad g_1 + g_2 = 2g \quad , \quad u_1 + g_1 = u_2 + g_2 = n \quad .$$

Ist $a(i)$ ungerade (gerade), so befindet sich der zugehörige Zwilling in der gleichen (anderen) Reihe, also sind

$$u_1 \text{ und } u_2 \text{ gerade} \quad \text{und} \quad g_1 = g_2 \quad .$$

Dann ergibt sich aus den obigen Gleichungen sofort

$$u_1 = u_2 \quad \text{und} \quad u = u_1 \quad ,$$

also muß u gerade sein, d.h. n muß von der Form

$$n = 2m + 2m = 4m \quad \text{oder} \quad n = 2m + 2m - 1 = 4m - 1 \quad \text{sein.}$$

Damit scheidet $n=5$ bzw. $n=6$ aus. Für $n=4$ bzw. $n=7$ existieren derartige Aufstellungen, z.B.

4 1 3 1 2 4 3 2 ,
7 4 1 5 1 6 4 3 7 5 2 3 6 2 .

Bemerkungen

1. Man kann beweisen, daß die Bedingung $n = 4m$ oder $n = 4m-1$ nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Möglichkeit einer solchen Aufstellung ist.
2. Ist die Aufstellung generell bis auf Spiegelsymmetrie eindeutig ?

hm

Problem **(Juni 1983)**

Die Gleichung

$$[1{,}62^2 \cdot n] = [1{,}62 \cdot n] + n$$

wird von vielen natürlichen Zahlen erfüllt, z.B. von $n = 1, 2, \ldots, 10, 50, 100, 200$, nicht aber von allen.

Gibt es eine reelle Zahl c derart, daß die Gleichung

$$[c^2 \cdot n] = [c \cdot n] + n$$

für alle natürlichen Zahlen n gilt ?

($[x]$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.)

Lösung

Es gibt genau zwei derartige Zahlen. Wegen

$$[c\cdot n] + n = [c\cdot n + n] = [n\cdot(c+1)]$$

erfüllt jedes $c \in \mathbb{R}$, für das $c^2 = c+1$ gilt, die Bedingung. Das sind die beiden Zahlen

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} .$$

Aber gibt es noch andere ?

Ist $c \neq c_1, c_2$, so ist $c^2 - (c+1) \neq 0$,

so daß für hinreichend großes n sicher

$$|c^2 - (c+1)| \cdot n > 1 \quad \text{gilt, d.h.} \quad |c^2 \cdot n - n\cdot(c+1)| > 1 .$$

Dann ist aber $[c^2\cdot n] \neq [n\cdot(c+1)]$ für diese n.

Also kann es keine weiteren derartigen Zahlen c geben, außer $c = c_1$ oder $c = c_2$.

Bemerkungen

1) Eine rechnerische Untersuchung zeigt: Es gibt genau 117 natürliche Zahlen n, die $[1{,}62^2 \cdot n] = [1{,}62 \cdot n] + n$ erfüllen, die größte ist 221. Wegen $1{,}62^2 - (1 + 1{,}62) = 0{,}0044$ ist für $n > 1/0{,}0044 \approx 227{,}3$, also $n \geq 228$, die Gleichung nicht erfüllbar (s.o.).
   Warum versagt diese Schlußweise für $222 \leq n \leq 227$?
2) Dieses Problem wird auch in dem lesenswerten Artikel von D. Laugwitz im Jahrbuch Überblicke Mathematik 1975, S. 173-181, angesprochen. Dort wird auch ein Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt aufgezeigt.

hm

Problem **(September 1983)**

Ein Spielfeld besteht aus n Punkten auf einer Kreislinie und all ihren Verbindungsstrecken. Zwei Spieler (Rot, Grün) färben abwechselnd eine der Strecken mit dem Ziel, ein Dreieck aus gleichgefärbten Seiten zu erhalten.
Für n=4 kann das Spiel unentschieden enden. Welches ist das kleinste n, bei dem ein Unentschieden nicht eintreten kann ?

Lösung

Das Unentschieden bei n=4 entsteht, wenn die beiden Diagonalen verschieden gefärbt sind. Auch für n=5 ist ein Unentschieden möglich, z.B. wenn alle "Seiten" des Fünfecks rot und die "Diagonalen" grün gefärbt sind; denn zu einem Dreieck gehört immer eine Sehne von der anderen Art.
Für n=6 kann kein Unentschieden eintreten. Der Beweis erfolgt durch Widerspruch. Angenommen, das Spiel endete mit Unentschieden, d.h. obwohl alle Sehnen eine Färbung erhalten haben, gibt es kein Dreieck mit gleichgefärbten Seiten. A sei nun einer der 6 Punkte. Von ihm gehen 5 Strecken aus, mindestens 3 davon sind gleich gefärbt, z. B. rot. Die anderen Endpunkte dieser 3 roten Strecken seien B, C, D. Nach Annahme kann das Dreieck BCD nicht 3 gleichgefärbte Seiten haben, mindestens eine von ihnen ist rot, z. B. $\overline{BC}$. Dann hätte aber des Dreieck ABC nur rote Seiten und das Spiel wäre entgegen der Annahme entschieden, q.e.d.

Bemerkung

Wenn man auch Schnittpunkte in Innern des Kreises als Eckpunkte eines Dreiecks zuläßt, so kann es bereits für n=5 kein Unentschieden geben. Denn angenommen, alle Strecken wären gefärbt und das Spiel nicht entschieden. Dann müßten unter den 5 inneren Sehnen (Diagonalen) mindestens 3 gleich gefärbt sein, z. B. rot. Je 3 Diagonalen im Fünfeck begrenzen aber ein Dreieck, in diesem Falle ein rotes, im Widerspruch zur Annahme.

ks

Problem (Oktober 1983)

Beweise die Ungleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \quad ,$$

wobei die n reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Bedingungen $0 \leq a_i - a_{i-1} \leq 1$ für $i = 1, \ldots, n$ $(a_0=0)$ erfüllen.
Wann gilt sogar das Gleichheitszeichen ?

Lösung

Aus $a_0=0$ und $0 \leq a_i - a_{i-1} \leq 1$ für $i = 1, \ldots, n$ folgt zunächst, daß alle a_i nichtnegativ sind, und weiter

$$0 \leq (a_i + a_{i-1})(a_i - a_{i-1}) = a_i^2 - a_{i-1}^2 \leq a_i + a_{i-1} \quad , \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

Summieren wir die letzte Ungleichung für $i = 1, \ldots, k$ mit $k \leq n$ auf, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i^2 - a_{i-1}^2) = a_k^2 \leq \sum_{i=1}^{k}(a_i + a_{i-1}) = 2\cdot\sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_k \ .$$

Multiplikation mit $a_k \geq 0$ liefert

$$a_k^3 \leq a_k^2 + 2\cdot a_k\cdot\sum_{i=1}^{k-1} a_i = \left(a_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i\right)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i\right)^2 \ .$$

Somit ist für alle $k = 1, 2, \ldots, n$ die Ungleichung

$$a_k^3 \leq \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i\right)^2$$

richtig.
Summieren wir nun alle diese Ungleichungen auf, so folgt, wie gewünscht,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \ .$$

Wann gilt hier das Gleichheitszeichen ? Aus dem obigen Beweis wird deutlich, daß es genau dann gilt, wenn für alle $i = 1, ..., n$

$$(a_i - a_{i-1})(a_i + a_{i-1}) = a_i + a_{i-1}$$

erfüllt ist, d.h. falls

$$a_i - a_{i-1} = 0 \qquad \text{oder} \qquad a_i - a_{i-1} = 1$$

ist. Sei nun $k \in \{0, ...,n\}$ so gewählt, daß $a_0 = a_1 = ... = a_k = 0$ und $a_{k+1} > 0$ gilt.
Dann folgt aus der Gleichheit $a_{k+1} = 1$ und weiter aus

$$(a_{k+2} + a_{k+1})(a_{k+2} - a_{k+1}) = (a_{k+2} + 1)(a_{k+2} - 1) = a_{k+2} + 1 :$$

$$a_{k+2} - 1 = 1 \text{ , also } a_{k+2} = 2 \text{ , da } a_{k+2} + 1 \geqslant 1 > 0 \text{ ist.}$$

Ähnlich schließt man bei $a_{k+3}, a_{k+4}, ...$.

Insgesamt ergibt sich bei Gleichheit die Existenz einer Zahl $k \in \{0, ...,n\}$ mit

$$a_0 = a_1 = ... = a_k = 0 \text{ , } a_{k+1} = 1 \text{ , } a_{k+2} = 2 \text{ , ... , } a_n = n-k \text{ .}$$

Umgekehrt erfüllen solche Folgen $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ die Gleichheit, wie man unter Benutzung der bekannten Formel

$$\sum_{i=1}^{m} i^3 = (\sum_{i=1}^{m} i)^2$$

sofort nachweist.

Bemerkungen

1. Wesentlich kürzer geht es, wenn man die Identität

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{i} (a_j + a_{j-1})[1 - (a_j - a_{j-1})]$$

mit $a_0 = 0$ und beliebigen a_i benutzt.

2. Es gilt auch eine analoge Formel für Integrale statt für Summen, vgl. Z.A. MELZAK, Mathematical Ideas, Modelling and Applications II, J.Wiley & Sons (1976), p.70ff. :

$$(\int_0^b f(x)\,dx)^2 \geqslant \int_0^b f^3(x)\,dx \text{ , falls } 0 \leq f'(x) \leq 1 \text{ für } x \in]0,b[\text{ , } f(0) = 0 \text{ ,}$$

hm

Problem **(November 1983)**

Wann kann man zu zwei ineinanderliegenden Kreisen $K(O;R)$ und $K'(O';r)$ ein Dreieck so zeichnen, daß K der Umkreis und K' der Inkreis ist ?
Leonhard Euler (1707-1783) hat dieses Problem gelöst und dafür folgendes Kriterium gefunden:

$$d^2 = R^2 - 2\cdot R\cdot r \quad \text{mit} \quad d := |OO'| \;.$$

Versuche, einen Beweis zu finden.

Lösung (vgl. nebenstehende Zeichnung)

A sei irgendein Punkt auf K; von ihm aus seien die beiden Tangenten AB und AC an K' gezeichnet. K' ist Inkreis von ΔABC genau dann, wenn γ durch O'C halbiert wird, d.h. genau dann, wenn

$$\sphericalangle CO'A = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \qquad \text{gilt.}$$

D sei der Schnittpunkt von AO' mit K. Dann gilt

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\alpha \quad \text{(Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen } \widehat{BD}\text{).}$$

Die Inkreiseigenschaft von K' ist genau dann erfüllt, wenn

$$\sphericalangle DO'C = \sphericalangle DCO' = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$$

gilt, mithin genau dann, wenn das Dreieck $\Delta CO'D$ gleichschenklig ist:

$$|DO'| = |DC| \;.$$

Nach dem Sehnensatz, angewandt auf K und die beiden Sehnen durch O' gilt :

$$|O'A| \cdot |O'D| = (R + d)\cdot(R - d)$$

$$\Leftrightarrow \quad |O'A| \cdot |CD| = (R + d)\cdot(R - d) \qquad (*)$$

Für das Produkt $|O'A|\cdot|CD|$ läßt sich aus der Ähnlichkeit zweier Dreiecke ein Zusammenhang mit r, R herleiten.
E sei der Schnittpunkt von DO mit K und F der Fußpunkt des Lotes von O' auf AC. Dann sind die beiden Dreiecke $\Delta O'FA$ und ΔDCE ähnlich (rechtwinklig und gleicher Peripheriewinkel bei A und E):

$$\frac{|O'A|}{r} = \frac{2R}{|CD|} \Leftrightarrow |O'A| \cdot |CD| = 2\cdot R\cdot r \;.$$

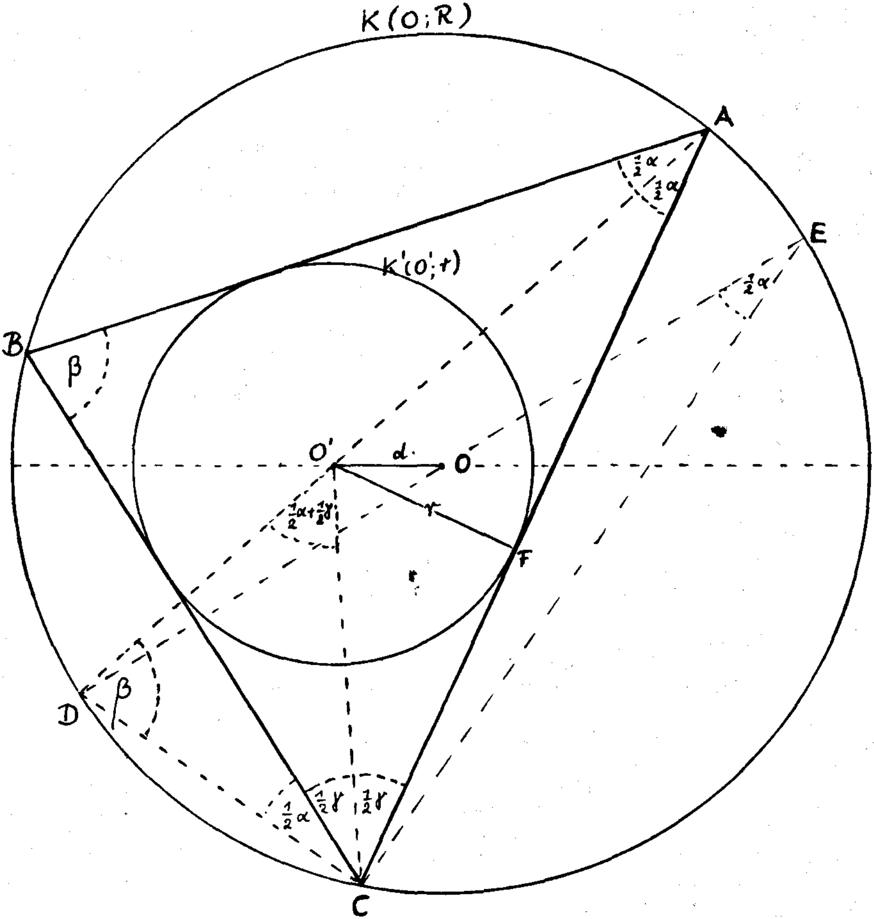
Damit nimmt die Gleichung (*) folgende Form an:

$$2\cdot R\cdot r = R^2 - d^2 \qquad \text{oder} \qquad R^2 - 2\cdot R\cdot r = d^2 \;, \qquad \text{q.e.d.}$$

Bemerkung

Die Eulersche Bedingung nimmt keinen Bezug zu dem anfangs gewählten Punkt A. Sie beschreibt nur die relative Lage der beiden Kreise zueinander. Daraus folgt zugleich: Wenn es ein geeignetes Dreieck gibt, dann bei jeder Wahl des Ausgangspunktes A; wenn es überhaupt ein Dreieck gibt, dann beliebig viele. Die möglichen Dreiecke sind i.a. nicht ähnlich zueinander.

ks


K(O;R)
A
B
C
D
E
F
K'(O';r)
O'
O
d
r
β
β
½α
½α
½α
½α
½α+½γ
½γ
½γ

Problem **(Dezember 1983)**

Warum gibt es unter je zehn aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets eine, die relativ prim zu allen anderen ist ?
(Zwei Zahlen heißen relativ prim zueinander, wenn 1 der einzige gemeinsame Teiler ist.)

Lösung

Unter zehn aufeinanderfolgenden Zahlen kommen genau fünf ungerade Zahlen vor, darunter genau eine, die durch 5 teilbar ist. Es bleiben also vier ungerade und nicht durch 5 teilbare Zahlen übrig. Da es darunter nur eine geben kann, die durch 7 teilbar ist und höchstens zwei, die durch 3 teilbar sind, bleibt mindestens eine Zahl z übrig, die weder durch 2, 3, 5 oder 7 teilbar ist.
z ist eine Zahl mit der gewünschten Eigenschaft, denn ein gemeinsamer Teiler d von z mit einer der anderen neun Zahlen ist kleiner als 10. Aufgrund der Eigenschaften von z muß $d = 1$ sein.

Bemerkungen

1. Es ist eine interessante Frage, die gleiche Aufgabe für andere Anzahlen als zehn zu untersuchen, z.B. für 2, 3, 4, 5, ..., 12.
2. Eine andere Möglichkeit, diese Aufgabe zu lösen, besteht darin, daß man (etwa mit Hilfe eines Computers) die maximale Lücke zwischen zwei zu einer festen Zahl N relativ primen Zahlen berechnet, z.B.

   $N = 2 \cdot 3 = 6$. Die Folge der zu 6 relativ primen Zahlen ist periodisch mit der Periode 6 und beginnt mit 1, 5, 7, 11, 13, ... Die größte Lücke ist also 4, so daß stets bei vier aufeinanderfolgenden Zahlen eine darunter ist, die zu 6 und damit auch zu den drei übrigen Zahlen relativ prim ist.

   $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Die Folge der zu 30 relativ primen Zahlen beginnt 1, 7, 11, 13, 17, ... , die maximale Lücke ist 6, so daß je sechs aufeinanderfolgende Zahlen stets eine Zahl enthalten, die zu 30 und damit zu den fünf übrigen Zahlen relativ prim ist. Ganz ähnlich funktioniert der Schluß bei

   $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Hier ist die maximale Lücke 10, so daß wir somit einen weiteren Beweis des Ausgangsproblems erhalten.

   Leider versagt dieser Schluß bei $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$. Hier ist die maximale Lücke nicht 12 (wie man sie zwischen 1 und 13 vermuten würde), sondern ≥ 14, denn z.B. sind die Zahlen von 114 bis 126 alle nicht zu 2310 relativ prim. Aber trotzdem ist die Aussage, daß sich unter zwölf aufeinanderfolgenden Zahlen stets eine befindet, die zu den übrigen Zahlen relativ prim ist, richtig. Wie muß man hier schließen ?
3. Man soll nicht dem Irrglauben verfallen, daß sich unter zehn oder zwölf oder allgemeiner n aufeinanderfolgenden Zahlen stets eine Primzahl befindet. Man erkennt sofort, daß die Folge der Primzahlen beliebig lange Lücken aufweist, indem man die Zahlen

   $$n! + 2 \, , \, n! + 3 \, , \dots , \, n! + n \qquad , \quad n > 1$$

   studiert, die sämtlich zusammengestzt, also nicht prim sind.

hm

Problem **(Januar 1984)**

In der Sprache "Analpha" dürfen Wörter nur nach folgenden Regeln gebildet sein:

1) Jedes Wort besteht nur aus den Buchstaben A und B;
2) An jedes Wort darf dasselbe Wort angehängt werden, wobei BB wegzulassen und AAA durch B zu ersetzen ist;
3) An jedes mit A endende Wort darf ein B angehängt werden.

Gehören mit BAB auch ABABA und BABAB zum analphischen Wortschatz ?

Lösung

Das einzige in der Sprache "Analpha" existierende Wort ist zunächst BAB.

Verdoppelung liefert daraus	BABBAB,
Weglassen von BB liefert daraus	BAAB,
Verdoppelung liefert daraus	BAABBAAB,
Weglassen von BB liefert daraus	BAAAAB,
Ersetzen von AAA durch B liefert daraus	BBAB oder BABB,
Weglassen von BB liefert daraus	AB oder BA,
Verdoppelung liefert daraus	ABAB oder BABA.

Hängt man an das letzte Wort noch ein B an, so ergibt sich BABAB. Dagegen ist es nicht möglich, das Wort ABABA zu konstruieren, denn es verstößt gegen folgende

Regel: Die Anzahl a der A's in einem Wort ist niemals durch 3 teilbar.

Diese Regel ist richtig für das Ausgangswort BAB. Wir müssen nun prüfen, ob diese Regel bei allen erlaubten Veränderungen erhalten bleibt.
Bei der Verdoppelung ist dies klar, denn wegen der Teilerfremdheit von 2 und 3 ist $2a$ durch 3 genau dann teilbar, wenn es a ist.
Das Weglassen von BB und das Anhängen von B verändert die Anzahl der A's in einem Wort nicht.
Das Ersetzen von AAA durch B vermindert die Anzahl der A's exakt um 3, aber a ist genau dann durch 3 teilbar, wenn es $a-3$ ist.
Damit ist nachgewiesen, daß die obige Regel bei allen erlaubten Manipulationen erhalten bleibt und daher allgemein gültig ist.

Bemerkungen

1. Offen bleibt die Frage, ob jede Kombination von A's und B's , die die Regel über die Anzahl der A's erfüllt, auch wirklich in der Sprache "Analpha" vorkommt.
2. Ähnliche Probleme werden in dem höchst lesenswerten Buch von D.R. Hofstadter, "Gödel, Escher, Bach", Klett-Cotta 1985, behandelt.

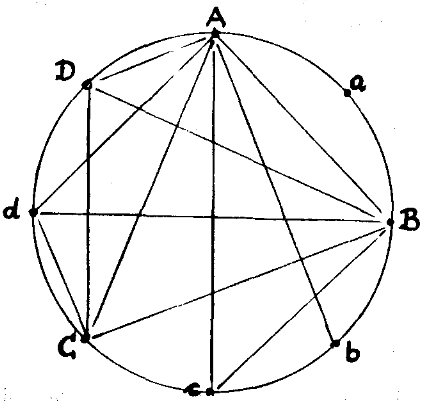
hm

Problem (Februar/März 1984)

Frank und Ute treffen sich mit 3 anderen Ehepaaren zum Schachspielen. In einer Pause stellt Frank fest, daß die übrigen Teilnehmer lauter verschiedene Anzahlen von Spielen beendet haben.
Wieviele Partien hat Ute gespielt, wenn keiner gegen seinen Ehepartner und auch keiner mehrfach gegen denselben Gegner gespielt hat ?

Lösung

Die vier Ehepaare seien mit Aa, Bb, Cc, Dd bezeichnet. Unter den angegebenen Bedingungen ist 6 die höchste Anzahl von Spielen, die eine Person machen kann. Da es außer Frank noch sieben Teilnehmer gibt und jeder eine verschiedene Anzahl von Spielen gemacht hat, müssen alle sieben Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 vorkommen.



Ohne Einschränkung der Allgemeinheit möge A sechs Spiele gemacht haben, dann muß a noch nicht gespielt haben (alle anderen haben ja mindestens einmal gespielt, nämlich mit A). B möge fünfmal gespielt haben, dann kommt für 1 Spiel nur b in Frage. C möge vier Spiele gemacht haben, dann muß c zweimal gespielt haben und für D und d bleiben je drei Spiele. D, d sind dann Frank und Ute, weil anderenfalls Frank zwei Spieler mit gleicher Spielanzahl gesehen hätte.

Ute hat also genau 3 Spiele beendet.

ks

Problem **(April 1984)**

Gibt es in der Ebene ein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte nur ganzzahlige Koordinaten haben ?
Ist ein entsprechendes Problem im Raume lösbar ?

Lösung

Ein Dreieck in der Ebene mit lauter Gitterpunkten (d.s. Punkte mit ganzzahliger x- und y-Koordinate) als Eckpunkte läßt sich in ein achsenparalleles Rechteck so einpassen, daß die Eckpunkte auf dem Rand liegen. Damit wird das Rechteck in das Ausgangsdreieck und in bis zu drei weitere rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Das Doppelte ihrer Flächeninhalte ist jeweils ganzzahlig. Der Inhalt der Rechtecksfläche ist selbst ganzzahlig. Daraus folgt, daß der verdoppelte Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks eine ganze Zahl ist. (Übrigens folgt dies sofort aus der Determinantenformel für den Flächeninhalt.)
Der verdoppelte Flächeninhalt 2A eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge s ist $(\sqrt{3}/2)\cdot s^2$. Hätte dieses gleichseitige Dreieck lauter Gitterpunkte als Ecken, so wäre s^2 nach dem Satz von Pythagoras ganzzahlig, und 2A dann irrational. Andererseits ist 2A stets ganz, also rational. Damit erhalten wir einen Widerspruch und haben daher gezeigt:
In der Ebene gibt es kein gleichseitiges Dreieck mit lauter Gitterpunkten als Ecken.

Wir wollen noch eine weitere (und allgemeinere) Lösung anfügen. Es gilt nämlich: Drei Gitterpunkte bilden niemals einen Winkel von 60°. Nehmen wir an, es gäbe drei Gitterpunkte P, O, Q so, daß $\sphericalangle POQ =: \alpha = 60°$ wäre.
Wir legen ohne Einschränkung O in den Nullpunkt und tragen in O die x- und y-Achse ein. Weiter betrachten wir nur den Fall, daß die Punkte P und Q im 1.Quadranten liegen, denn die anderen Fälle lassen sich analog erledigen. Es sei β der Winkel zwischen OQ und der x-Achse, und γ der zwischen OP und der y-Achse. Dann gilt $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, also $\beta + \gamma = 30°$, und $\tan\beta$, $\tan\gamma$ sind rational. Wegen

$$\tan(\beta+\gamma) = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma} = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

erhalten wir einen Widerspruch, da

$$\frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma} \text{ rational, aber } \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ irrational ist.}$$

Weil also drei Gitterpunkte niemals einen Winkel von 60° einschließen können, kann es auch nicht ein gleichseitiges Dreieck aus Gitterpunkten geben.

Im Raum $\mathbb{R}^3$ gibt es sehr wohl gleichseitige Dreiecke mit Eckpunkten, die ganzzahlige x-, y- und z-Koordinaten haben, z.B. (0,0,0) , (1,1,0) , (1,0,1).

Bemerkungen

1. Ähnliche Probleme ergeben sich, wenn man etwa im Raum (regelmäßige) Tetraeder, Oktaeder usw. mit ganzzahligen Eckpunkten sucht.
2. Welche Winkel können zwischen Gitterpunkten in der Ebene angenommen werden?

hm

Problem **(Mai 1984)**

Unter 12 Kugeln weicht genau eine im Gewicht ab.
Wie kann man mit höchstens 3 Wägungen auf einer Balkenwaage feststellen, um welche Kugel es sich handelt, und ob diese leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist ?

Lösung

Bei der ersten Wägung lege man auf jede Seite vier Kugeln. Es gibt nun drei Möglichkeiten, die wir nacheinander diskutieren werden :

Fall (G):	Waage bleibt im Gleichgewicht	oder
Fall (LS):	linke Seite senkt sich	oder
Fall (RS):	rechte Seite senkt sich.	

Fall (G). Wir wissen nun, daß die acht gewogenen Kugeln alle normalgewichtig sind. Die Ausnahmekugel befindet sich also unter den restlichen vier, für die noch zwei Wägungen zur Verfügung stehen.
Jetzt legen wir links drei normale Kugeln und rechts drei der noch zu prüfenden auf die Waage. Bleibt die Waage im Gleichgewicht, so ist die letzte, noch nicht geprüfte Kugel die gesuchte. Und mit der dritten Wägung läßt sich auch feststellen, ob sie zu leicht oder zu schwer ist. Damit ist der Gleichgewichtsfall in der 2.Wägung erledigt. Bleibt nun die Waage nicht im Gleichgewicht, so wissen wir, ob die Ausnahmekugel zu schwer oder zu leicht ist und daß sie unter den drei Kugeln vorkommt, die mit den normalen gewogen wurden. Wägen wir nun zwei der verdächtigen Kugeln gegeneinander, so läßt sich in jedem Falle die Ausnahmekugel ermitteln. Damit ist die Aufgabe im Falle (G) vollständig gelöst.

Fall (LS), (RS). Diese sind symmetrisch, so daß es ausreicht, etwa den Fall (LS) zu betrachten. Die zwölf Kugeln zerfallen in drei Klassen zu je vier Kugeln, nämlich

Klasse N :	Das sind die vier nichtgewogenen und daher normalgewichtigen Kugeln;
Klasse NS :	Das sind die vier Kugeln der linken Seite, die entweder normalgewichtig oder zu schwer sind;
Klasse NL :	Das sind die vier Kugeln der rechten Seite, die entweder normalgewichtig oder zu leicht sind.

In der zweiten Wägung legen wir auf die linke Seite drei Kugeln, je eine aus jeder Klasse, auf die rechte Seite zwei aus NS und eine aus NL, also

N, NS, NL und NS, NS, NL .

Wieder können die drei Fälle (G), (LS), (RS) eintreten :

Fall (G). Dann sind alle gewogenen Kugeln normal und die Ausnahmekugel befindet sich unter den beiden Restkugeln aus der Klasse NL oder der einen Restkugel aus NS. Ein Vergleich der beiden Vertreter aus NL bringt die Entscheidung: Bleibt die Waage gleich, so ist es die Restkugel aus NS, die zu schwer ist; neigt sich die Waage, so ist es die leichtere der beiden. Damit ist der Fall (G) abgeschlossen.

Fall (LS). Da sich die linke Seite nach unten geneigt hat, ist die linksseitige Kugel aus NL normalgewichtig, und aus dem gleichen Grunde auch die beiden NS-Kugeln der rechten Seite. Die Ausnahmekugel kann sich daher nur unter der NS-Kugel der linken oder der NL-Kugel der rechten Seite befinden. Ein Vergleich einer dieser Kugeln mit einer N-Kugel bringt in der letzten Wägung Klarheit: Bei Gleichheit ist es die andere, bei Ungleichheit der Waage ist es die nichtnormale Kugel.
Übrig bleibt der

Fall (RS). Hierbei kann die Ausnahmekugel nur unter den beiden NS-Kugeln der rechten oder der NL-Kugel der linken Seite vorkommen. Ein direkter Vergleich der beiden NS-Kugeln liefert wieder die Entscheidung: Bleibt die Waage im Gleichgewicht, so ist es die NL-Kugel, die zu leicht ist, senkt sich die Waage, so ist es die nach unten gesunkene NS-Kugel.
Damit ist in jeder denkbaren Möglichkeit mit drei Wägungen die Ausnahmekugel gefunden und gleichzeitig festgestellt, in welcher Weise ihr Gewicht abweicht.

Bemerkungen

1. Man kann sich überlegen, daß bei mehr als zwölf Kugeln drei Wägungen nicht ausreichen. Allgemein gilt (vgl. C.A.B. Smith, Math. Gaz. 31 (1947), p.31-39, The Counterfeit Coin Problem), daß man mit n Wägungen unter höchstens $(3^n - 3)/2$ Kugeln die Ausnahmekugel und ihre Abweichung ermitteln kann.
2. Wie ist die Situation, wenn zwei oder mehrere Ausnahmekugeln vorliegen?

hm

Problem **(Juni 1984)**

Wie groß ist die Summe aller Ziffern der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 10^n-1$?

1. Lösung

s_n sei die gesuchte Ziffernsumme, also

$$s_1 = \sum_{k=1}^{9} k = \frac{9\cdot 10}{2} = 45 .$$

Für $n=2$ kommen die gleichen Ziffern wie für $n=1$ in jedem Zehner vor, ihre Ziffernsumme ist also $10\cdot 45$. Jede Zehnerziffer kommt aber auch zehnmal vor, ihre Ziffernsumme ist ebenfalls $10\cdot 45$, folglich

$$s_2 = 10\cdot 45 + 10\cdot 45 = 2\cdot 45\cdot 10 .$$

Analog ergibt sich

$$s_3 = 100\cdot 45 + 100\cdot 45 + 100\cdot 45 = 3\cdot 45\cdot 10^2$$

und allgemein

$$s_n = 10^{n-1}\cdot 45 + 10^{n-1}\cdot 45 + \ldots + 10^{n-1}\cdot 45 = n\cdot 45\cdot 10^{n-1} ,$$

also $s_n = n \cdot 45 \cdot 10^{n-1}$.

2. Lösung

Die letzte Zahl hat n Neunen als Ziffern, ihre Ziffernsumme (Quersumme) ist $n\cdot 9$. Zweckmäßigerweise ergänzt man die gegebenen Zahlen noch durch die Null; dadurch wird die Ziffernsumme s_n nicht verändert. Addiert man nun

die 0 zu 10^n-1, die 1 zu 10^n-2, die 2 zu 10^n-3 usw. ,

so hat jede Summe die gleiche Ziffernsumme $n\cdot 9$. Es sind 10^n Zahlen, also $\frac{1}{2}\cdot 10^n$ Summen.

Die Ziffernsumme s_n beträgt daher $\frac{1}{2}\cdot n\cdot 9\cdot 10^n$.

Der Zusammenhang mit dem vorher gewonnenen Ergebnis $n\cdot 45\cdot 10^{n-1}$ ergibt sich folgendermaßen :

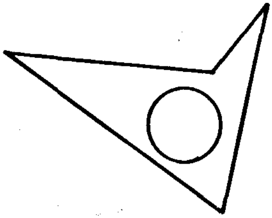
$$n\cdot 45\cdot 10^{n-1} = n\cdot 9\cdot \frac{5\cdot 2}{2}\cdot 10^{n-1} = \frac{1}{2}\cdot n\cdot 9\cdot 10^n .$$

Bemerkung

Dieselben Schlußweisen lassen sich anwenden, wenn man statt der dekadischen eine beliebige g-adische Darstellung benutzt.

ks

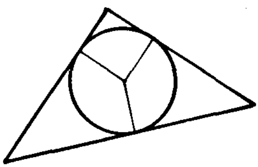
Problem **(August 1984)**



In der Ebene ist ein Viereck mit dem Flächeninhalt A und dem Umfang U gegeben.
Warum gibt es in seinem Innern stets einen Kreis, dessen Radius r größer als $\frac{A}{U}$ ist ?

Lösung

Wir führen das Problem auf ein Dreieck zurück.
Dazu verbinden wir in dem Viereck zwei Eckpunkte so, daß das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt wird. Wir betrachten nun dasjenige Dreieck mit dem größeren Flächeninhalt a und dem Umfang u. Dann ist $2a \geq A$ und $u < U$.



In jedem Dreieck gilt offensichtlich (s. Skizze) :

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{\text{Umfang} \cdot \text{Inkreisradius}}{2} ,$$

also

$$\text{Inkreisradius} = \frac{2 \cdot \text{Flächeninhalt}}{\text{Umfang}} .$$

Der Inkreis des oben gewählten Teildreiecks liegt zugleich im Innern des Vierecks, und für seinen Radius r gilt :

$$r = \frac{2a}{u} > \frac{A}{U} .$$

Damit ist ein Kreis mit der geforderten Eigenschaft gefunden.

Bemerkungen

1. Läßt sich die obige Ungleichung dadurch verschärfen, daß man auf der rechten Seite noch einen konstanten Faktor $c > 1$ einfügen kann ? (Man betrachte etwa die Situation in einem Rechteck.)
2. Die Behauptung gilt für beliebige n-Ecke, $n \geq 3$. Beweis ?
3. Wie ist die analoge Situation im Raum ?

hm

Problem (September 1984)

Für welche natürlichen Exponenten n ist die Summe

$$\left(15\tfrac{1}{2}\right)^n + \left(16\tfrac{1}{2}\right)^n$$

ebenfalls eine natürliche Zahl ?

1. Lösung

Durch Nachrechnen erhält man zunächst folgende Tabelle :

n	$\left(15\tfrac{1}{2}\right)^n + \left(16\tfrac{1}{2}\right)^n$
0	2
1	32
2	$512\tfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$
3	8216
4	$131840\tfrac{1}{8} \notin \mathbb{N}$
5	2117642
6	$3406432\tfrac{1}{32} \notin \mathbb{N}$
7	$547898883\tfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

$$\left(15\tfrac{1}{2}\right)^n + \left(16\tfrac{1}{2}\right)^n = \left(16 - \tfrac{1}{2}\right)^n + \left(16 + \tfrac{1}{2}\right)^n$$

$$= 16^n - \binom{n}{1}\cdot 16^{n-1}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right) + \binom{n}{2}\cdot 16^{n-2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \ldots + (-1)^n\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n +$$

$$+ 16^n + \binom{n}{1}\cdot 16^{n-1}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right) + \binom{n}{2}\cdot 16^{n-2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n -$$

(nach dem binomischen Lehrsatz)

Es werden nun die beiden Fälle A : n gerade, B : n ungerade unterschieden.

A) n gerade

$$\left(15\tfrac{1}{2}\right)^n + \left(16\tfrac{1}{2}\right)^n = 2\cdot\left(16^n + \binom{n}{2}\cdot 16^{n-2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= \frac{2}{2^{n-2}}\cdot\left(\text{natürliche Zahl} + \frac{1}{4}\right)$$

Die gesuchte Summe ist also für $n > 0$ keine natürliche Zahl.

B) n ungerade

$$(15\tfrac{1}{2})^n + (16\tfrac{1}{2})^n = 2\cdot(16^n + \ldots + \binom{n}{n-3}\cdot 16^3\cdot\frac{1}{2^{n-3}} + n\cdot 16^1\cdot\frac{1}{2^{n-1}})$$

$$= \frac{16}{2^{n-3}}\cdot(\text{ natürliche Zahl } + \frac{1}{2})$$

Die gesuchte Summe ist genau dann eine natürliche Zahl, wenn

$$\frac{16}{2^{n-3}} \geqslant 2 \quad , \quad \text{also} \quad 3 \geqslant n-3 \quad \text{gilt ;}$$

das trifft zu für die ungeraden Zahlen 1, 3 und 5 .

2. Lösung

Es gilt

$$(15\tfrac{1}{2})^n + (16\tfrac{1}{2})^n = (\frac{31}{2})^n + (\frac{33}{2})^n = (\frac{32-1}{2})^n + (\frac{32+1}{2})^n$$

Untersucht man die Zählersumme modulo 128 und berücksichtigt dabei, daß bei der Binomialentwicklung der Klammern fast alle Potenzen von 32 kongruent 0 modulo 128 sind, so ergibt sich modulo 128

$$(32-1)^n + (32+1)^n \equiv 32^1\cdot(-1)^{n-1} + (-1)^n + 32^1\cdot 1^{n-1} + 1^n$$

$$\equiv \begin{cases} 32 - 1 + 32 + 1 \equiv 64 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ -32 + 1 + 32 + 1 \equiv 2 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Da für gerade n (mit $n > 0$) der Nenner 2^n mindestens 4 ist, läßt sich ein Faktor 2 nicht wegkürzen.
Für ungerade n läßt sich höchstens 2^5 wegkürzen. Daher ist nur für die in der Tabelle aufgeführten Exponenten 0, 1, 3 und 5 die Summe

$$(15\tfrac{1}{2})^n + (16\tfrac{1}{2})^n$$

eine natürliche Zahl.

Bemerkung

In ähnlicher Weise lassen sich

$$(7\tfrac{1}{2})^n + (8\tfrac{1}{2})^n \quad \text{und} \quad (31\tfrac{1}{2})^n + (32\tfrac{1}{2})^n$$

untersuchen, ebenso

$$(2^n - \frac{1}{2^m}) + (2^n + \frac{1}{2^m}) \quad .$$

ks

Problem (Oktober 1984)

In einem Tennisturnier mit n Teilnehmern spielt jeder gegen jeden genau einmal. Bezeichnet für den r-ten Spieler S_r bzw. N_r die Anzahl seiner Siege bzw. Niederlagen, so gilt stets :

$$\sum_{r=1}^{n} S_r^2 = \sum_{r=1}^{n} N_r^2 \quad .$$

Lösung

Für jedes $r = 1, \ldots, n$ gilt $\quad S_r + N_r = n-1 \quad ,$
da der r-te Spieler nach Voraussetzung gegen jeden der $(n-1)$ übrigen Spieler genau einmal gespielt hat. Weil jeder Sieg eines Spielers gleichzeitig auch als Niederlage seines Gegners gezählt wird, ist die Gesamtzahl aller Siege gleich der Gesamtzahl aller Niederlagen, d.h.

$$\sum_{r=1}^{n} S_r = \sum_{r=1}^{n} N_r \quad .$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n} S_r^2 - \sum_{r=1}^{n} N_r^2 &= \sum_{r=1}^{n} (S_r^2 - N_r^2) \\
&= \sum_{r=1}^{n} (S_r - N_r)\cdot(S_r + N_r) \\
&= (n - 1) \cdot \sum_{r=1}^{n} (S_r - N_r) \\
&= (n - 1) \cdot \left(\sum_{r=1}^{n} S_r - \sum_{r=1}^{n} N_r \right) \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Bemerkung

Es gilt $\quad \sum_{r=1}^{n} S_r^k = \sum_{r=1}^{n} N_r^k \quad$ **für** $k = 0, 1, 2$.

Gilt diese Gleichung auch für größere k ?

hm

Problem **(November 1984)**

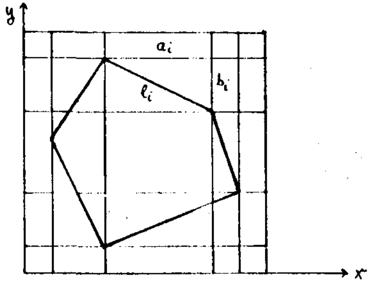
Für jedes konvexe n-Eck, das im Innern eines Einheitsquadrates liegt, gilt

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^2 < 4 \quad .$$

Dabei bezeichnen $l_1, l_2, \dots, l_n$ die Seitenlängen des n-Ecks.

Lösung

Durch jeden der n Eckpunkte ziehen wir Parallelen zur x- und zur y-Achse, die das Einheitsquadrat in lauter Rechtecke zerlegen.



Über jeder Seite des n-Ecks wird dadurch nach außen ein rechtwinkliges Dreieck mit der Seite als Hypothenuse l_i und den Katheten a_i in x-Richtung bzw. b_i in y-Richtung gebildet, $i = 1, \dots, n$. Die Kathetenstücke überschneiden sich wegen der Konvexität nicht und ergeben, in x- bzw. in y-Richtung aufaddiert, jeweils eine Länge 2, d.h.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < 2 \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i < 2 \; .$$

Nach dem Satz des Pythagoras ist

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + b_i^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$< \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = 2 + 2 = 4 \; ,$$

denn wegen $0 < a_i < 1$ und $0 < b_i < 1$ ist $a_i^2 < a_i$ und $b_i^2 < b_i$.

Bemerkungen

1. Offensichtlich läßt sich diese Ungleichung nicht verschärfen, denn bereits mit einem Dreieck läßt sich die 4 beliebig nahe von unten annähern.
2. Gilt eine ähnliche Beziehung im Raum ?

hm

Problem **(Dezember 1984)**

Bestimme alle natürlichen Zahlen k, für die sowohl 2^k+1 als auch $2^{k+1}+1$ prim sind.

Lösung

Eine Untersuchung der Zahlenfolge für $k=0$ bis 10 führt sehr bald auf eine Vermutung.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^k+1	2	3	5	9	17	33	65	129	257	513	1025
$2^{k+1}+1$	3	5	9	17	33	65	129	257	513	1025	2049

Von den beiden Zahlen 2^k+1 und $2^{k+1}+1$ ist stets nur eine durch 3 teilbar, und dann kann nur für $k=0$ und $k=1$ ein Primzahlpaar auftreten.

Beweis: 2^k ist nicht durch 3 teilbar, muß also in einer der Restklassen $\pm 1 \bmod 3$ liegen.
Modulo 3 ergibt sich dann :

1. Fall (k gerade) : $2^k \equiv 1$

$$\Rightarrow 2^{k+1} + 1 \equiv 2 \cdot 2^k + 1 \equiv 2 \cdot 1 + 1 \equiv 0$$

Die zweite Zahl ist also durch 3 teilbar und nur für $k = 0$ eine Primzahl.

2. Fall (k ungerade): $2^k \equiv -1$

$$2^k + 1 \equiv -1 + 1 \equiv 0$$

Die erste Zahl ist also durch 3 teilbar und nur für $k = 1$ eine Primzahl.

ks

Problem **(Januar 1985)**

Jeder Punkt der Ebene sei entweder rot oder grün gefärbt. Zeige :
Zu mindestens einer der beiden Farben gibt es Punkte mit jedem beliebig vorgegebenen Abstand.

Lösung

Fall 1 : Alle Punkte sind gleich gefärbt; dann ist die Aussage trivial.

Fall 2 : Von beiden Farben gibt es mindestens je einen Punkt.
Beweis durch Widerspruch. Angenommen, es gäbe für die beiden Farben je eine Zahl r bzw. g , die nicht als Entfernung zweier roter bzw. zweier grüner Punkte auftritt. Dabei sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $r \leq g$. G sei ein grüner Punkt. Auf dem Kreis K um G mit dem Radius g können dann nur rote Punkte liegen. R sei ein roter Punkt auf K. Der Kreis K' um R mit dem Radius r enthält nach Annahme keine roten, also nur grüne Punkte. Andererseits schneiden sich wegen $r \leq g$ die beiden Kreise und die Schnittpunkte müßten beide Farben zugleich haben, q.e.a.

Bemerkungen

1. Bei dem Widerspruchsbeweis muß man sorgfältig auf die Negation der behaupteten Aussage achten.
2. Vergleiche auch das Problem vom April 1981.
3. Eine räumliche Variante des Problems ist die Aufgabe 4 aus der ersten Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 1985.

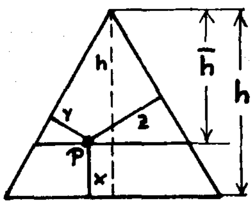
ks

Problem **(Februar 1985)**

Für welchen Punkt eines gleichseitigen Dreiecks ist die Summe der Abstände zu den Seiten am größten und für welchen am kleinsten ?

Lösung I (durch Reduktion auf Spezialfälle)

Die folgende Lösung finden in der Regel die etwas jüngeren Teilnehmer.
Hier - wie bei Lösung II - muß man (zuerst) zu der Vermutung gelangen, daß die Abstandssumme konstant, und dann gleich der im gleichseitigen Dreieck "einzigen" Höhe(nlänge) ist.

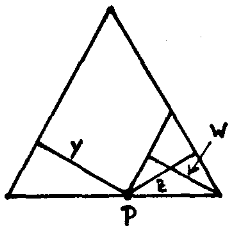


a) Liegt der Punkt P im Innern, so zieht man durch P eine Parallele zur Grundlinie (siehe Skizze). Gilt die Vermutung im abgeschnittenen kleineren gleichseitigen Dreieck, so ist

$$y + z = \bar{h}$$

und damit

$$h = \bar{h} + x = y + z + x .$$



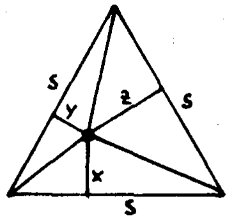
b) Liegt P im Innern einer Seite, so zieht man durch P eine Parallele zu einer der anderen Seiten und schneidet dadurch ein gleichseitiges Dreieck ab. Sind in einem gleichseitigen Dreieck alle Höhen gleichlang, dann gilt

$$z = w$$

und $\bar{h} = w + y = z + y$.

c) Zu zeigen bleibt jetzt nur noch, was fast selbstverständlich ist, nämlich, daß die drei Höhen im gleichseitigen Dreieck gleichlang sind.

Lösung II (mit Flächeninhaltsformeln)



Hier kommt etwas Algebra ins Spiel.
Die Summe der Flächeninhalte der drei Einzeldreiecke in der nebenstehenden Skizze ist

$$S_F = \frac{x \cdot s}{2} + \frac{y \cdot s}{2} + \frac{z \cdot s}{2} = \frac{s}{2} \cdot (x + y + z)$$

Andererseits gilt für den Flächeninhalt des Gesamtdreiecks

$$F = \frac{s \cdot h}{2} \quad .$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$x + y + z = h \quad .$$

Anschlußaufgaben

1) Was gilt, wenn P außerhalb liegt ?
2) Gibt es ein räumliches Analogon ?
3) Gibt es weitere Flächen der Ebene mit "Abstandssummenkonstanz" ?
   Wie ist es z.B. mit den regelmäßigen n-Ecken ?

kk

Problem **(März 1985)**

Setze $a_1 = 5$ und $a_{n+1} = a_n^2$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Zeige, daß in a_n-1 mindestens n verschiedene Primzahlen aufgehen.

Lösung

n	a_n	$a_n - 1$	Primteiler	Zerlegung
1	5	4	2	2^2
2	25	24	2, 3	$2^3\cdot 3$
3	625	624	2, 3, 13	$2^4\cdot 3\cdot 13$
4	390625	390624	2, 3, 13, 313	$2^5\cdot 3\cdot 13\cdot 313$
5	152587890625	152587890624	2,3,13,17,313,11489	$2^6\cdot 3\cdot 13\cdot 17\cdot 313\cdot 11489$

Wie man leicht bestätigt, ist jeder Primfaktor von a_n-1 auch Primfaktor von $a_{n+1}-1$:

$$a_{n+1} - 1 = a_n^2 - 1 = (a_n - 1)\cdot(a_n + 1) .$$

Daraus ergibt sich ein einfacher Induktionsbeweis. Verankerung siehe Tabelle. Es braucht nun nur noch nachgewiesen zu werden, daß in dem zweiten Faktor a_n+1 mindestens ein neuer Primfaktor auftritt.

a_n ist eine Fünferpotenz, daher sind a_n-1 und a_n+1 zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen und ihr g.g.T. somit 2 .

$a_n + 1 = 5^m + 1 \equiv 2 \mod 4$; also ist a_n+1 auch keine reine Zweierpotenz, d.h. a_n+1 muß mindestens einen ungeraden Primteiler p enthalten, der in a_n-1 noch nicht vorkommen kann. p ist dann ein zusätzlicher Primteiler von $a_{n+1}-1$.

Bemerkungen

1. Die im Problem formulierte Aussage beweist zugleich die Unendlichkeit der Primzahlfolge.
2. Variationsmöglichkeit: Änderung der Startzahl bzw. Änderung des Exponenten bei der Rekursion.

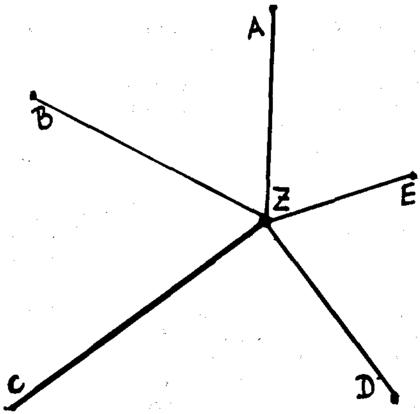
ks

Problem **(April 1985)**

In einem Land seien alle Entfernungen zwischen den Städten verschieden groß. Eines Tages startet in jeder Stadt ein Flugzeug zur nächstbenachbarten Stadt.
Warum können dann in keiner Stadt mehr als 5 Flugzeuge ankommen ?

Lösung

A, B, C, D, E, F ... seien Startpunkte mit dem gleichen Ziel Z, und sie mögen so bezeichnet sein, daß die Strecken $\overline{AZ}$, $\overline{BZ}$, $\overline{CZ}$, $\overline{DZ}$, $\overline{EZ}$, $\overline{FZ}$ ... im Gegenuhrzeigersinn aufeinander folgen. Eine solche Anordnung ist stets möglich: wenn nämlich P ein Startpunkt für Z ist, so liegt niemals ein anderer Startpunkt Q auf der Strecke $\overline{PZ}$, da sonst nicht Z, sondern Q der Zielpunkt für P wäre.
In dem Dreieck $\triangle AZB$ ist nach Voraussetzung $\overline{AB}$ die längste Seite; denn anderenfalls wäre nicht Z der Zielpunkt für A und B. Daher ist auch der Dreieckswinkel $\measuredangle AZB$ größer als die anderen Dreieckswinkel, mithin größer als 60°. Nach der gleichen Überlegung sind auch die Winkel $\measuredangle BZC$, $\measuredangle CZD$, $\measuredangle DZE$ usw. größer als 60°. Für den fünften Startpunkt muß auch noch die Bedingung $\measuredangle EZA > 60°$ erfüllt sein; für einen sechsten Startpunkt reicht die Winkelsumme bei Z nicht aus.



Bemerkungen

1. Was ändert sich, wenn man nicht voraussetzen kann, daß alle Entfernungen verschieden sind ?
2. Welche weiteren Variationen sind möglich ?

ks

Problem **(Mai 1985)**

Andreas denkt sich eine Zahl von 0 bis 15. Bernd soll diese Zahl raten. Er darf aber nur solche Fragen stellen, auf die Andreas mit "ja" oder "nein" antworten kann.
Wie gelingt es Bernd, die Zahl stets mit 7 Fragen zu raten, wenn Andreas bei höchstens einer Antwort lügen darf ?

Lösung

Die zu ratende Zahl denke man sich am einfachsten binär dargestellt. Sie hat dann vier Ziffern und kann mit vier Fragen ermittelt werden, wenn bei den Antworten nicht gelogen werden darf. Da aber Andreas einmal lügen darf, kann Bernd etwa so vorgehen :

Mit den ersten drei Fragen fragt er die ersten drei Ziffern der gesuchten Zahl ab, mit der vierten Frage erkundigt er sich, ob Andreas bisher gelogen hat.
Es bestehen dann folgende drei Möglichkeiten :

Wenn Andreas bei den ersten drei Fragen einmal geschwindelt hat, muß er nun wahrheitsgemäß antworten, also mit "ja".

Hat er bisher stets die Wahrheit gesagt und will er auch jetzt bei der Wahrheit bleiben, so wird er mit "nein" antworten.

Falls Andreas bei den ersten drei Fragen wahrheitsgetreu geantwortet hat, jetzt aber lügen will, wird er mit "ja" antworten.

Aus Bernds Sicht stellt sich also die Situation wie folgt dar :

Lautet die Antwort "nein", so hat Andreas wirklich nicht gelogen. Daher sind die ersten drei Ziffern der Zahl richtig angegeben worden. Mit den verbleibenden drei Fragen kann er die letzte Ziffer bestimmen, indem er sie dreimal abfragt und die mehrheitlich gegebene Antwort als die wahre ermittelt.

Ist nun Andreas' Antwort bei der vierten Frage "ja", so weiß Bernd, daß mit Sicherheit bis dahin einmal gelogen wurde, d.h. alle weiteren Fragen müssen jetzt wahrheitsgemäß beantwortet werden.
Mit der fünften Frage klärt er die vierte Ziffer und mit der sechsten fragt er Andreas, ob er bei den ersten beiden Fragen gelogen hat. Antwortet Andreas mit "ja", so steht die dritte Ziffer fest und mit der siebten und letzten Frage, nämlich ob die erste Ziffer gemäß der zuerst gegebenen Antwort lautet, klärt Bernd die beiden ersten Ziffern vollständig, denn:
bei "ja" ist die erste Ziffer richtig und die zweite falsch angegeben,
bei "nein" ist die zweite Ziffer falsch und die erste richtig.

Antwortet dagegen Andreas bei der sechsten Frage mit "nein", so stimmen die ersten beiden Ziffern mit den ursprünglich gegebenen Angaben überein. Die letzte Frage klärt schließlich die dritte Ziffer.

Bemerkung

Ergänzungsaufgabe:
Angenommen, die Regeln des Spiels werden folgendermaßen verändert: Bernd darf jetzt 8 Fragen stellen, die wieder alle mit "ja" oder "nein" zu beantworten sind, und Andreas darf bis zu zweimal lügen. Bernd gewinnt, wenn er entweder die gedachte Zahl errät oder (ohne Kenntnis der richtigen Zahl) nachweist, daß Andreas zweimal gelogen hat.
Welche Strategie muß Bernd anwenden ?

hm

Problem **(Juni 1985)**

Für welche natürlichen Zahlen a und b gilt

$$a \cdot b \cdot g \cdot k = 176\,400 \qquad \text{und} \qquad g + k = 212\,,$$

wenn g der größte gemeinsame Teiler und k das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b sind ?

1. Lösung

Das Problem ist symmetrisch in a und b .
Schlüssel für die Lösung ist die für je zwei natürliche Zahlen a, b gültige Gleichung $a \cdot b = g \cdot k$.
Dadurch vereinfacht sich das Problem auf die Durchmusterung einer Tabelle.

$$a \cdot b \cdot g \cdot k = 176\,400 \iff (a \cdot b)^2 = 176\,400$$
$$a \cdot b = 420$$

$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

a	b	g	k	g + k
1	420	1	420	421
2	210	2	210	212
3	140	1	420	421
4	105	1	420	421
5	84	1	420	421
6	70	2	210	212
7	60	1	420	421
10	42	2	210	212
12	35	1	420	421
14	30	2	210	212
15	28	1	420	421
20	21	1	420	421

Für die Zahlenpaare (2 / 210) , (6 / 70) , (10 / 42) und (14 / 30) ist die gesuchte Bedingung erfüllt, sonst nicht.

2. Lösung

Anknüpfend an die Gleichung $a \cdot b = g \cdot k$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$g \cdot k = 420$$
$$\wedge \; g + k = 212 \quad ;$$

g bzw. k sind daher die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x \cdot (212 - x) = 420 \iff x^2 - 212x + 420 = 0 \; ,$$

also wegen $g \leq k$

$$g = 106 - \sqrt{106^2 - 420} = 106 - 104 = 2$$
$$k = 106 + \sqrt{10\,816} = 106 + 104 = 210 \quad .$$

Weil 2 also der g.g.T. von a und b ist, gibt es eine Zerlegung

$$a = 2 \cdot r \quad \wedge \quad b = 2 \cdot s$$

mit $\mathrm{ggT}(r,s) = 1$ und $r \cdot s = 105$.
105 besitzt die Primfaktorzerlegung $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ und daher vier teilerfremde Zerlegungen $105 = r \cdot s$, nämlich

$r = 1$, $s = 105$	mit	$a = 2 \wedge b = 210$	
$r = 3$, $s = 35$		$a = 6 \wedge b = 70$	
$r = 5$, $s = 21$		$a = 10 \wedge b = 42$	
$r = 7$, $s = 15$		$a = 14 \wedge b = 30$	.

Vertauscht man a und b , so erhält man wegen der Symmetrie der Aufgabe wieder eine Lösung.

3. Lösung

Wegen $a \cdot b = g \cdot k$ ergibt sich wieder

$$g \cdot k = 420 \quad \wedge \quad g + k = 212 \; .$$

Dieses Gleichungssystem wird bei folgender Umformung verwendet :

$$(g + 1) \cdot (k + 1) = g \cdot k + g + k + 1 = 420 + 212 + 1$$
$$(g + 1) \cdot (k + 1) = 633 \; .$$

633 besitzt die Primfaktorzerlegung $633 = 3 \cdot 211$.
Wegen $g, k > 0$ folgt sofort $g+1 = 3 \wedge k+1 = 211$, also $g = 2 \wedge k = 210$.
Fortsetzung wie in Lösung 2.

ks

Problem **(Juli 1985)**

Bei einem Schachbrett fehle das Feld A1.
Wieviele kongruente Dreiecke sind mindestens nötig, um dieses Schachbrett zu überdecken ?

Lösung

Da in der Aufgabe eine überschneidungsfreie und lückenlose Überdeckung gemeint ist, hätte man besser von einer "Parkettierung" sprechen sollen.
Die Seitenlänge eines Schachbrettfeldes sei zu 1 normiert. Jedes der 63 Felder läßt sich in zwei kongruente Dreiecke zerlegen. Daher reichen zur Parkettierung sicherlich 126 Dreiecke. Es geht aber mit weniger :
Das reduzierte Schachbrett kann durch neun Streifen mit den Maßen 7 mal 1 parkettiert werden, also kommt man schon mit 18 Dreiecken aus. Dies ist aber auch die geringste Anzahl, mit der sich eine Parkettierung durchführen läßt, denn :
Offensichtlich muß der Rand des reduzierten Schachbretts aus Dreiecksseiten gebildet werden, wobei in den Eckpunkten auch Ecken der Dreiecke liegen müssen. Wären alle Seiten des Parkettierungsdreiecks länger als 1, so könnte die einspringende Ecke des Feldes A1 nicht von ihnen lückenlos umgeben sein. Daher muß auf einer der beiden einspringenden Seiten des Feldes A1 eine Seite des Dreiecks, etwa s, liegen, deren Länge kleiner oder gleich 1 ist. Die zugehörige Höhe über s kann aber nicht größer als 7 sein. Damit folgt für den Flächeninhalt A des Dreiecks

$$A \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 = 3{,}5 \quad ;$$

also braucht man für eine Parkettierung mindestens $\frac{63}{3{,}5} = 18$ Dreiecke.

Bemerkung

Ein bekanntes Parkettierungsproblem wirft die Frage auf, ob ein um die Felder A1 und H8 reduziertes Schachbrett durch Dominosteine der Größe 2x1 überdeckt werden kann. Hierbei verwendet man zweckmäßigerweise kombinatorische Methoden. Offen ist die Frage, wieviele kongruente Dreiecke man zur Parkettierung des so reduzierten Schachbretts mindestens benötigt.

hm

Problem **(August 1985)**

Die böse 7 .
Man zeige: Genau 7 Kanten kann kein Polyeder im dreidimensionalen Raum haben, während für jede andere Kantenzahl k mit k 5 ein Polyeder existiert.

Lösung

Unter einem Polyeder ist ein ebenflächig begrenzter räumlicher Körper zu verstehen. Wir zeigen zunächst, daß es kein Polyeder mit 7 Kanten gibt. Angenommen, P sei ein Polyeder mit 7 Kanten. Falls P eine Seitenfläche F mit mindestens vier Ecken hat, so wird F von mindestens vier Kanten berandet. Von jeder der vier Ecken von F gehen mindestes drei Kanten aus, von denen mindestens eine nicht in der Ebene durch F verläuft. Diese zusätzlichen vier Kanten sind paarweise verschieden, denn sonst müßten sie zwei Ecken von F verbinden, also doch in F liegen. Daher besitzt P mindestens 8 Kanten.
Damit bleibt noch der Fall übrig, daß P von lauter Dreiecksflächen begrenzt wird, etwa von n Stück. Zählen wir die Kanten ab, so erhalten wir $3 \cdot n/2$, denn jede Kante gehört zu genau zwei Dreiecksflächen. Die Gleichung

$$\frac{3 \cdot n}{2} = 7$$

ist aber mit einer natürlichen Zahl n nicht lösbar. Daher gibt es kein Polyeder mit 7 Kanten.
Nun zeigen wir, daß zu jedem k mit $k > 5$ und $k \neq 7$ ein Polyeder mit genau k Kanten existiert. Da ein Tetraeder 6 Kanten hat, sei $k > 7$ und zunächst gerade, etwa $k = 2n$, $n > 3$. Aber eine Pyramide mit einem n-Eck als Grundfläche hat genau $2n = k$ Kanten.
Zu betrachten bleibt der Fall $k > 7$ und k ungerade, etwa $k = 2n+3$, $n \geqslant 3$. Wir betrachten zunächst wieder eine Pyramide mit einem n-Eck als Grundfläche, also mit $2n$ Kanten. Nun wählen wir über einer der Dreiecksflächen einen Punkt und verbinden ihn mit den drei Eckpunkten, d.h. wir setzen auf diese Dreiecksfläche ein Tetraeder. Dadurch kommen drei weitere Kanten hinzu, wenn sichergestellt ist, daß die drei äußeren Flächen des Tetraeders nicht in einer der Ebenen der angrenzenden Flächen liegen. Dies läßt sich aber durch geeignete Wahl der Höhe h des Tetraeders erreichen (z.B. für hinreichend kleines h).

Bemerkung

Zieht man den Eulerschen Polyedersatz in der üblichen Form

$$e + f = k + 2$$

heran, wobei e, f, k die Ecken-, Flächen- und Kantenzahlen sind, so erfaßt man nur den Fall des topologischen Geschlechts 0, d.h. nur Polyeder, die topologisch der Kugelfläche äquivalent sind. Hier folgt aus der Annahme $k = 7$ sofort ein Widerspruch, denn aus $e + f = 9$ ergibt sich wegen $e \geqslant 4$, $f \geqslant 4$ sofort $e = 4$, $f = 5$ bzw. $e = 5$, $f = 4$. Aber $e = 4$ bzw. $f = 4$ gelten nur für das Tetraeder, für das aber $k = 6$ ist.
Für Polyeder mit positivem Geschlecht muß also die entsprechend modifizierte Polyederformel in Ansatz gebracht werden. Einfacher geht es auf direktem Wege.

hm

Problem **(September 1985)**

Beweise : In der Dezimaldarstellung von $\sqrt{3}$, also in 1,732508..... , gibt es einen Block aus 17 Ziffern, der unendlich oft vorkommt.

Lösung

Offenbar ist dies kein numerisches Probelm, das etwa mit einem Rechner bewältigt werden könnte. Es handelt sich um eine reine Existenzaussage.
In einer stark vereinfachten Version liegt die Lösung sehr nahe : Man betrachtet statt eines Siebzehnerblocks einen "Block" aus nur einer Ziffer. Da es nur 10 Ziffern gibt, aber unendlich viele Plätze damit besetzt werden müssen, muß mindestens ein "Block" (eine Ziffer) unendlich oft auftreten. Wegen der Nichtperiodizität der Dezimaldarstellung von $\sqrt{3}$ müssen sogar mindestens 2 Ziffern unendlich oft vorkommen.
Das hier angewendete Schubfachprinzip (Dirichlet) ist auf die Siebzehnerblöcke sofort übertragbar. Zwar gibt es sehr viele verschiedene Siebzehnerblöcke, ihre Anzahl 10^{17} ist aber endlich, und wieder müssen unendlich viele Plätze mit Siebzehnerblöcken besetzt werden. So müssen z.B. in spätestens $(10^{17}+1)$ Siebzehnerblöcken zwei gleiche vorkommen, in $(2\cdot10^{17}+1)$ drei gleiche, allgemein für jedes $n \in \mathbb{N}$ muß in spätestens $[(n-1)\cdot10^{17}+1]$ Siebzehnerblöcken mindestens ein Siebzehnerblock n mal vorkommen.
Auch hier gilt wegen der Nichtperiodizität von $\sqrt{3}$, daß mindestens ein weiterer Siebzehnerblock unendlich oft vorkommen muß.

Bemerkung

Welcher Siebzehnerblock aber tatsächlich unendlich oft vorkommt, weiß bisher niemand, noch nicht einmal, welcher Einerblock (Ziffer) unendlich oft vorkommt.

ks

Problem **(Oktober / November 1985)**

Gegeben ist das Tripel $(1, 2, \sqrt{2})$. Man darf zwei Zahlen davon (a und b) durch $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ ersetzen.

Kann man durch Wiederholung dieses Schrittes jemals das Tripel $(1, 2, 1+\sqrt{2})$ erhalten ?

Lösung

Nein. Die Idee besteht hier darin, eine Größe zu finden, die bei jedem Schritt invariant bleibt. Es zeigt sich, daß die Quadratsumme der Koordinaten dies leistet.

Sind nämlich a, b zwei Zahlen des Tripels, die im nächsten Schritt durch $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ und $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ ersetzt werden, so ist

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} + \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2} = a^2 + b^2 .$$

Also ändert sich die Quadratsumme nicht, sie bleibt immer gleich ihrem Anfangswert $1^2 + 2^2 + (\sqrt{2})^2 = 7$. Da aber das Tripel $(1, 2, 1+\sqrt{2})$ die Quadratsumme $8 + 2\sqrt{2} \neq 7$ besitzt, wird es niemals in der mit $(1, 2, \sqrt{2})$ startenden Folge auftauchen.

Bemerkungen

1. Die Invarianz der Quadratsummen bedeutet geometrisch, daß alle aus $(1, 2, \sqrt{2})$ erzeugbaren Punkte auf der Kugel um den Nullpunkt mit Radius $\sqrt{7}$ liegen. Diese Kugel enthält aber nicht den Punkt $(1, 2, 1+\sqrt{2})$.

   Der Übergang von (a, b, c) zu $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}, c\right)$ entspricht einer Spiegelung an der Ebene

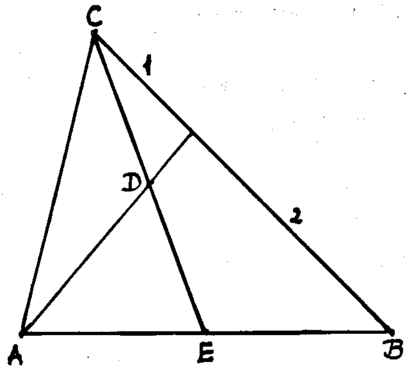
   $$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \langle (x,y,z), (-1, 1+\sqrt{2}, 0) \rangle = 0 \right\} .$$

   Ähnliche Spiegelungen treten bei den anderen Möglichkeiten auf.

2. Die Koordinaten der mit $(1, 2, \sqrt{2})$ beginnenden Tripelfolge liegen alle in dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

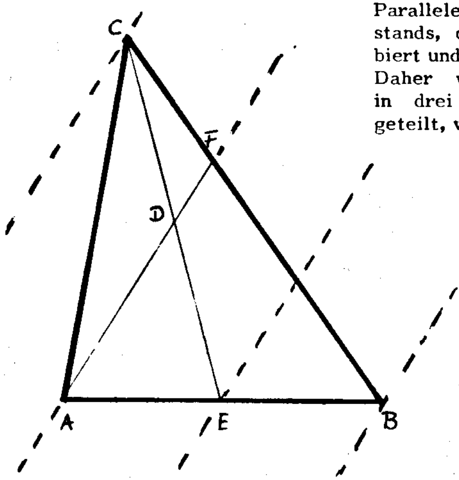
   Läßt sich ein Kriterium angeben, welche Kombinationen dabei möglich sind ?

hm



Verbindet man den Eckpunkt A eines Dreiecks ΔABC mit dem Mittelpunkt D der Seitenhalbierenden $\overline{CE}$, so teilt der Strahl $\overline{AD}$ die Seite $\overline{CB}$ im Verhältnis 1 : 2 .

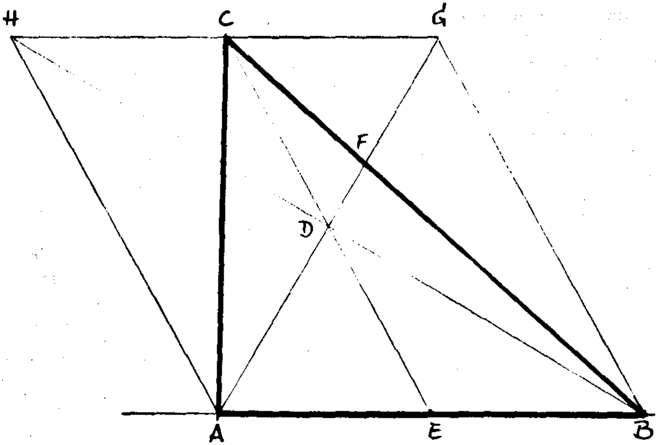
1. Lösung



Die Parallelen zu $\overline{AD}$ durch C, durch E und durch B bilden eine Parallelenschar konstanten Abstands, da D die Strecke $\overline{CE}$ halbiert und E die Strecke $\overline{AB}$.
Daher wird $\overline{CB}$ durch die Schar in drei gleich lange Abschnitte geteilt, von denen einer $\overline{CF}$ ist.

2. Lösung

▱ ABGH sei das Parallelogramm mit der Mittelparallele $\overline{CE}$. Der Mittelpunkt D von $\overline{CE}$ ist dann zugleich der Diagonalenschnittpunkt und halbiert damit auch $\overline{HB}$. Folglich sind in dem Dreieck ΔHBG sowohl $\overline{GD}$ als auch $\overline{BC}$ Seitenhalbierende. Ihr Schnittpunkt F, also der Schwerpunkt des Dreiecks ΔHBG, teilt $\overline{CB}$ im Verhältnis 1 : 2.



ks

Problem **(Januar 1986)**

Die Zahlen 1, 2, ..., 64 seien auf die Felder eines Schachbretts verteilt. Als Abstand zweier benachbarter Felder, auf denen die Zahlen a und b liegen, wird $|a - b|$ definiert. (Zwei Felder heißen benachbart, wenn sie mindestens einen Eckpunkt gemeinsam haben.)
Lassen sich die Zahlen so verteilen, daß alle Abstände kleiner als 9 sind ?

Lösung

Angenommen, es gäbe eine Verteilung, bei der nur Abstände auftreten, die stets kleiner als 9 sind, so betrachten wir das Feld, in das die 1 eingetragen ist. Alle Nachbarfelder haben dann einen Eintrag, der höchstens $1+8 = 9$ ist. Die übernächsten Nachbarn besitzen Eintragungen, die alle kleiner oder gleich $9+8 = 17$ sind, usw. Schließlich werden nach 7 Schritten Felder erreicht, deren Eintragungen höchstens gleich $1 + 7 \cdot 8 = 57$ sind.
Andererseits kann man mit höchstens 7 Einzelschritten (von Feld zu Nachbarfeld) von jedem Feld zu jedem anderen gelangen. Dies sieht man z.B. ein, wenn man die Bewegungen eines Königs auf dem Schachbrett betrachtet, der ja nur auf ein benachbartes Feld ziehen kann.
Auf Grund unserer Annahme gibt es also auf dem gesamten Schachbrett keine Felder mit den Eintragungen 58, 59, ..., 64. Dies ist aber offensichtlich ein Widerspruch, d.h. die oben gestellte Frage ist zu verneinen.

Bemerkungen

1. Die Verteilung

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	...		

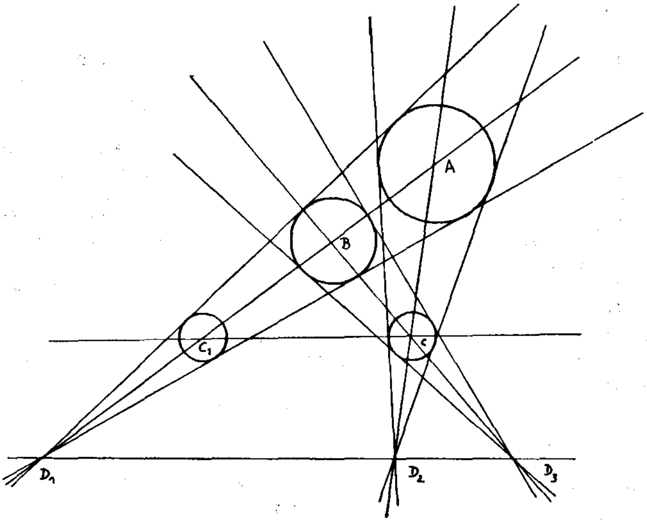
   hat den maximalen Abstand 9.
   Daher ist die Zahl 9 in der Problemstellung bestmöglich.
2. Welches sind die Verteilungen mit dem maximalen Abstand 9 ?
   Gibt es andere als die o.a. Verteilung ?
3. Bisher wurde der maximale Abstand minimiert. Wie ändert sich das Problem, wenn man Verteilungen mit maximalem Mindestabstand untersucht ?

hm

Problem **(Februar 1986)**

In der Ebene seien drei Kreise mit paarweise verschiedenen Radien und mit paarweise leeren Schnittmengen gegeben. Legt man an je zwei dieser Kreise die äußeren Tangenten, so ergeben sich drei Schnittpunkte.
Warum liegen diese Schnittpunkte stets auf einer Geraden ?

Lösung



Wir benutzen die obenstehende Zeichnung :
Die Mittelpunkte der Kreise seien mit A, B, C bezeichnet, ihre Radien mit r_A, r_B, r_C, wobei ohne Einschränkung $r_C < r_B < r_A$ gelte.

Die Schnittpunkte der äußeren Tangenten seien D_1, D_2 bzw. D_3.

Wir denken uns nun einen Kreis vom Radius r_C zwischen die gemeinsamen Tangenten an die Kreise A und B gezeichnet, sein Mittelpunkt sei C_1.
Nach dem 2. Strahlensatz ist

$$|AD_1| : |C_1D_1| = r_A : r_C = |AD_2| : |CD_2| \quad ,$$

also gilt

$$|AD_1| : |AD_2| = |C_1D_1| : |CD_2| \quad .$$

Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes (mit dem Zentrum in A) folgt, daß die Strecke CC_1 parallel zu D_1D_2 ist.

Vertauscht man A mit B , so ergibt sich analog, daß die Strecke CC_1 ebenfalls zu D_2D_3 parallel ist.

Daher liegen die drei Punkte D_1, D_2 und D_3 auf einer Geraden.

Bemerkungen

1. Offensichtlich brauchen die Schnittmengen der Kreise nicht leer zu sein. Falls die Kreise um C und C_1 zusammenfallen, so fallen auch die Schnittpunkte D_1, D_2, D_3 zusammen, und die Behauptung bleibt trivialerweise richtig.
2. Man kann die Strahlensätze vermeiden, wenn man die dritte Dimension zu Hilfe nimmt :
Man denke sich statt der Kreise Kugeln mit den gleichen Radien und Mittelpunkten. Die Mengen aller gemeinsamen äußeren Parallelen zweier Kugeln bilden Kegel, deren Spitzen unsere gesuchten Schnittpunkte sind.
Warum liegen diese drei Schnittpunkte auf einer Geraden ? Ganz einfach deshalb, weil sie in der Schnittmenge zweier Ebenen liegen: die eine Ebene ist die, die durch die Mittelpunkte bestimmt wird, die andere ist diejenige, die die drei Kugeln gemeinsam "von oben" berührt. Sie berührt dann auch die Kegel und enthält daher auch deren Spitzen, Da die Radien alle verschieden waren, verlaufen die Ebenen nicht parallel, sondern schneiden sich - wie gewünscht - in einer Geraden.
(vgl. auch L.A. GRAHAM, Ingenious Mathematical Problems and Methods, Dover 1959, p.38)
3. Eine Variante der Lösung 2. besteht darin, daß man sich statt der Kugeln über die drei Kreise gleichseitige Kegel errichtet denkt. Die gesuchten Schnittpunkte liegen wieder in der Ausgangsebene und in der durch die Spitzen der Kegel bestimmten, also auf einer Geraden.

hm

Problem **(März 1986)**

In der Mitte eines quadratischen Wasserbeckens befindet sich ein guter Schwimmer. Vier Nichtschwimmer lauern in den vier Ecken. Sie dürfen sich nur am Rand bewegen und zwar mit einer Geschwindigkeit, die die des Schwimmers um höchstens 40% übersteigt.
Können die vier Nichtschwimmer den Schwimmer am Verlassen des Beckens hindern ?

Lösung

Normieren wir die Seitenlänge des Wasserbeckens zu 1, so beträgt die Entfernung des Mittelpunkts zu einer Ecke $\sqrt{2}/2$. Da die Geschwindigkeit eines Nichtschwimmers höchstens 1,4-mal so groß ist wie die des Schwimmers und $1{,}4 < \sqrt{2}$ ist, benötigt der gute Schwimmer dafür etwas weniger Zeit als ein Nichtschwimmer für eine volle Seitenlänge.
Damit ergibt sich für den guten Schwimmer folgende Strategie: er schwimmt direkt auf eine Ecke zu. Der Nichtschwimmer aus der gegenüberliegenden Ecke kann ihn offensichtlich nicht erreichen, denen aus den benachbarten Ecken ist er aufgrund der obigen Überlegung eine Nasenlänge voraus. Dem Nichtschwimmer in der Ecke selbst weicht er dadurch aus, daß er kurz vorher rechtwinklig zu der Seite abbiegt, auf der sich dieser Nichtschwimmer nicht befindet. Verharrt dieser in der Ecke, so ist jede Seite möglich. Dabei durchschwimmt er die Seite eines kleinen Quadrates, während der Nichtschwimmer aus der Ecke mindestens die volle Diagonale durchlaufen muß. Wieder aufgrund des Geschwindigkeitsunterschieds kommt der Schwimmer eher am Beckenrand an.
Mögliche Zeitpunkte zum Abbiegen liegen vor, wenn der Schwimmer weniger als $\sqrt{2} - 1{,}4$ von der Ecke entfernt ist. Damit ist es dem Schwimmer möglich, einen Punkt des Beckenrandes vor dem Nichtschwimmer zu erreichen. Ob allerdings die - möglicherweise sehr kleine - Zeitdifferenz ausreicht, um das Becken wirklich zu verlassen, bleibt natürlich unberücksichtigt.

Bemerkungen

1. Welchen Mindestabstand zu allen Nichtschwimmern kann der Schwimmer beim Erreichen des Randes sicherstellen ?
2. Gibt es Strategien bei anderen Startpositionen bzw. Geschwindigkeitsverhältnissen ?
3. "Pinguin-Aufgabe"
   In der Mitte eines kreisrunden Sees befindet sich ein Pinguin, der versucht, einem am Ufer lauernden Ungeheuer zu entgehen. Während der Zeit, die der Pinguin benötigt, um auf geradem Weg vom Mittelpunkt des Sees zum Ufer zu schwimmen, kann das Ungeheuer etwas mehr als den halben See umrunden.
   Wie muß der Pinguin schwimmen, um an Land zu kommen, bevor das Ungeheuer da ist ?

hm

Problem **(April 1986)**

Es sei z eine natürliche Zahl, in deren Neuner-Darstellung nur die Ziffer 1 vorkommt.
Zeige, daß es dann eine natürliche Zahl n gibt mit $z = 1+2+3+...+n$.

Lösung

Für $z = 1_9 = 1$ ist $n = 1$;

für $z = 11_9 = 10$ ist $10 = 1+2+3+4$, also $n = 4$;

für $z = 111_9 = 81+9+1 = 91$ ist $91 = 1+2+3+4+...+13$, also $n = 13$.

Sei die Behauptung für $z = \underbrace{1 \,.....\, 1}_{k\text{-mal}}{}_9 = 9^{k-1} + 9^{k-2} + ... + 9 + 1$ richtig,

$k \geq 1$, d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $z = 1+2+3+ ... + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

$$\text{Dann ist mit } z' = \underbrace{1 \,.....\, 1}_{(k+1)\text{-mal}}{}_9 = 9\cdot z + 1 = \frac{9\cdot n\cdot(n+1)}{2} + 1$$

$$= \frac{9\cdot n\cdot(n+1) + 2}{2}$$

$$= \frac{(3n+1)\cdot(3n+2)}{2} ,$$

also $z' = 1+2+3+ ... + n'$ mit $n' = 3n + 1$.

Bemerkungen

1. Unter Benutzung der geometrischen Reihe kann man auch wie folgt schließen :

$$1 \,.....\, 1_9 = 9^{k-1} + 9^{k-2} + ... + 9 + 1 = \frac{9^k - 1}{9 - 1} = \frac{9^k - 1}{8}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3^k - 1}{2} \cdot \frac{3^k + 1}{2} = \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1) \quad \text{mit} \quad n = \frac{3^k - 1}{2} .$$

2. Die Lösung der Aufgabe läßt sich übersichtlich auch folgendermaßen formulieren :
Ist $z = \underbrace{1 \,.....\, 1}_{k\text{-mal}}{}_9$, so wähle $n = \underbrace{1 \,.....\, 1}_{k\text{-mal}}{}_3$.

3. Zahlen der Form $1+2+ ... +n$ heißen Triagonalzahlen. Sie sind vielfach untersucht worden. So behauptete Fermat (1601-1665), daß jede natürliche Zahl Summe von höchstens drei Triagonalzahlen ist. Dieser Satz wurde erst von Cauchy 1815 bewiesen.

hm

Literatur

D.St.P. Barnard, O. Botsch — Hirnverzwirner mit und ohne Mathematik, Aulis-Verlag.

A.H. Beiler — Recreations in the Theory of Numbers, Dover Publ. Inc. New York, 1966.

W. Borho u.a. — Lebendige Zahlen, Mathematische Miniaturen 1, Birkhäuser, 1981.

O. Botsch — In der Werkstatt der Hirnverzwirner, Aulis-Verlag.

M. Burns — Mathe macht mich krank, Ravensburger Taschenbücher, 1979.

R. Courant, H. Robbins — Was ist Mathematik?, Springer Verlag.

E.B. Dynkin, W.A. Uspenski — Mathematische Unterhaltungen, Aulis-Verlag.

W. Engel, U. Pirl — Mathematische Olympiade-Aufgaben mit Lösungen, Aulis-Verlag.

W. Engel, U. Pirl — Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band 2, Volk und Wissen Verlag, 1975.

K. Freyer, R. Gaebler, W. Möckel — "gut gedacht ist halb gelöst", Aulis-Verlag.

M. Gardner — Mathematisches Labyrinth, Vieweg.

Das Mathematische Kabinett, dtv.

aha!, Spektrum der Wissenschaft Bibliothek.

L.A. Graham — Ingenious Mathematical Problems and Methods, Dover Publ. Inc. New York, 1956.

The Surprise Attack in Mathematical Problems, Dover Publ. Inc. New York, 1968.

E. Hodi — Mathematisches Mosaik, Aulis-Verlag.

R. Honsberger — Mathematical Gems I, II, III, The Math. Association of America.

Mathematical Plums, The Math. Association of America.

Mathematical Morsels, The Math. Association of America.

(einige dieser Bücher sind im Vieweg-Verlag in Deutsch erschienen)

A. Kitaigorodski	Unwahrscheinliches - möglich oder unmöglich, Aulis-Verlag.
B.A. Kordemski	Köpfchen muß man haben, Aulis-Verlag.
I. Lakatos	Beweise und Widerlegungen, Vieweg Verlag, 1979.
L.C. Larson	Problem-Solving through Problems, Springer Verlag, 1983.
J. Lehmann	Kurzweil durch Mathe, Aulis-Verlag.
K. Menninger	Ali Baba und die 39 Kamele, Aulis-Verlag.
D.J. Newman	A Problem Seminar, Springer Verlag, 1982.
C. Stanley Ogilvy	Mathematische Leckerbissen, Vieweg & Sohn, 1969.
G. Polya, J. Kilpatrick	The Stanford Mathematics Problem Book, Teachers College Press.
Rademacher, Toeplitz	Von Zahlen und Figuren, Springer Verlag.
H. Sewerin	Mathematische Schülerwettbewerbe, Manz Verlag, 1982.
H. Steinhaus	Kaleidoskop der Mathematik, Deutscher Verlag der Wissenschaften.

American Mathematical Monthly.

Bundeswettbewerb Mathematik, Aufgaben und Lösungen 1972-1978, 1979-1982, Klett-Verlag.

Elemente der Mathematik, Birkhäuser-Verlag.

Heureka, Handreichungen aus dem Hamburger Projekt "Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern" (Anfragen sind an K. Kießwetter zu richten).

mathe-plus, Bibliographisches Institut Mannheim.

Der Mathematik-Unterricht MU, Jahrgang 25, Heft 1, 1979, Klett-Verlag.

Anschriften der Autoren

StD Klaus Sielaff
Institut für Lehrerfortbildung
Felix-Dahn-Straße 3
2000 Hamburg 6

Prof. Dr. Helmut Müller
Mathematisches Seminar
Universität Hamburg
Bundesstraße 55
2000 Hamburg 13

Prof. Dr. Karl Kießwetter
Fachbereich Erziehungswissenschaft
Universität Hamburg
Von-Melle-Park 8
2000 Hamburg 13