Problem des Monats • Februar 2023

LÖSUNG

Methodische und didaktische Hinweise.

Aufgabe 1

In der Aufgabe 1 kann sowohl mithilfe der angegebenen Internetseite als auch mit dem Holzmodell (falls vorhanden) die mind. Anzahl der Züge durch systematisches Ausprobieren bestimmt werden. Die beigefügte Tabelle kann als Darstellungsform genutzt werden. Dies kann die Weiterarbeit bei Teilaufgabe 2 erleichtern.
In Teilaufgabe 2 soll eine geschlossene Formel von den SuS gefunden werden. Dabei kann die Tabelle aus Teilaufgabe 1 als Hilfsmittel dienen (siehe unten). Als Hilfestellung kann die 2-er Potenzreihe vorgestellt werden.

Aufgabe 2

Die Anzahl der gleichgroßen Schreiben kann variiert werden. Somit ergeben sich komplexere Lösungsmöglichkeiten für die SuS. Bei der Bearbeitung der Aufgabe ist ab n = 3 eine Fallunterscheidung nötig.

Weiterführende Aufgaben und Ideen befinden sich im Anschluss an die konkreten Lösungen.

Lösungshinweise

Aufgabe 1

n	*Mind. Züge*
1	*1*
2	*3*
3	*7*
4	*15*
5	*31*
6	*63*
7	*127*
8	*255*
9	*511*

Die Formel für die Mindestanzahl benötigter Züge von n Scheiben lässt sich durch die Formel $\boldsymbol{z(n) = 2^n - 1}$ beschreiben.
Die Anzahl der Versuche bei 64 Scheiben ist demnach $2^{64} - 1 = 1{,}844674407 \text{x} 10^{19}$.

Wann wird das sein? Nun, wir müssen uns keine Sorgen machen. Angenommen, die Mönche benötigen für das Umlegen einer Scheibe 10 Sekunden, dann werden sie in ca. 5849424173550 Jahren fertig sein. Das ist um Vieles mehr als das gesamte Universum alt ist.

Aufgabe 2

Durch systematisches Ausprobieren kann folgende Lösung für bis zu vier Scheiben gefunden werden.

n	*Mind. Züge*
1	*1*
2	*2*
3 (unten gleich groß)	*4*
3 (oben gleich groß)	*5*
4 (unteren beiden Scheiben sind gleich groß)	*8*
4 (mittleren beiden Scheiben sind gleich groß)	*9*
4 (oberen beiden Scheiben sind gleich groß)	*11*
...	

→Bei n = 1 ergibt sich die neue Problemstellung nicht.
→ n = 2: Ein Zug weniger, da der Zwischenschritt in die Mitte nicht mehr nötig ist.
→ n = 3: Weniger Züge, wobei die Anzahl der Züge noch geringer ist, wenn die unteren Scheiben gleichgroß sind.

Insgesamt ist festzustellen, dass die Anzahl der Züge geringer wird. Dabei ist eine Fallunterscheidung zu tätigen, je nachdem, wo die gleich großen Scheiben sich im Turm befinden. Je weiter unten die gleichgroßen Scheiben sich im Turm befinden, desto geringer wird die Anzahl der benötigten Züge.

Aufgabe 3

n	*Mind. Züge*
1	*1*
2	*3*
3	*5*
4	*9*
5	*13*
6	*17*
7	*25*
8	*33*
9	*41*

Aufgabe 4

Wie man bereits in der vorherigen Teilaufgabe 2 herausgefunden hat, benötigt man für n Scheiben mindestens $z(n) = 2^n - 1$ Züge. Eine Möglichkeit, dies zu beweisen, liefert das **Verfahren der vollständigen Induktion.** Entweder gibt die Lehrkraft eine Einführung oder die SuS eignen sich das Prinzip selbst an:

- Im Induktionsanfang zeigt man, dass die Formel $z(n) = 2^n - 1$ für das kleinstmögliche n (hier also 1) gilt.
- Im Induktionsschritt nimmt man nun für ein beliebiges n an, dass die Formel gilt. Anschließend *muss* aber aus dieser Annahme hergeleitet werden, dass die Formel auch für den Nachfolger $n + 1$ gilt.

Der **Beweis durch vollständige Induktion** lässt sich für diese Formel demnach wie folgt darstellen:

Induktionsanfang: $n = 1$

$z(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ (Dies entspricht auch der Beobachtung, dass man mindestens genau einen Zug zum Verschieben der Scheibe benötigt.)

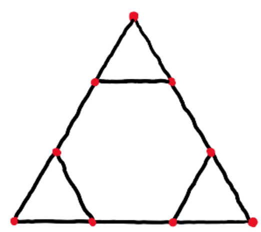
Induktionsschritt:

Wir behaupten, dass $z(n) = 2^n - 1$ für ein beliebiges $n \epsilon \mathbb{N}, n > 1$ gilt.
Nun sind es $n + 1$ Scheiben. Mit den ersten $2^n - 1$ Zügen werden die obersten n Scheiben vom linken zum mittleren Stab bewegt. Im nächsten Schritt wird die unterste Scheibe vom linken zum rechten Stab bewegt, so ein weiterer Zug hinzukommt.
Anschließend werden die n Scheiben, die auf dem mittleren Stab „gelagert“ worden waren, mit $2^n - 1$ Zügen auf den rechten Stab bewegt.
Insgesamt sind es daher $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1)$ Züge. Eine weitere Vereinfachung liefert:
$z(n + 1) = 2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} + 1$ q.e.d.

Mögliche weiterführende Aufgaben:

1. Sierpinski-Dreiecke (Verweis auf das PdM Februar 2021)

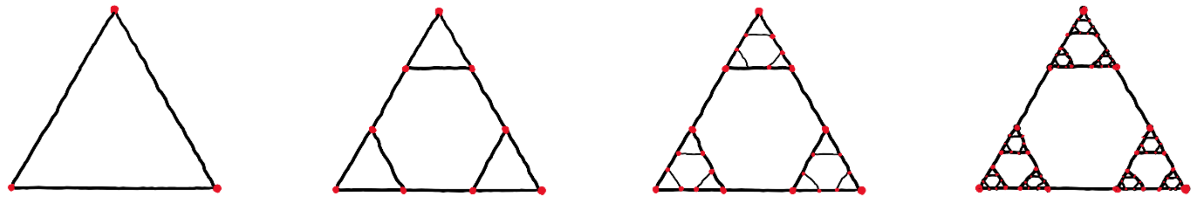
Um das Umstapeln übersichtlich darstellen zu können, verwendet man das sogenannte Sierpinski-Dreieck. Diese zeichnet man wie folgt:



(1) Zeichne zunächst ein gleichseitiges Dreieck (Stufe 0).
(2) Unterteile jede Seite durch Punkte in drei gleichgroße Abschnitte.
(3) Verbinde die zu einem Eckpunkt direkt benachbarten zwei Punkte aus Schritt 2 miteinander. Wiederhole dies für alle Eckpunkte.

So entstehen insgesamt drei kleinere gleichseitige Dreiecke und in der Mitte ein gleichseitiges Sechseck, wie in der Abbildung zu sehen ist (Stufe 1).

Führe diese Konstruktion für ein Ausgangsdreieck mit der Seitenlänge 18 cm durch. **Wiederhole** diese Arbeitsschritte für jedes Dreieck weitere zwei Mal, sodass Du ein Sierpinski-Dreieck der Stufe 3 hast. Wie viele Dreiecke sind so entstanden? Wie viele Sechsecke?



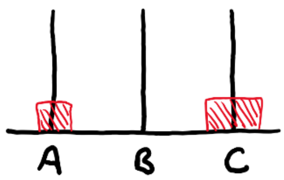
Stufe 0 Stufe 1 Stufe 2 Stufe 3

1 Dreieck 4 Dreiecke 13 Dreiecke 40 Dreiecke

0 Sechsecke 1 Sechseck 4 Sechsecke 13 Sechsecke

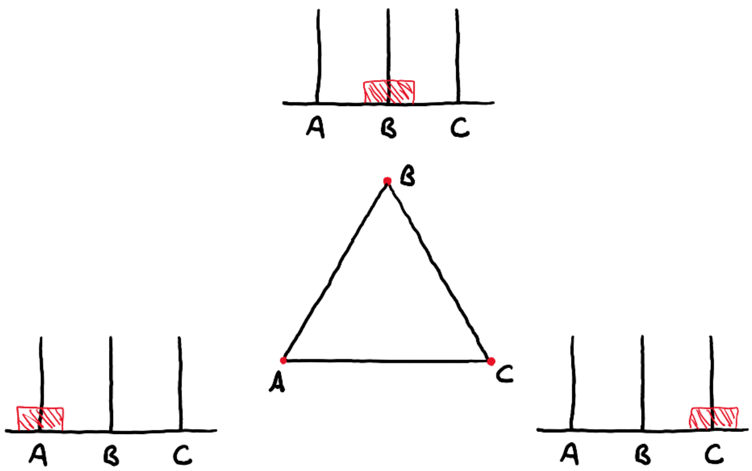
Methodische und didaktische Hinweise:

Um das Umstapeln schrittweise aufschreiben zu können, benennt man die Stifte mit den Buchstaben A, B und C und beginnt mit dem Stift, auf dem die größte Scheibe ist, dann die zweitgrößte usw. So bedeutet die Kombination CA bei einem Spiel mit $n = 3$ Stäben und $k = 2$ Scheiben, dass die größte Scheibe auf dem Stab C und die kleinste Scheibe auf dem Stab A ist (Abb. rechts). Fangen wir für das systematische Beschreiben des Umstapelns bei drei Stäben ($n = 3$) mit einer Scheibe an, also $k = 1$.



<u>Fall $k = 1$:</u>

Hier verwenden wir zur Veranschauung ein gleichseitiges Dreieck, dass man auch als SIERPINSKI-Dreieck der Stufe 0 verstehen kann. Wechselt die Scheibe den Stab, so entspricht dies einem neuen Eckpunkt im Dreieck:

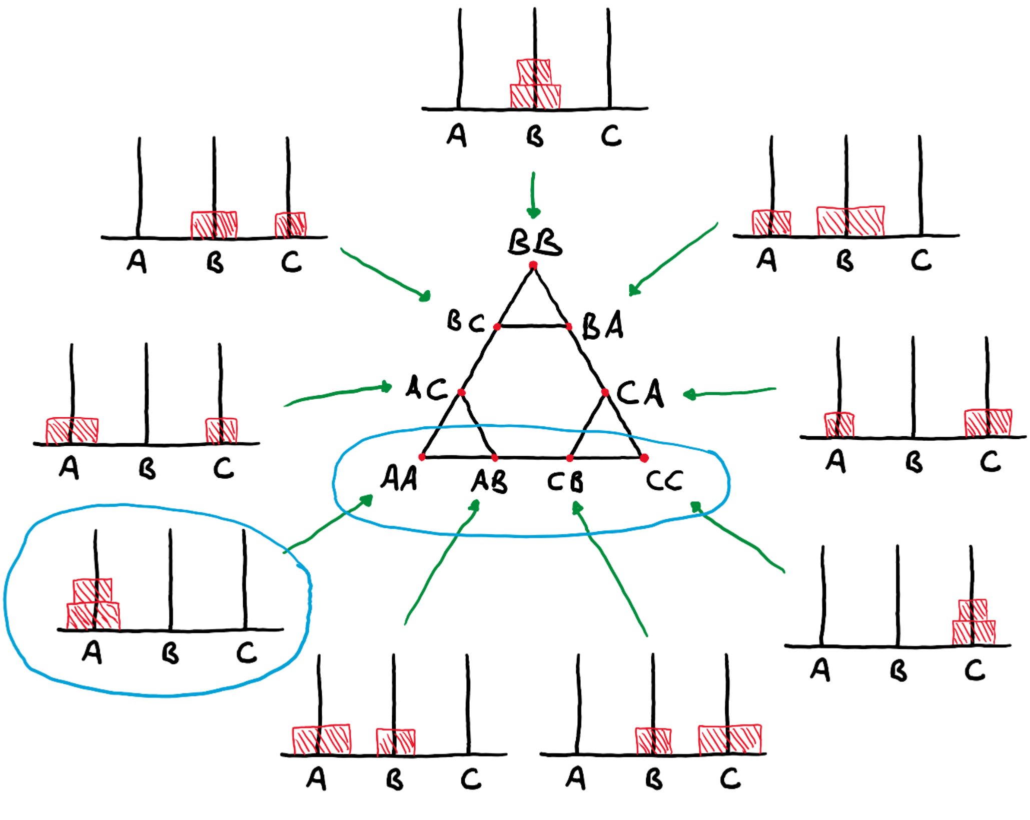


Fall $k = 2$:

Zunächst seien alle Scheiben auf dem Stab A (Ecke links unten im abgebildeten Dreieck). Sollen die Scheiben nun auf dem kürzesten „Weg" auf den Stab C umgestapelt werden, wählt man den „Weg" unterhalb des Dreiecks (SIERPINSKI-Dreieck der Stufe 1) beschriebenen Umstapel-prozess mit 3 Schritten. Dies lässt sich, wie an den unteren Darstellungen erkennbar von links nach rechts auch kurz mit den entsprechenden Buchstabenkombinationen

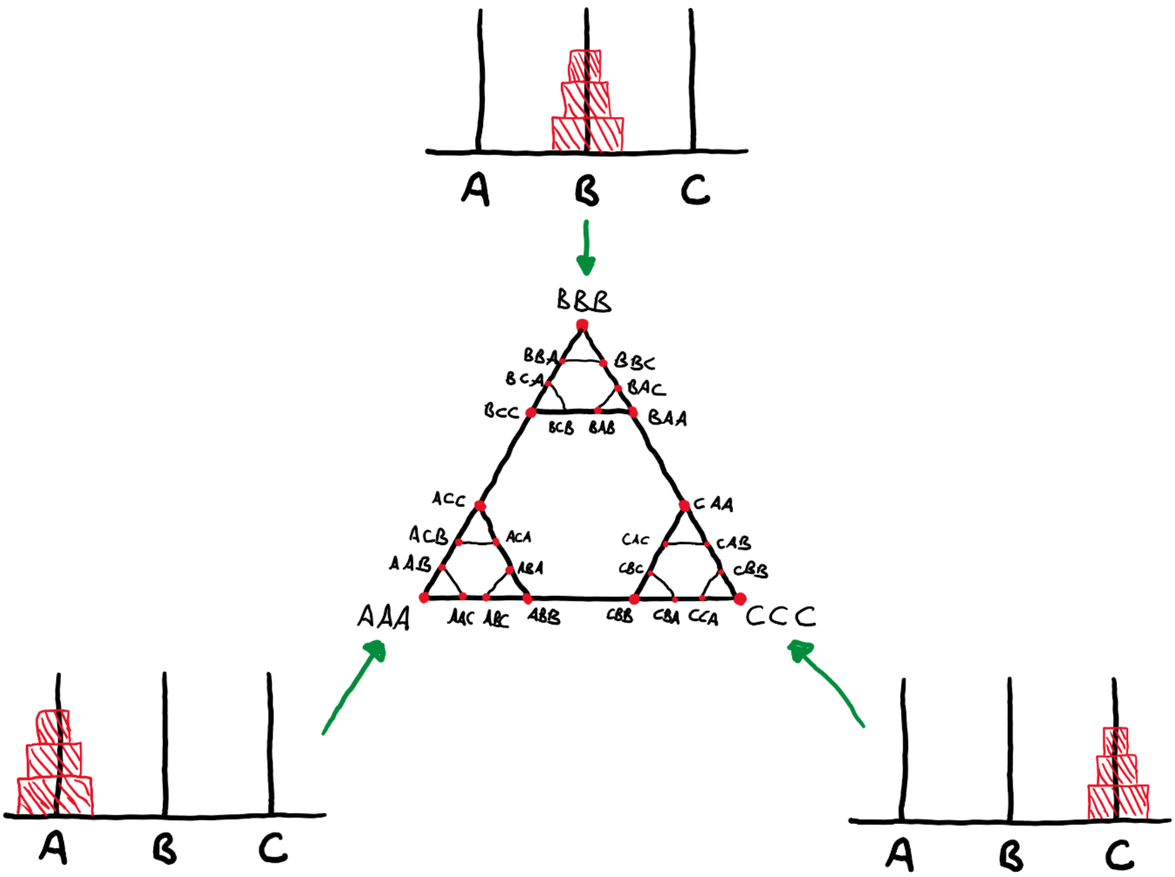
$$AA,\ AB,\ CB,\ CC$$

beschreiben. Das Teildreieck unten rechts entspricht wieder einem SIERPINSKI-Dreieck der Stufe 0. Bei der Beschriftung ist der erste Buchstabe in diesem Teildreieck A.



Fall $k = 3$:

Das Verfahren lässt sich nun mit ansteigender Scheibenzahl entsprechend fortsetzen. In der Abbildung ist nur noch das mit den entsprechend beschriftete SIERPINSKI-Dreieck dargestellt. Jedes der kleineren Teildreiecke entspricht dem im vorherigen Fall dargestellten SIERPINSKI-Dreieck der Stufe 1 beschreibt das Umstapeln der oberen beiden Scheiben, der Wechsel von einem kleineren Dreieck zum nächsten stellt den Wechsel der untersten Scheibe dar.



Jeder „Weg" im SIERPINSKI-Dreieck von AAA nach CCC beschreibt eine Lösung für die Umsortierung. Der kürzeste „Weg" ist der entlang der unteren Seite mit 7 Schritten. Spannend, aber auch wesentlich unübersichtlicher wird es, wie man nun **vier Stäbe** ($n = 4$) in dieser Darstellung umsetzt. Passt das dreidimensionale SIERPINSKI-Tetraeder? Dies bleibt dem Leser als Aufgabe…

2. Geometrische/arithmetische Folgen und Reihen in rekursiver und expliziter Form

- Entwicklung der Anzahl der Züge betrachten
- Differenz der aufeinanderfolgenden Folgenglieder betrachten

Links zum Weiterlesen:
https://mathematikalpha.de/wp-content/uploads/2021/12/Turm-von-Hanoi.pdf
https://hausdermathematik.at/?s=Hanoi
https://studyflix.de/mathematik/vollstandige-induktion-2406