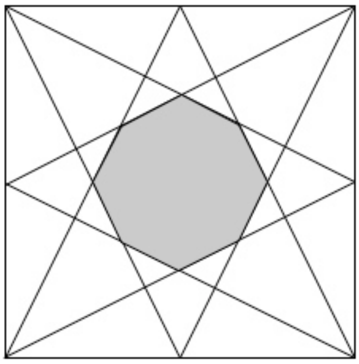
Problem des Monats April 2014: Das Achteck im Quadrat

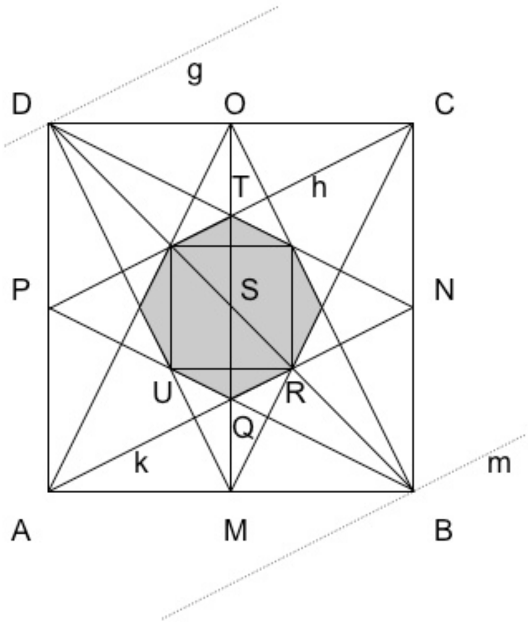


In einem Quadrat werden die Seitenmitten mit den Gegenecken verbunden, sodass in der Mitte das graue Achteck entsteht (vgl. nebenstehende Abbildung).

(a) Ermittle, welchen Bruchteil der Quadratfläche das Achteck einnimmt.

(b) Untersuche, ob das Achteck regelmäßig ist.

Lösungen:



(a) Die Strecke AB soll die Länge 1 haben, dann hat das Quadrat den Flächeninhalt 1. Mit diesen Festlegungen ist der Flächeninhalt des Achtecks gleichzeitig sein Anteil an der Quadratfläche.

Zeichnet man alle Diagonalen des Achtecks durch S (Schnittpunkt der Diagonalen im Quadrat) ein, zerlegen sie das Achteck in acht kongruente Dreiecke, von denen eines das Dreieck QRS ist.

Weil das Viereck PQTD ein Parallelogramm ist, hat die Seite QT die Länge 1/2, die Strecke SQ ist die Hälfte davon, hat also die Länge 1/4.

Die Geraden oder Strecken g, h, k und m sind parallel zueinander und die Abstände von g zu h, von h zu k und von k zu m sind gleich. Deshalb wird die Diagonale DB = d von ihnen in drei gleich lange Teile geschnitten. Das kleine Quadrat im Achteck hat eine Diagonale, die ein Drittel von d ist, deshalb ist die Seite UR auch ein Drittel von AB, d. h. 1/3.

Die Hälfte von UR ist Höhe im Dreieck QRS, so dass wir für den Flächeninhalt des Achtecks erhalten: 8 · Dreiecksfläche = 8 ·1/2 · 1/4 · 1/6 = 1/6 .

Der Flächeninhalt des Achtecks ist ein Sechstel des Flächeninhalts des äußeren Quadrats.

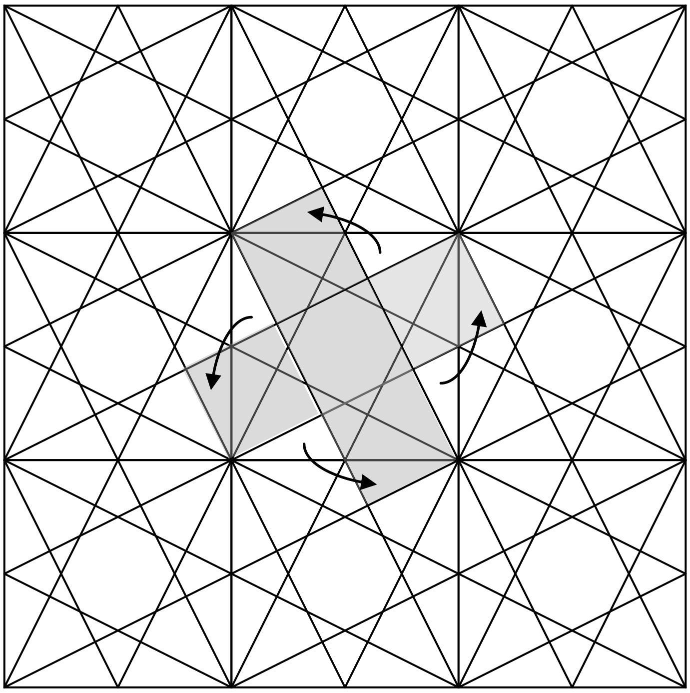
(b) Das Achteck wäre regelmäßig, wenn alle Punkte auf dem gleichen Kreis um S liegen würden. Die Eckpunkte des kleinen Quadrats liegen auf dem Kreis um S mit d/6. Die übrigen Punkte liegen auf einem Kreis um S mit dem Radius 1/4.

Das Dreieck ABD hat den Flächeninhalt 1/2. Aus vier solchen Dreiecken ließe sich ein Quadrat mit der Seitenlänge d zusammensetzen. Deshalb ist $d^2 = 2$. Vergleichen wir die Quadrate der Radien, so ist $(d/6)^2 = d^2/36 = 2/36 = 1/18$ und $(1/4)^2 = 1/16$.

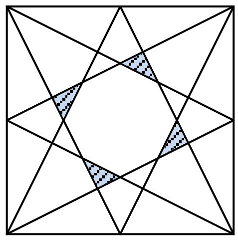
Da die Quadrate der Radien nicht übereinstimmen, sind die Radien auch nicht gleich, d. h. es gibt keinen Kreis auf dem alle Eckpunkte des Achtecks liegen. Damit kann das Achteck nicht regelmäßig sein.

Lösungsvariante zum Problem des Monats April 2014

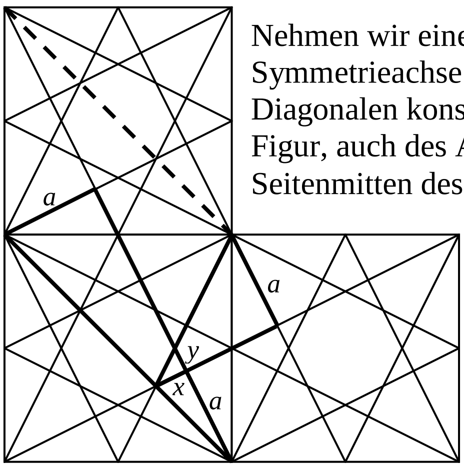
Das Ausgangsquadrat sei ein Einheitsquadrat.
Durch Aneinandersetzen mehrerer der gegebenen Figuren entstehe das nachfolgende Muster.



Das Feld von Einheitsquadraten wird durchsetzt von vier Streifenscharen, die paarweise senkrecht zueinander sind. In allen vier Streifenscharen sind die Streifenbreiten gleich. Zwei paarweise senkrechte Streifenscharen parkettieren die Ebene in gleich große Quadrate, die im Folgenden als „Klein-Quadrate“ (KQ) bezeichnet werden. Aus einfachen Kongruenzüberlegungen folgt, dass die Fläche eines solchen KQ den Flächeninhalt $\frac{1}{5}$ hat.



Das Achteck wird von einem KQ umschrieben. Der Flächeninhalt des Achtecks ergibt sich aus dem Flächeninhalt eines KQ abzüglich 4 Flächeninhalten von rechtwinkligen Dreiecken, die wegen der Rotationssymmetrie kongruent sein müssen. Die Katheten dieser Dreiecke seien mit *x* und *y*, die Seite eines KG mit *a* bezeichnet.



Nehmen wir eine Diagonale des Einheitsquadrats. Sie ist natürlich Symmetrieachse des Quadrats. Da die Figur symmetrisch zu der Diagonalen konstruiert wurde, ist sie auch Symmetrieachse der ganzen Figur, auch des Achtecks. Da sie offensichtlich nicht durch zwei Seitenmitten des Achtecks geht, geht sie durch Eckpunkte des Achtecks.

Aus Gründen der Ähnlichkeit (2. Strahlensatz) gilt:

(1): $\frac{x}{a} = \frac{a}{3a}$ bzw. $x = \frac{a}{3}$

(2): $\frac{y}{x} = \frac{a}{x+a}$

Einsetzen von (1) in (2) führt auf $\frac{y}{\frac{1}{3}a} = \frac{a}{\frac{4}{3}a}$ bzw. $y = \frac{a}{4}$. Damit ergibt sich als

Flächeninhalt eines Dreiecks $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{4} = \frac{1}{24} a^2$. Der Flächeninhalt des Achtecks

ist somit $A = A_\square - 4 \cdot A_\Delta = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{24} a^2 = \frac{5}{6} a^2$, und da $a^2 = \frac{1}{5}$ ist, beträgt er $\frac{1}{6}$.
Das Achteck kann nicht regelmäßig sein, da *x* und *y* verschieden groß sind.