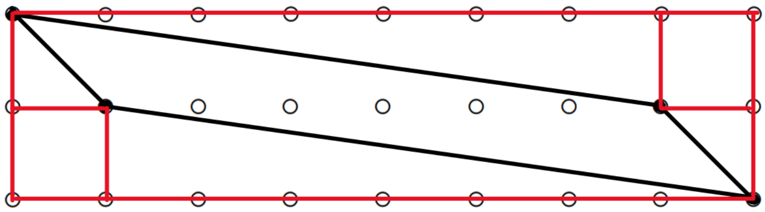
Problem des Monats September 2023

LÖSUNGSHINWEISE

Lösungen und didaktische Hinweise

Bemerkung: Statt Vieleck kann man auch den Begriff Polygon verwenden.

Aufgabe 1
Der Flächeninhalt ist immer ganzzahlig. Man schreibt das Gitter-Parallelogramm P in ein achsenparalleles Rechteck R ein. Der Flächeninhalt von P ergibt sich durch R minus zwei kleinere Rechtecke minus vier rechtwinklige Dreiecke (alle diese Objekte sind Gitter-Vielecke).
Beispiel:



Oberstufe: Der Flächeninhalt von P ist gleich dem Betrag der Determinante, in welche man die von einer Ecke ausgehenden Kantenvektoren hineinschreibt.

Aufgabe 2
Dreiecke sind halbe Parallelogramme und alle Vielecke lassen sich in Dreiecke zerschneiden. Deshalb ist der Flächeninhalt von Gitter-Vielecken immer ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{2}$.

Mögliche Erweiterung: Bei welchen Viereckstypen außer den Parallelogrammen ergeben sich immer ganzzahlige Flächeninhalte?
Antwort: Drachen und symmetrische Trapeze.

Oberstufe: In 3D gilt das nicht, man betrachte z.B. ein beliebiges Gitter-Rechteck.

Aufgabe 3
Nach Zeichnen hinreichend vieler Beispiele sieht man bzw. vermutet man, dass der Flächeninhalt eines Gitter-Vielecks gleich 0,5K + I – 1 ist. In der Literatur ist dies unter dem Namen " Satz von Pick" bekannt (1899).

Erweiterung für Oberstufe: Das Vektorprodukt von zwei Vektoren $\vec{a}\ und\ \vec{b}$ ist definiert durch: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 & -a_3 b_2 \\ a_3 b_1 & -a_1 b_3 \\ a_1 b_2 & -a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Welche geometrische Interpretation haben die Terme für die drei Komponenten im ganz rechts stehenden Vektor?

Antwort: Die beiden Vektoren spannen ein Parallelogramm auf. Die Komponenten des Vektorprodukts geben die Flächeninhalte der Parallelogramme an, die sich durch Projektion dieses im Raum liegenden Parallelogramms auf die Koordinatenebenen ergeben.

Als weitere Übung kann man folgendes untersuchen lassen: Wenn die Projektionen eines im Raums liegenden Parallelogramms alle ganzzahligen Flächeninhalt haben, muss dann auch der Flächeninhalt des im Raum liegenden ursprünglichen Parallelogramms ganzzahlig sein.

Links:

https://www.spektrum.de/kolumne/satz-von-pick-flaecheninhalt-berechnen-ohne-schwere-formel/2024500

https://www2.informatik.hu-berlin.de/~koessler/Proseminar/Proseminar2021/Ziolkowski_Satz_von_Pick2.pdf

https://www.geogebra.org/m/kkcs9kkQ