Problem des Monats • April 2023

LÖSUNGSHINWEISE

Bei einem Würfelspiel gewinnt man auf lange Sicht, wenn mit drei Würfeln gespielt wird und diese nicht dem Prinzip der Transitivität folgen. D.h. wenn Würfel B eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit besitzt als Würfel A und Würfel C eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit besitzt als Würfel B, dann muss Würfel A eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit als Würfel C besitzen. Dieses Prinzip der Intransitivität findet man auch bei dem Spiel „Schere-Stein-Papier."
Da Schüler:innen in ihrem (mathematischen) Alltag meist nur auf Mengen mit transitiven Eigenschaften treffen, könnte es für sie spannend und motivierend sein, diese Besonderheit schon vor der Bearbeitung der Aufgaben, insbesondere Aufgabe 3, zu thematisieren.
Ein Beispiel für einen transitive Beziehung ist die folgende:
„Wenn Berta schneller laufen kann als Anton, und Charlie schneller laufen kann als Berta, dann kannst du dir recht sicher sein, dass Charlie auch schneller läuft als Anton. Dann gilt: Wenn A < B und B < C, dann ist auch A < C."
Hier kann man die Schüler:innen auch erst einmal selber weitere Beispiele für Transitivität oder Intransitivität finden lassen.

Aufgabe 1
Spieler A kann mit 50 und Spieler B mit 70 gewonnenen Spielen rechnen. In der Tabelle ist den Augenzahlen von A und B jeweils zugeordnet, ob A oder B die Runde gewinnt. Es ist zu sehen, dass von den 36 Möglichkeiten 15 günstig für A und 21 günstig für B sind. Das heißt, dass bei 12 Runden 5 günstig für A und 7 günstig für B ausgehen. Entsprechend sind die Erwartungswerte bei 120 Runden 70 für B und 50 für A.

A/B	1	3	5	7	9	11
2	B	A	A	A	A	A
4	B	B	A	A	A	A
6	B	B	B	A	A	A
8	B	B	B	B	A	A
10	B	B	B	B	B	A
12	B	B	B	B	B	B

Aufgabe 2
Eine mögliche Lösung folgt hier:

A - 1, 2, 3, 10, 11, 12

B - 4, 5, 6, 7, 8, 9

Aufgabe 3
Als erstes kann man mit den Schüler:innen besprechen, was „besser" bedeuten kann. In unserem Fall ist ein Würfel besser als der andere, wenn die Gewinnwahrscheinlichkeit höher ist.
Es sollte darauf geachtet werden, dass keine Zahl zweimal vorkommt, denn in unserem Spiel soll es in keiner Runde Gleichstand geben. Es muss immer einen klaren Sieger geben, an den der Punkt geht.

Eine Lösung der Aufgabe ist folgende:

A: 7, 8, 9, 10, 11, 12   B: 1, 2, 13, 14, 15, 16   C: 3, 4, 5, 6, 17, 18

Man sieht schnell, dass B gegen A mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ gewinnt - nämlich immer dann, wenn man mit B eine Zahl ab 13 würfelt. A gewinnt gegen C, außer wenn C 17 oder 18 zeigt, also gewinnt A gegen C mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$.

Für das Spiel von B gegen C hilft uns wieder eine Tabelle: Die Wahrscheinlichkeit, dass C gewinnt, ist $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.
Zusammenfassend haben wir: B > A, A > C, C > B

B/C	1	2	13	14	15	16
3	C	C	B	B	B	B
4	C	C	B	B	B	B
5	C	C	B	B	B	B
6	C	C	B	B	B	B
17	C	C	C	C	C	C
18	C	C	C	C	C	C

Tipp:
Falls sich die Schüler:innen schwer tun, können diese Würfel vorgeschlagen und auf verschiedenen Wegen untersucht werden:

A - 4, 4, 5, 5, 6, 6
B - 1, 1, 7, 7, 8, 8
C - 2, 2, 3, 3, 9, 9

Die Aufgabe lautet zu überprüfen, ob die Würfel intransitiv sind (also jeder gegen einen anderen gewinnt).
Basierend auf diesen Würfeln kann dann eine Beschriftung gesucht werden, bei der alle Zahlen paarweise unterschiedlich sind.

Weiterführende Fragen zu den Würfeln:

- *Wie groß sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten jeweils?*
- *Kann man die Würfel auch so beschriften, dass die Gewinnwahrscheinlichkeiten jeweils gleich sind?*

Aufgabe 4

Für ein Spiel mit einer Münze wird diese mehrfach geworfen und die Abfolge aus Wappen und Zahl notiert. Der Gegenspieler legt eine Reihenfolge für sich fest, z.B. WZW. Du suchst dir eine andere Reihenfolge aus, z.B. WWZ. Nun wird die Münze so lange geworfen, bis eine dieser beiden Reihenfolgen erscheint. Es könnte z.B. ZZWZW fallen. In diesem Fall hätte der Gegenspieler gewonnen und bekäme einen Punkt.

Nun besteht das Problem darin, zu jeder Reihenfolge, die der Gegenspieler auswählt, eine bessere zu finden - also eine, die mit über 50 % Wahrscheinlichkeit gewinnt. Naiv könnte man meinen, dass alle Reihenfolgen gleich wahrscheinlich seien, weil WZW genauso wahrscheinlich ist wie WWZ. Aber das ist nur korrekt, wenn man nur dreimal wirft.

In unserem Spiel wird jedoch so lange geworfen, bis eine von zwei bestimmten Reihenfolgen erscheint, dadurch erhalten wir einen anderen Sachverhalt. Wenn der Gegenspieler sich für WWW entscheiden sollte, dann nimmst du ZWW. Der

Gegenspieler kann nur dann gewinnen, wenn die ersten drei Würfe W liefern. Sollte aber ein Z dabei sein, dann muss die Reihenfolge ZWW immer auftreten, bevor WWW auftritt, z.B. bei WWZZWZWZZWW. Da WWW am Anfang eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{8}$ hat, gewinnst du mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{7}{8}$.

In der Tabelle sind alle Möglichkeiten mit den Gewinnwahrscheinlichkeiten angegeben:

Gegenspieler	WWW	WWZ	WZW	WZZ	ZWW	ZWZ	ZZW	ZZZ
deine Wahl	ZWW	ZWW	WWZ	WWZ	ZZW	ZZW	WZZ	WZZ
deine Gewinnwahrschein-lichkeit	7/8	3/4	2/3	2/3	2/3	2/3	3/4	7/8

Begründung für diese Gewinnwahrscheinlichkeiten:

Die acht Fälle lassen sich auf vier Paare reduzieren, die jeweils symmetrisch sind (durch Austausch von W und Z).

- *Begründung für* $\frac{7}{8}$ siehe Lösungsbeispiel
- *Begründung für* $\frac{3}{4}$ (Gegenspieler wählt WWZ oder ZZW):
  Der Gegenspieler kann nur dann gewinnen, wenn direkt am Anfang zweimal in Folge W (oder im symmetrischen Fall Z) kommt, sonst gewinnst automatisch du. Eine Folge aus Doppelbuchstaben WW (oder ZZ respektive) berechnet sich mit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ gleich $\frac{1}{4}$, die Gegenwahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ ist unsere Gewinnwahrscheinlichkeit. Es spielen diesmal nur zwei der drei Würfe eine Rolle, da wir verloren haben, sobald am Anfang zweimal hintereinander W (oder Z) fallen - unabhängig davon, ob es danach noch zehn Mal Wappen gibt oder direkt Z.
- *Begründung für* $\frac{2}{3}$ (Gegenspieler wählt WZW oder ZWZ):
  Es müssen alle Möglichkeiten für W und Z notiert werden, die bei dreimal Werfen (unter Beachtung der Reihenfolge) auftreten können. Manche haben zur Folge, dass Spieler oder Gegenspieler gewinnen, andere lassen keine Aussage zu, der Ausgang bleibt offen:

  WWW -> offen
  WWZ -> Spiel zu Ende -> Spieler gewinnt direkt
  WZZ -> offen
  WZW -> Spiel zu Ende -> Gegenspieler gewinnt direkt
  ZWZ -> offen
  ZWW -> Spiel zu Ende, sobald das nächste Mal Z fällt, Spieler gewinnt zwangsläufig
  ZZW -> offen
  ZZZ -> offen

  Betrachtet man die 8 möglichen Kombinationen, führen drei davon zwangsläufig zum Ende des Spiels. In zwei von drei Kombinationen gewinnt der Spieler.

Die Untersuchung der nächsten Stufe (nach einem weiteren Wurf) für die noch offenen Spiele ergibt 10 Möglichkeiten (fünf offene Situationen mit jeweils W oder Z):

WWWZ -> Spieler gewinnt
WWWW -> offen
WZZW -> offen
WZZZ -> offen
ZWZW -> Gegenspieler gewinnt
ZWZZ -> offen
ZZWW -> Spieler gewinnt
ZZWZ -> offen
ZZZW -> offen
ZZZZ -> offen

Es ergibt sich dieselbe Situation wie zuvor – nur drei Kombinationen führen zum Ende des Spiels, in zwei dieser Kombinationen gewinnt der Spieler.

Hinweis: Bei genauer Betrachtung erkennt man, dass es wiederum nur acht unterschiedliche Fälle sind, da für die Gewinnbetrachtung ZZZZ und WZZZ identisch sind, genau wie WZZW und ZZZW.

Quellen:

- Behrens, Ehrhard „Der mathematische Zauberstab“ (2018)
- Käpnick et al. „Forschen und Knobeln: Mathematik. Klasse 5 und 6“ (2021)