**Anhang**

**„Lichtschalter“ zum Wenden**

Schneide beide Tabellen aus, klebe sie aufeinander und schneide entlang der

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

gestrichelten Linien die „Lichtschalter” aus.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **10** | **9** | **8** | **7** | **6** | **5** | **4** | **3** | **2** | **1** |
| **20** | **19** | **18** | **17** | **16** | **15** | **14** | **13** | **12** | **11** |
| **30** | **29** | **28** | **27** | **26** | **25** | **24** | **23** | **22** | **21** |
| **40** | **39** | **38** | **37** | **36** | **35** | **34** | **33** | **32** | **31** |
| **50** | **49** | **48** | **47** | **46** | **45** | **44** | **43** | **42** | **41** |
| **60** | **59** | **58** | **57** | **56** | **55** | **54** | **53** | **52** | **51** |
| **70** | **69** | **68** | **67** | **66** | **65** | **64** | **63** | **62** | **61** |
| **80** | **79** | **78** | **77** | **76** | **75** | **74** | **73** | **72** | **71** |
| **90** | **89** | **88** | **87** | **86** | **85** | **84** | **83** | **82** | **81** |
| **100** | **99** | **98** | **97** | **96** | **95** | **94** | **93** | **92** | **91** |

## Weiterführende Aufgabenstellungen

- Hast du das Problem gelöst und das Muster erkannt? Was wäre, wenn wir 1.000, 1.000.000 oder unendlich viele Lichtschalter hätten? Hält das Muster auch hier? Versuche, einen mathematischen Beweis für deine Hypothese aufzustellen.

  Lösungshinweis*: Eine Möglichkeit wäre, mit einer Primfaktorzerlegung zu beginnen. Alternativ kannst du auch versuchen, ein Programm (zum Beispiel Python) zu schreiben und damit herausfinden, ob deine Hypothese bestätigt oder widerlegt wird.*

- Noch Lust, weiter zu knobeln? Stell dir das gleiche Problem vor, aber ändere die Regeln. Wie ändert sich dann die Lösung des Problems?

### Didaktische Hinweise:

Die Aufgaben a) – d) sind eine strukturierende Unterstützung im Problemlöseprozess. Es ist auch möglich nur die Frage „Welche Lichtschalter sind nach 100 Durchgängen an und warum?“ zu stellen.

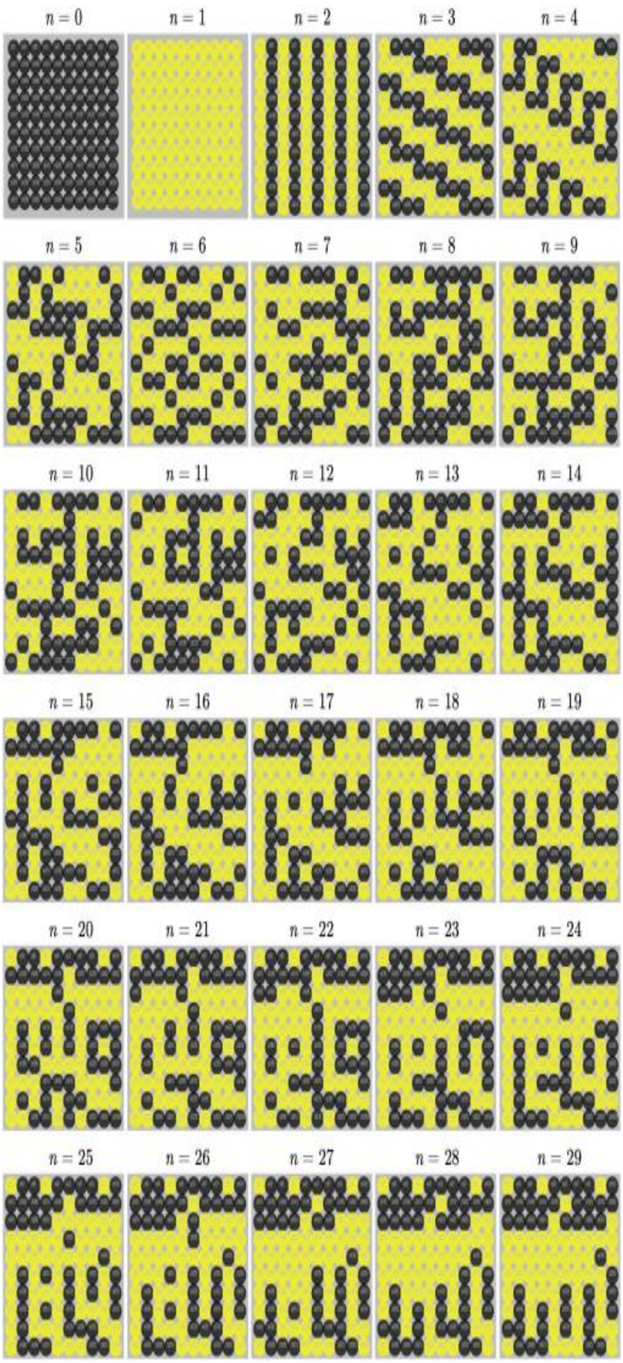
Die Aufgaben e) und f) beleuchten weitere Aspekte des Lichtschalter-Problems und können um die weiterführenden Fragestellungen im Anhang ergänzt werden.

### Lösungen

a) individuelle Antworten

Im Folgenden sind die Ausgangslage und die ersten 29 Züge dargestellt. Außerdem findet man unter den folgenden Links eine GIF-Animation bzw. ein Video mit allen 100 Zügen: GIF: https://gifyu.com/image/SdyKp

Video: https://www.youtube.com/watch?v=6IC-gm_eVxI




b) Im dritten Zug findet sich ein alternierendes Muster aus Dreierpaaren.

c) Im vierten Zug lässt sich ein Muster erkennen, das sich diagonal fortsetzt (wie eine Art spiegelverkehrtes „S“).

d) Ab Zug 5 wirkt es (zumindest in dieser Darstellung) zunächst wie ein chaotischer Prozess. Muster lassen sich nur schwer erkennen. Es lässt sich eine erste Vermutung aufstellen, dass nur Quadratzahlen (hier bereits 1 und 4) stehen bleiben könnten.

**Wenn 100 Personen die Schalter betätigt haben, sind die folgenden Lichter an: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 und 100. Es handelt sich um die Quadratzahlen von 1 bis 100. Aber warum ist dies der Fall?**

**Erklärung:**
Am Anfang sind alle Schalter ausgeschaltet. Damit ein Schalter am Ende eingeschaltet ist, muss die Anzahl, die der Schalter betätigt wurde, eine ungerade Zahl darstellen. Andersherum ist ein Schalter am Ende wieder ausgeschaltet, wenn die Anzahl der Betätigungen eine gerade Zahl war. Somit stellt sich die Frage, welche Zahlen eine gerade Anzahl von unterschiedlichen Teilern und welche Zahlen eine ungerade Anzahl von Teilern besitzen.
Jede Zahl besitzt mindestens zwei (triviale) Teiler: die Zahl selbst und 1. Die Primzahlen besitzen nur diese zwei Teiler. Da es sich hierbei um eine gerade Anzahl von Teilern handelt, lässt sich schnell herausfinden, dass alle Schalter, die für Primzahlen stehen, ausgeschaltet sein müssen.
Betrachtet man nun weitere Zahlen, wie zum Beispiel die Zahl 6, bemerkt man, dass Teiler immer in Paaren dazukommen. Beim Beispiel der Zahl 6 (neben der 1 und der 6) auch noch die 2 und die 3, da sowohl $2 \cdot 3 = 6$ als auch $3 \cdot 2 = 6$ gilt (Kommutativgesetz). Dadurch würde man zunächst zu der Vermutung kommen, dass jede Zahl eine gerade Anzahl von Teilern besitzt. Bei weiterer Betrachtung findet man jedoch Fälle, in denen nur ein weiterer Teiler hinzukommt. Dieser Fall tritt bei Quadratzahlen auf. Die Zahl 4 hat zum Beispiel drei unterschiedliche Teiler. Neben 1 und 4 auch noch die 2; aber diese eben nur einmal. Daher schlussfolgert man, dass jede Quadratzahl eine ungerade Anzahl von Teilern besitzt und daher diese Schalter am Ende noch eingeschaltet sind.

Dieses Muster wird ebenfalls deutlich, wenn man sich die Primfaktoren der Zahlen von 1 bis 100 betrachtet. Nur die Quadratzahlen bestehen aus einer ungeraden Anzahl an Primfaktorkombinationen, die Faktoren $p^0_i = 1$ müssen jeweils noch mit einbezogen werden (siehe Tabelle nächste Seite und Anmerkungen).

e) Der erste Schalter wird nur ein einziges Mal betätigt (trivial). Primzahlen sind Zahlen mit nur zwei Faktoren, daher werden Schalter, die zu Primzahlen gehören, auch am wenigsten betätigt, nämlich genau zweimal. Am häufigsten werden somit Schalter betätigt, deren Zahlen sehr viele Faktoren haben. Aber welche Zahlen sind dies? Diese Zahlen nennt man „hochzusammengesetzte Zahlen" (HZZ) und könnte sie umgangssprachlich auch als „Anti-Primzahlen" bezeichnen. In der Tabelle findet man die ersten 20 HZZ und die jeweilige Anzahl an Teilern.

Die Schüler:innen können selbst die Anzahl der Teiler für die Zahlen 1 bis 24 bestimmen und anschließend mit der Tabelle vergleichen

**Die ersten zwanzig hochzusammengesetzten Zahlen** [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

| Laufindex $k$ | Folge in OEIS | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$-te hochzusammengesetzte Zahl | A002182 | 1 | 2 | 4 | 6 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 120 | 180 | 240 | 360 | 720 | 840 | 1260 | 1680 | 2520 | 5040 | 7560 |
| Teileranzahl | A002183 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 16 | 18 | 20 | 24 | 30 | 32 | 36 | 40 | 48 | 60 | 64 |

https://de.wikipedia.org/wiki/Hochzusammengesetzte_Zahl

Es tauchen die aus dem Alltag gut bekannten Zahlen 12, 24, 60, 360 auf. Die Fragen „Woher kennt du diese Zahlen aus dem Alltag und warum wurden gerade diese verwendet? Welche Zahl ist eigentlich die kleinste Zahl, die alle Zahlen von 1 bis 10 als Teiler hat?" lassen sich hier gut stellen.

f) Hier sollten die Primfaktorzerlegungen der noch leuchtenden Zahlen mit Blick auf die einzelnen Exponenten verglichen werden.
**Leichter Fall:** Wenn nur Schalter 100 leuchten soll, wird nur Durchgang 100 ausgeführt. **Anspruchsvoller:** Wenn nur Schalter 1 leuchten soll, dürfen nur Durchgänge mit quadratfreien Primfaktorzerlegungen (1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, ⋯ , 96, 97) durchgeführt werden.

Tabelle zu d):

| **1 – 20** | | **21 – 40** | | **41 – 60** | | **61 – 80** | | **81 – 100** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 21 | 3·7 | 41 | **41** | 61 | **61** | 81 | $3^4$ |
| 2 | **2** | 22 | 2·11 | 42 | 2·3·7 | 62 | 2·31 | 82 | 2·41 |
| 3 | **3** | 23 | **23** | 43 | **43** | 63 | $3^2\cdot 7$ | 83 | **83** |
| 4 | $2^2$ | 24 | $2^3\cdot 3$ | 44 | $2^2\cdot 11$ | 64 | $2^6$ | 84 | $2^2\cdot 3\cdot 7$ |
| 5 | **5** | 25 | $5^2$ | 45 | $3^2\cdot 5$ | 65 | 5·13 | 85 | 5·17 |
| 6 | 2·3 | 26 | 2·13 | 46 | 2·23 | 66 | 2·3·11 | 86 | 2·43 |
| 7 | **7** | 27 | $3^3$ | 47 | **47** | 67 | **67** | 87 | 3·29 |
| 8 | $2^3$ | 28 | $2^2\cdot 7$ | 48 | $2^4\cdot 3$ | 68 | $2^2\cdot 17$ | 88 | $2^3\cdot 11$ |
| 9 | $3^2$ | 29 | **29** | 49 | $7^2$ | 69 | 3·23 | 89 | **89** |
| 10 | 2·5 | 30 | 2·3·5 | 50 | $2\cdot 5^2$ | 70 | 2·5·7 | 90 | $2\cdot 3^2\cdot 5$ |
| 11 | **11** | 31 | **31** | 51 | 3·17 | 71 | **71** | 91 | 7·13 |
| 12 | $2^2\cdot 3$ | 32 | $2^5$ | 52 | $2^2\cdot 13$ | 72 | $2^3\cdot 3^2$ | 92 | $2^2\cdot 23$ |
| 13 | **13** | 33 | 3·11 | 53 | **53** | 73 | **73** | 93 | 3·31 |
| 14 | 2·7 | 34 | 2·17 | 54 | $2\cdot 3^3$ | 74 | 2·37 | 94 | 2·47 |
| 15 | 3·5 | 35 | 5·7 | 55 | 5·11 | 75 | $3\cdot 5^2$ | 95 | 5·19 |
| 16 | $2^4$ | 36 | $2^2\cdot 3^2$ | 56 | $2^3\cdot 7$ | 76 | $2^2\cdot 19$ | 96 | $2^5\cdot 3$ |
| 17 | **17** | 37 | **37** | 57 | 3·19 | 77 | 7·11 | 97 | **97** |
| 18 | $2\cdot 3^2$ | 38 | 2·19 | 58 | 2·29 | 78 | 2·3·13 | 98 | $2\cdot 7^2$ |
| 19 | **19** | 39 | 3·13 | 59 | **59** | 79 | **79** | 99 | $3^2\cdot 11$ |
| 20 | $2^2\cdot 5$ | 40 | $2^3\cdot 5$ | 60 | $2^2\cdot 3\cdot 5$ | 80 | $2^4\cdot 5$ | 100 | $2^2\cdot 5^2$ |

en.wikipedia.org/wiki/Table_of_prime_factors

Auf den folgenden Seiten findest du Beispiele für ein Programm, mit dem man das Problem lösen kann (in Python und Octave/Matlab) und einen mathematischen “Beweis”.
Python (mit Numpy) [onecompiler.com/python/3z6b6kp7k](onecompiler.com/python/3z6b6kp7k)
Python (mit List und Modulo) [onecompiler.com/python/3z6b6wwmn](onecompiler.com/python/3z6b6wwmn)

```python

# The Light Switch Problem (Python using a list and the modulo operator --> %)

n = 100                                   # number of persons/switches
list_of_switches = [0] * n                # create a list with all switches turned off (0)
for person in range(n):                   # cycle through all 100 persons
    for switch in range(n):               # and for each person through all 100 switches
        if (switch+1)%(person+1) == 0:    # check if the number of the person is a divider of
                                          # the number of the respective switch (using modulo)
            list_of_switches[switch] = not list_of_switches[switch] # if so: flip the switch

print('')
for switch in range(n):                   # final check if a switch is turned on (1) or off (0)
    if list_of_switches[switch]:          # and write down its position if its turned on (1)
        print(switch+1)
print('')
```

PROBLEMS OUTPUT DEBUG CONSOLE TERMINAL

```
1
4
9
16
25
36
49
64
81
100
```

Matlab/Octave [https://onecompiler.com/octave/3z6b6z32j](https://onecompiler.com/octave/3z6b6z32j)

```matlab

# The Light Switch Problem (using Matlab/Octave)

n = 100;                                  # number of persons/switches
switches = zeros(n,1);                    # create an array (vector) with all switches turned off (0)
for i = 1:n
    switches(i:i:end) = ~switches(i:i:end); # flip every 2nd, 3rd, 4th, ... n-th switch
end
switches_on = find(switches == 1);        # find all switches that are turned on
disp(switches_on)



```

PROBLEMS OUTPUT DEBUG CONSOLE TERMINAL Filter (e.g. text, !exclude)

```
    1
    4
    9
   16
   25
   36
   49
   64
   81
  100
```

**Beweis:**

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl größer als 1, so kann man diese immer als ein Produkt aus $k$ unterschiedlichen Primzahlen $p$ schreiben (Primfaktorzerlegung, mit $p, k \in \mathbb{N}$), zum Beispiel $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$:

$$n = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot p_3^{c_1} \cdot ... \cdot p_k^{c_k}$$

Die Anzahl der Faktoren bzw. Teiler (eng: divisors) $d(n)$ einer Zahl setzt sich aus allen möglichen Kombinationen der Primfaktoren zusammen. Die Zahl $24 = 2^3 \cdot 3^1$ hat zum Beispiel acht unterschiedliche Faktoren $d(n) = 8$, die sich wie folgt zusammensetzen:

$$\begin{aligned}
2^0 \cdot 3^0 &= 1 \\
2^1 \cdot 3^0 &= 2 \\
2^2 \cdot 3^0 &= 4 \\
2^3 \cdot 3^0 &= 8 \\
2^0 \cdot 3^1 &= 3 \\
2^1 \cdot 3^1 &= 6 \\
2^2 \cdot 3^1 &= 12 \\
2^3 \cdot 3^1 &= 24
\end{aligned}$$

Wenn man dies auf die obige Schreibweise der Primfaktorzerlegung verallgemeinert, gilt nach dem allgemeinen Zählprinzip (vgl. de.serlo.org/mathe/29910/zählprinzip) für die Anzahl der Faktoren bzw. Teiler einer beliebigen natürlichen Zahl der folgende Zusammenhang:

$$d(n) = (c_1 + 1) \cdot (c_2 + 1) \cdot (c_3 + 1) \cdot ... \cdot (c_k + 1)$$

Man erkennt, dass man die um 1 vergrößerten Exponenten miteinander multiplizieren muss.

Eine Quadratzahl ist definiert als eine natürliche Zahl, die mit sich selbst multipliziert wird. Das bedeutet, dass definitionsgemäß die Primfaktoren einer Quadratzahl immer in Duplikaten vorkommen und der Exponent dieser somit immer gerade sein muss, bzw. die um 1 vergrößerten Exponenten ungerade. Somit muss $d(n)$, das in diesem Fall aus der Multiplikation von ausschließlich ungeraden Zahlen besteht, selbst ungerade sein (dies kann in einem gesonderten Beweis gezeigt werden). Damit wurde gezeigt, dass Quadratzahlen eine ungerade Anzahl von Faktoren besitzen. Sobald einer der Exponenten der Primfaktoren einer Zahl ungerade wäre, würde der um 1 vergrößerte Exponent eine gerade Zahl sein und somit $d(n)$ ebenfalls gerade, woraus man schließen kann, dass **nur** Quadratzahlen eine ungerade Anzahl an Faktoren besitzen und daher nur diese Lichtschalter am Ende eingeschaltet sind.

### Quellen


- en.wikipedia.org/wiki/Table_of_prime_factors
- de.wikipedia.org/wiki/Hochzusammengesetzte_Zahl
- youtu.be/-UBDRX6bk-A


### Weiterführende Links

Das Problem findet man in der Literatur auch unter dem Namen: “The Locker Problem”.

- 36university.com/act-math-locker-problem-solu'on/
- ed.ted.com/lessons/can-you-solve-the-locker-riddle-lisa-winer

- youtu.be/c18GjbnZXMw
- stanwagon.com/public/torrencewagon.pdf