Problem des Monats Juni 2023

LÖSUNGSHINWEISE

Lösungen und didaktische Hinweise

Aufgabe 1

Individuell werden Zahlen gefunden, die viele Teiler haben.
Es kann die Strategie der Primzahlzerlegung entwickelt oder besprochen werden.

Aufgabe 2

a) 1: ist trivialerweise hcn, da sie die erste positive ganze Zahl ist.
2: hat die Teiler 1 und 2, also einen mehr als die Zahl 1. Daher ist 2 hcn.
3: ist nicht hcn, da sie als Primzahl gleich viele Teiler hat wie 2
Gleiches gilt für alle Primzahlen
4: hat die Teiler 1, 2 und 4 und damit mehr Teiler als 1, 2 und 3. Damit ist 4 hcn.
6: hat 4 Teiler (1, 2, 3, 6), also einen mehr als 4 und ist damit hcn.
…

b) Nachweis durch Ausprobieren
Die Teilermengen aller Zahlen von 1 bis 60 können gefunden werden (s. Tabelle im Anhang).
60 ist die erste Zahl mit 12 Teilern (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60).

Nachweis durch Überlegen
Primfaktorzerlegung
$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
Teiler sind also 1 und alle Kombinationen ohne Wiederholung aus den vier Primfaktoren.

Andere Zahlen mit 12 Teilern müssen gleich viele solcher Kombinationen ihrer Primfaktoren haben.
Besondere Bedingungen werden in Aufgabenteil 3c) erarbeitet und können bereits hier als Argument genannt werden. Für eine Lösung: siehe dort.

Aufgabe 3

a) $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

b) $300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2$
Anzahl der Teiler von 300: $(2+1) \cdot (2+1) \cdot (2+1) = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$.

Das sind genauso viele wie bei der kleineren, hochzusammengesetzten Zahl 180.
$600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$
Anzahl der Teiler von 600: $(3+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.
Das sind genauso viele wie bei der kleineren, hochzusammengesetzten Zahl 360.
$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$
Anzahl der Teiler von 2016: $(5+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$.
Das sind genauso viele wie bei der kleineren, hochzusammengesetzten Zahl 1260.
$1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$.

c) Zwei notwendige Eigenschaften einer hochzusammengesetzten Zahl n ergeben sich aus der Teileranzahlfunktion $d(n)$.
Jede natürliche Zahl n besitzt eine eindeutige Primfaktorzerlegung (PFZ)
$n = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{c_k}$, wobei p_i mit dem Index i ansteigende Primzahlen sind.
Die Exponenten sind natürliche Zahlen ungleich 0.

Für $k = 0$ ergibt sich das leere Produkt $n = 1$.

Alle möglichen Kombinationen der Primfaktoren in ihrer Vielfachheit ergeben die Teileranzahl $d(n)$ zu $d(n) = (c_1 + 1) \cdot (c_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (c_k + 1)$.

Daraus ergeben sich zwei notwendige Bedingungen für die PFZ:
Die PFZ muss die ersten k Primzahlen enthalten, sonst könnte eine ausgelassene Primzahl eine größere ersetzen und damit eine kleinere Zahl mit gleicher Teileranzahl ergeben.
Die Folge der Exponenten muss absteigend sein, da es sonst möglich wäre, durch Vertauschung von Exponenten eine kleinere Zahl mit gleicher Teileranzahl zu erhalten.
Eine weitere notwendige Bedingung ist:
Der Exponent der größten Primzahl in der PFZ muss 1 sein, ausgenommen bei den Quadratzahlen 1, 4 und 36.
Dies sind die einzigen Quadratzahlen, die hochzusammengesetzt sind.

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Hochzusammengesetzte_Zahl (vom 31.5.23)

Didaktische Vorschläge:
Die Teileranzahlfunktion bietet interessante Erkenntnisse, die auch nachgewiesen werden können. Beispielsweise:
Zeige, dass für die Teileranzahlfunktion d gilt:
d(n) ist ungerade $\Leftrightarrow$ n ist eine Quadratzahl.

Beweis:
Wenn a ein Teiler von n ist, dann ist auch $\frac{n}{a}$ ein Teiler von n.

Falls n keine Quadratzahl ist, dann lassen sich die Teiler in Paare $\left(a, \frac{n}{a}\right)$ aufteilen, und somit ist die Anzahl der Teiler von n dann gerade.
Ist $n = x^2$ hingegen eine Quadratzahl, dann lassen sich alle Teiler bis auf $x = \frac{n}{x}$ in Paare aufteilen und daher ist die Anzahl der Teiler dann ungerade.

Quellen: Tag der Mathematik 2013, https://adi.dzlm.de/teilbarkeit/teileranzahl-einer-zahl

Auf dem youtube-channel Numberphile erklärt Dr. James Grime die gesuchten Zusammenhänge.
Als Ergänzung und Auflockerung kann dieses Video geschaut werden.
https://www.youtube.com/watch?v=2JM2oImb9Qg
Hinweis: Es handelt sich um ein englisches Video.

Erweiterung durch Aufgabe 4
Besonders hochzusammengesetzte Zahlen b sind solche, die erst von ihrem Doppelten in der Teileranzahl übertroffen werden. Finde solche besonders hochzusammengesetzte Zahlen. Zeige, dass es genau 7 dieser Zahlen gibt.

Lösung zu Aufgabe 4
Allgemein kann man eine hochzusammengesetzte Zahl in der PFZ so darstellen:
$b = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot \ldots$ mit $x \geq y \geq z$ usw.

$2b = 2^{x+1} \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot \ldots$

Zahlen zwischen b und $2b$ da wären: $b_1 = 2^{x-1} \cdot 3^{y+1} \cdot 5^z \cdot \ldots$
Oder auch: $b_2 = 2^{x+2} \cdot 3^{y-1} \cdot 5^z \cdot \ldots$

b_1 und b_2 liegen zwischen b und 2b, denn $\frac{b_1}{b} = \frac{3}{2}$ und $\frac{b_2}{b} = \frac{4}{3}$.

Zahl	Anzahl der Teiler
$b = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot \ldots$	$(x+1) \cdot (y+1)$
$b_1 = 2^{x-1} \cdot 3^{y+1} \cdot 5^z \cdot \ldots$	$x \cdot (y+2)$
$b_2 = 2^{x+2} \cdot 3^{y-1} \cdot 5^z \cdot \ldots$	$(x+3) \cdot y$
$2b = 2^{x+1} \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot \ldots$	$(x+2) \cdot (y+1)$

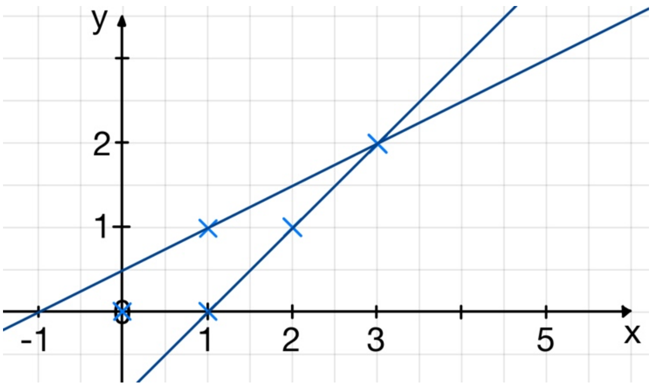
(*)

Die Teileranzahlen von b_1 und b_2 müssen größer sein als die Teileranzahl von b.
Daher müssen dann folgende Gleichungen gelten:

$x \cdot (y+2) > (x+1) \cdot (y+1) \Leftrightarrow y < x - 1$ (A)
bzw.
$(x+3) \cdot y > (x+1) \cdot (y+1) \Leftrightarrow y > \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (B)

Somit lassen sich durch Zahlentupel $(x|y)$ jeweils Zahlen b_1 oder b_2 konstruieren, die mehr Teiler haben als b, aber nicht doppelt so groß wie b sind. Diese Punktpaare führen demnach nicht zu besonders hochzusammengesetzten Zahlen.

Zur Übersicht stellen wir die Ungleichungen (A) und (B) anschaulich dar:



Wir untersuchen nun, ob die oben die eingezeichneten Punktpaare $(x|y)$ Lösungen liefern, die (A) und (B) nicht genügen.

$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (\mathbf{0}|\mathbf{0})$
$b = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot ... = 1$
wird erst von ihrem Doppelten, also 2, in der Teileranzahl übertroffen.

$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (\mathbf{1}|\mathbf{0})$
$b = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot ... = 2$
wird erst von ihrem Doppelten, also 4, in der Teileranzahl übertroffen.

$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (\mathbf{1}|\mathbf{1})$
$b = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^z \cdot ...$
$b = 2^1 \cdot 3^1 = 6$
wird erst von ihrem Doppelten, also 12, in der Teileranzahl übertroffen.

$b = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot r$
kann dagegen keine besonders hochzerlegbare Zahl mehr sein.
Wir tauschen den Linearfaktor „5“ gegen eine „6“ und erhalten $b_1 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot r$.
b_1 ist kleiner als das Doppelte von b, wie $\frac{b_1}{b} = \frac{6}{5} < 2$ zeigt.
b_1 hat aber mehr Teiler als b, wie $\frac{d(b_1)}{d(b)} = \frac{9}{8} > 1$ zeigt.

$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (\mathbf{2}|\mathbf{1})$
$b = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^z \cdot ...$
$b = 2^2 \cdot 3^1 = 12$
wird erst von ihrem Doppelten, also 24, in der Teileranzahl übertroffen.

$b = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$
wird erst von ihrem Doppelten, also 120, in der Teileranzahl übertroffen.

$b = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot r$ kann dagegen keine besonders hochzerlegbare Zahl mehr sein.
Wir tauschen den Linearfaktor „7“ gegen eine „12“ und erhalten $b_1 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot r$.
b_1 ist kleiner als das Doppelte von b, wie $\frac{b_1}{b} = \frac{12}{7} < 2$ zeigt.
b_1 hat aber mehr Teiler als b, wie $\frac{d(b_1)}{d(b)} = \frac{30}{24} > 1$ zeigt.

Es lohnt sich auch darüber nachzudenken, ob statt „7“ eine „8“ gewählt werden kann. Es ergibt sich $b_1 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot r$ und damit $\frac{b_1}{b} = \frac{8}{7} < 2$ sowie $\frac{d(b_1)}{d(b)} = \frac{20}{24} < 1$, b_1 hat also nicht mehr Teiler!

$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (\mathbf{3}|\mathbf{2})$
$b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^z \cdot ...$
$b = 2^3 \cdot 3^2 = 72$
wird bereits von $b_1 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 120$ in der Teileranzahl übertroffen, wie $\frac{d(b_1)}{d(b)} = \frac{16}{12}$ zeigt.

$b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360$
wird erst von ihrem Doppelten, also 720, in der Teileranzahl übertroffen.

Höhere Potenzen der 5 führen zu keinen weiteren Lösungen, wie folgende Überlegungen zeigen.

Ausgehend von $b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot r$ ersetzt man eine 5 durch eine 6 und wir erhalten $b_1 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot r$ mit $\frac{b_1}{b} = \frac{6}{5}$ sowie $\frac{d(b_1)}{d(b)} = \frac{40}{36}$.

$b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 2520$ wird erst von 5040 in der Teileranzahl übertroffen.

$b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot r$ kann dagegen keine besonders hochzerlegbare Zahl mehr sein. Wir tauschen den Linearfaktor „11" gegen eine „18" und erhalten
$b_1 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot r$.
b_1 ist kleiner als das Doppelte von b, wie $\frac{b_1}{b} = \frac{18}{11} < 2$ zeigt.
b_1 hat aber mehr Teiler als b, wie $\frac{d(b_1)}{d(b)} = \frac{100}{96} > 1$ zeigt.
Es lohnt sich auch darüber nachzudenken, ob statt „11" eine „12" gewählt werden kann. Es ergibt sich $b_1 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot r$ und damit $\frac{b_1}{b} = \frac{12}{11} < 2$ sowie $\frac{d(b_1)}{d(b)} = \frac{96}{96} = 1$,
b_1 hat also gleich viele und nicht mehr Teiler!

Die gefundenen sieben besondere hochzusammengesetzte Zahlen sind damit:
1, 2, 6, 12, 60, 360, 2520.

Didaktische Anmerkung:
Auch folgende weitere Zahl zwischen b und $2b$ wäre bei (*) denkbar:

Zahl	Anzahl der Teiler
$b = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot \ldots$	$(x+1) \cdot (y+1) \cdot (z+1)$
$b_1 = 2^{x-1} \cdot 3^{y+1} \cdot 5^z \cdot \ldots$	$x \cdot (y+2) \cdot (z+1)$
$b_2 = 2^{x+2} \cdot 3^{y-1} \cdot 5^z \cdot \ldots$	$(x+3) \cdot y \cdot (z+1)$
$b_3 = 2^{x-2} \cdot 3^y \cdot 5^{z+1} \cdot \ldots$	$(x+1) \cdot (y+1) \cdot (z+2)$

Diese fügt dem o.g. eine weitere Ungleichung hinzu und erzeugt einen 3-D-Lösungsraum.

<u>Anhang:</u> Teiler der Zahlen von 1 bis 121

Zahl	Anzahl Teiler	Teiler
1	1	1
2	2	1, 2
3	2	1, 3
4	3	1, 2, 4
5	2	1, 5
6	4	1, 2, 3, 6
7	2	1, 7
8	4	1, 2, 4, 8
9	3	1, 3, 9
10	4	1, 2, 5, 10
11	2	1, 11
12	6	1, 2, 3, 4, 6, 12
13	2	1, 13
14	4	1, 2, 7, 14
15	4	1, 3, 5, 15
16	5	1, 2, 4, 8, 16
17	2	1, 17
18	6	1, 2, 3, 6, 9, 18
19	2	1, 19
20	6	1, 2, 4, 5, 10, 20
21	4	1, 3, 7, 21
22	4	1, 2, 11, 22
23	2	1, 23
24	8	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
25	3	1, 5, 25
26	4	1, 2, 13, 26
27	4	1, 3, 9, 24
28	6	1, 2, 4, 7, 14, 28
29	2	1, 29
30	8	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
31	2	1, 31
32	6	1, 2, 4, 8, 16, 32
33	4	1, 3, 11, 33
34	4	1, 2, 17, 34
35	4	1, 5, 7, 35
36	9	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
37	2	1, 37
38	4	1, 2, 19, 38
39	4	1, 3, 13, 39
40	8	1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40
41	2	1, 41
42	8	1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42
43	2	1, 43
44	6	1, 2, 4, 11 ,22, 44
45	6	1, 3, 5, 9, 15, 45
46	4	1, 2, 23, 46
47	2	1, 47
48	10	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48
49	3	1, 7, 49
50	6	1, 2, 5, 10, 25, 50

Zahl	Anzahl Teiler	Teiler
51	4	1, 3, 17, 51
52	6	1, 2, 4, 13, 26, 52
53	2	1, 53
54	8	1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54
55	4	1, 5, 11, 55
56	8	1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56
57	4	1, 3, 19, 57
58	4	1, 2, 29, 58
59	2	1, 59
60	12	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60
61	2	1, 61
62	4	1, 2, 31, 62
63	6	1, 3, 7, 9, 21, 63
64	7	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64
65	4	1, 5, 13, 65
66	8	1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66
67	2	1, 67
68	6	1, 2, 4, 17, 34, 68
69	4	1, 3, 23, 69
70	8	1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70
71	2	1, 71
72	12	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72
73	2	1, 73
74	4	1, 2, 37, 74
75	6	1, 3, 5, 15, 25, 75
76	6	1, 2, 4, 19, 38, 76
77	4	1, 7, 11, 77
78	8	1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78
79	2	1, 79
80	10	1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80
81	5	1, 3, 9, 27, 81
82	4	1, 2, 41, 82
83	2	1, 83
84	12	1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84
85	4	1, 5, 17, 85
86	4	1, 2, 43, 86
87	4	1, 3, 29, 87
88	8	1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88
89	2	1, 89
90	12	1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90
91	4	1, 7, 13, 91
92	6	1, 2, 4, 23, 46, 92
93	4	1, 3, 31, 91
94	4	1, 2, 47, 94
95	4	1, 5, 19, 95
96	12	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96
97	2	1, 97
98	6	1, 2, 7, 14, 49, 98
99	6	1, 3, 9, 11, 33, 99
100	9	1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

Zahl	Anzahl Teiler	Teiler
101	2	1, 101
102	8	1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102
103	2	1, 103
104	8	1, 2, 4, 8, 13, 26, 52, 104
105	8	1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105
106	4	1, 2, 53, 106
107	2	1, 107
108	12	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108
109	2	1, 109
110	8	1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110
111	4	1, 3, 37, 111
112	10	1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112
113	2	1, 113
114	8	1, 2, 3, 6, 19, 38, 57, 114
115	4	1, 5, 23, 115
116	6	1, 2, 4, 29, 58, 116
117	6	1, 3, 9, 13, 39, 117
118	4	1, 2, 59, 118
119	4	1, 7, 17, 119
120	16	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120
121	3	1, 11, 121

Teiler, Teileranzahl und Primfaktorzerlegung können natürlich überlegt werden oder über https://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/primzahlen.htm abgerufen werden.