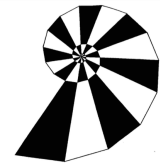

Problem des Monats Oktober 2023



LÖSUNGSHINWEISE

Lösungshinweise und weiteres Material

a) Durch Probieren gelangt man schnell zu der Frage, wie das Spiel eröffnet werden soll. Wir haben genau zwei Optionen zu beginnen: Zwei gleiche (AA) oder zwei verschiedene Farben (AB). Die Wahl der Farbe „A“ ist dabei beliebig und zufällig. Im Wissen darum, dass es genau 9 Farbkombinationen (RR, RG, RB, GR, GG, GB, BR, BG, BB) gibt, kann es zu folgendem Feedback nach dem ersten Tipp kommen:

00 (kein korrekter Platz und auch keine korrekte Farbe)

01 (kein korrekter Platz und eine korrekte Farbe)

02 (kein korrekter Platz und zwei korrekte Farben)

10 (ein korrekter Platz und keine korrekte Farbe)

20 (zwei korrekte Plätze = Code erraten)

Einige Feedbacks sind hierbei nicht möglich (n.m.).

Im Folgenden werden von den 9 Farbkombinationen die Anzahl aufgeführt, die nach dem Feedback noch möglich sind.

Antwort	1. Rateversuch	
	AA	AB
00	4	Fertig im 2. Versuch (übrig CC)
01	n.m.	2
02	n.m.	Fertig im 2. Versuch (übrig BA)
10	4	4
20	Fertig (AA)	Fertig (AB)

Die Spaltensumme entspricht hierbei der Anzahl der Möglichkeiten 9, wenn man sich auch für den direkten Lösungsfall überlegt, dass ebenfalls genau eine Möglichkeit dahintersteckt.

Es zeigt sich auf den ersten Blick erstmal, dass die Optionen AA und AB (scheinbar) gleichwertig sind, weil in beiden Fällen maximal 4 Möglichkeiten bei einem Feedback (10, bzw. bei AA auch 00) übrigbleiben. Für die 4 Situationen kann nun neu untersucht werden, wie es weitergehen könnte.

1. Fall AA mit Feedback 00
(übrig sind BB, BC, CB, CC)

Feedback	2. Rateversuch	
	BB	BC
00	Fertig im 3. Versuch (CC)	n.m.
02	n.m.	Fertig im 3. Versuch (CB)
10	2	2
20	Fertig (BB)	Fertig (BC)

2. Fall AA mit Feedback 10
(übrig sind AB, AC, BA, CA)

Feedback	2. Rateversuch	
		AB
01		Fertig im 3. V. (CA)
02		Fertig im 3. Versuch (BA)
10		Fertig im 3. V. (AC)
20		Fertig (AB)

Damit wird im Fall von 10 ggf. ein 4. Versuch benötigt.

3. Fall AB mit Feedback 01
(übrig sind BC, CA)

Feedback	2. Rateversuch
	BC
01	Fertig im 3. V. (CA)
20	Fertig (BC)

4. Fall AB mit Feedback 10
(übrig sind AA, AC, CB, BB)

Feedback	2. Rateversuch	
	AA	AC
00	2	Fertig im 3. V. (BB)
02	n.m.	Fertig im 3. V. (CA)
10	Fertig im 3. V. (AC)	Fertig im 3. V. (AA)
20	Fertig (AA)	Fertig (AC)

Der 4. Fall zeigt, dass die Wahl von AC bereits im 3. Versuch garantiert zur Lösung führt!

c)

1. Die richtige Antwort ist RRRG.
2. Es gibt als Möglichkeiten wieder 20 oder 02 zu bekommen. Daraus ergeben sich schnell die möglichen Lösungen.
3. RBPS wurde geraten, alle Permutationen, die nicht RBPS auf ihren Plätzen lässt sind:
BRSP, BPSR, BSRP und alle entsprechenden mit P und S am Anfang.
4. Hier wurden BROR und SGRB gezogen, es bleiben die Möglichkeiten BOOB, BBOB, BPOB, PRRR, RRRR.

Weitere Aufgaben findet man am Ende der Examensarbeit von Lang.

d)

Auf dem Weg, das Originalspiel Mastermind zu meistern, können Dir folgende Fragen hilfreich sein:

Frage 1: Wie viele Kombinationen gibt es insgesamt/aktuell?

Frage 2: Welche Codes sind vermutlich besonders schwer zu knacken, welche besonders leicht?

Frage 3: Welchen Befehl müsste man einem Computer geben, damit er einem die Entscheidung für den nächsten Rateversuch erleichtert?

Frage 4: Welche Rateversuche sind wohl lohnender als andere?

WICHTIG: Zum Anhang:

Im Anhang befindet sich die Examensarbeit von Alexander Lang. Diese Arbeit kann man kostenpflichtig erwerben. Wir haben ihn kontaktiert und dürfen den Inhalt im Rahmen des Mathezirkels benutzen.

In der Examensarbeit finden sich ausführliche Antworten auf die meisten Fragen und außerdem eine sehr lohnende Schablone, mit der man das Spiel sicher in maximal 5 Zügen lösen kann. Diese Schablone kann man ausdrucken und basteln, was wir sehr empfehlen, aber man kann sie auch digital nutzen.

Außerdem befinden sich am Ende der Arbeit viele schöne kleine, geschlossene Rätselaufgaben zu Mastermind und deren Lösungen.

Lösungsvorschlag zu Frage 1:

Hier werden viele Grundlagen der Kombinatorik überprüft.

Einerseits gibt es natürlich $4^6=1296$ Möglichkeiten, andererseits kommt man bei 4 verschiedenen Farben auch auf die Fakultät ($4!=24$). Schließlich kommt man sogar indirekt auf den Binomialkoeffizienten, wenn man prüfen muss, wie viele Kombinationen es gibt, eine Farbe 2 Mal einzubringen ($4 \text{ über } 2 = 6$)

Lösungsvorschlag zu Frage 2:

Viermal die gleiche Farbe ist leichter zu knacken als 4 verschiedene Farben. Einer der Gründe ist auch, dass unerfahrene, aber strukturiert denkende Spieler gerne starten, indem sie nur eine Farbe raten. Da unerfahrene Spieler oft die Möglichkeit übersehen, dass eine Farbe doppelt vorkommen kann, lohnt es sich, mindestens eine Farbe zweimal zu wählen, gerne nicht direkt nebeneinander.

Eine endgültige Antwort gibt es eher nicht, da es von der Spielweise des Gegners, also auch von der Psychologie abhängt. Im Anhang (Lösungstabellen) findet man auch Hinweise auf eine Beantwortung der Frage.

Lösungsvorschlag zu Frage 3:

Probiere alle noch möglichen Kombinationen als Rateversuch aus und gib mir den Rateversuch, bei dem mit Sicherheit (der Gegner darf seine Farben im Rahmen des Erlaubten noch ändern) am wenigsten Lösungen übrigbleiben, die theoretisch noch möglich sind.

ODER

Spiele unendlich oft und gib mir den Rateversuch, der am schnellsten zum Ziel führt.

Lösungsvorschlag zu Frage 4:

Hier gibt es verschiedene Ansätze. Als ideal gilt ein Versuch der Art AABB. Der Grund dafür ist, dass er mit Sicherheit die meisten Kombinationen im Worstcase-Szenario eliminiert. (Siehe Lösungstabellen im Anhang) (Vereinfacht am Ende der Lösungen dargestellt)

Natürlich ist auch CFFC ein gleichwertiger Rateversuch, jedoch weniger übersichtlich. Der Versuch AABC ist vermutlich ähnlich gut, aber deutlich komplexer ohne Hilfsmittel zu verarbeiten.

Der Versuch AAAA ist leicht zu verarbeiten, benötigt aber im Durchschnitt mehr Rateversuche, da er weniger Informationen liefert.

Letztlich ist es tatsächlich möglich, über die Auflistung aller Kombinationen, dieses Spiel (zumindest nach dieser Methode) perfekt zu spielen.

Es gibt im Internet noch zahlreiche andere Strategien, die den Erwartungswert sogar noch leicht verbessern, aber in einem Bereich, der für einen Spaß-Spieler nicht relevant ist und den Erwartungswert von 4,··· Rateversuchen kaum verändert. Bei unserer Methode kann jeder Code in maximal 5 Zügen geknackt werden.

Vereinfachte Lösung zum idealen Spiel:

Theoretisch gibt es 5 verschiedene Eröffnungen. Wir bezeichnen sie mit

AAAA das sind 4 gleiche Farben

AAAB das sind 3 gleiche Farben und eine andere

AABB das sind 2 und 2 gleiche Farben

AABC das sind 2 gleiche Farben und je zwei andere Farben

ABCD das sind je 4 verschiedene Farben

Als Antwort gibt es beim 64-Mastermind nur 14 mögliche Antworten:

00 kein richtiger Platz und keine richtige Farbe

01 kein richtiger Platz aber 1 richtige Farbe

02 kein richtiger Platz aber 2 richtige Farben

03 kein richtiger Platz aber 3 richtige Farben

04 kein richtiger Platz aber 4 richtige Farben

10 1 richtiger Platz und keine richtige Farbe

11 1 richtiger Platz und 1 richtige Farbe

12 1 richtiger Platz und 2 richtige Farben

13 1 richtiger Platz und 3 richtige Farben

20 2 richtige Plätze und keine richtige Farbe

21 2 richtige Plätze und 1 richtige Farbe

22 2 richtige Plätze und 2 richtige Farben

30 3 richtige Plätze und keine richtige Farbe

40 alle Plätze sind richtig

Für Jeden Rateversuch müssen wir nun die verbleibenden Codes berechnen.

Bei 00 zum Beispiel ist klar, dass die Farbe A nicht vorkommt. Also haben wir nur noch 5^4 -Möglichkeiten.

Bei 01 als Antwort ist die Farbkombination AAAA nicht möglich, da wenn eine Farbe stimmt, müsste sie ja auch irgendwo richtig sein. Also: **n.m. = nicht möglich**

Antwort	1. Rateversuch				
	AAAA	AAAB	AABB	AABC	ABCD
00	625	256	256	81	16
01	n.m.	308	256	276	152
02	n.m.	61	96	222	312
03	n.m.	n.m.	16	44	136
04	n.m.	n.m.	1	2	9
10	500	317	256	182	108
11	n.m.	156	208	230	252
12	n.m.	27	36	84	132
13	n.m.	n.m.	n.m.	4	8
20	150	123	114	105	96
21	n.m.	24	32	40	48
22	n.m.	3	4	5	6
30	20	20	20	20	20
40	1	1	1	1	1

Insgesamt gibt es am Anfang 1'296 Kombinationen, wie die 6 Farben mit Wiederholungen gesetzt werden können. Die Möglichkeiten verringern sich bei jedem Rateversuch.

Wir lesen in der obigen Tabelle, dass der Rateversuch mit AABB die grösste Verringerung der Code-Möglichkeiten bewirkt:

1. Rateversuch	Grösste Zahl
AAAA	625
AAAB	317
AABB	256
AABC	276
ABCD	312

Fazit: Unser erster Rateversuch besteht aus 2-er Gruppen.

Wie kommt man zum zweiten optimalen Rateversuch?

Hier eine Tabelle zum zweiten Rateversuch, falls wir vorher die Variante AABB gewählt haben. In der rechten Spalte finden wir die verbleibenden Möglichkeiten.

1. Rateversuch	Antwort	2. Rateversuch	verbleibende Codes
AABB	00	CCDE	46
	01	BCDD	44
	02	BCDD	18
	03	ABAC	4
	04	BBAA	fertig
	10	ACDD	44
	11	AACD	38
	12	ABAC	7
	13	n.m.	-
	20	ABCD	20
	21	ABBC	6
	22	ABAC	1
	30	ABBC	5
	40	fertig	

Quelle: [Mathematische Strategie bei Mastermind – Meinstein](http://meinstein.ch/math/mathematische-strategie-bei-mastermind/)
 meinstein.ch/math/mathematische-strategie-bei-mastermind/