Problem des Monats November 2016

Farey-Brüche

1. F_1: $\frac{0}{1}$; $\frac{1}{1}$

F_2: $\frac{0}{1}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{1}$

F_3: $\frac{0}{1}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{1}$

F_4: $\frac{0}{1}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{1}$

F_5: $\frac{0}{1}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{1}$

2. Man bemerkt zuerst, dass alle Folgeglieder von F_5 auch in F_{5+1} enthalten sein müssen. Daher müssen alle Brüche ergänzt werden, die den Nenner 6 enthalten. Außerdem braucht man unter diesen nur jene welche, die nicht kürzbar sind. Falls der Bruch nämlich kürzbar wäre, muss er bereits in F_5 vorkommen. Deshalb müssen F_5 lediglich $\frac{1}{6}$ und $\frac{5}{6}$ hinzugefügt werden. Unter den genannten Brüchen in F_5 sind diese der zweitkleinste bzw. zweitgrößte Bruch.

3. Es gilt zu zeigen, dass $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

für alle $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

Aus der Voraussetzung folgt erst einmal, dass $ad < bc$ (1)

Nun folgt:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot (b+d)}{b \cdot (b+d)} = \frac{ab+ad}{b \cdot (b+d)} \overset{(1)}{<} \frac{ab+bc}{b \cdot (b+d)} = \frac{b \cdot (a+c)}{b \cdot (b+d)} = \frac{a+c}{b+d}$$

Der erste Teil der Ungleichung $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ ist damit gezeigt.

Nun zum zweiten Teil:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{(a+c)d}{(b+d)d} = \frac{ad+cd}{(b+d)d} \overset{(1)}{=} \frac{bc+cd}{(b+d)d} = \frac{(b+d) \cdot c}{(b+d) \cdot d} = \frac{c}{d}.$$

Damit gilt also auch $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

$\square$

4. Hierzu verweise ich auf das Skript zum Vortrag von Herrn Hans Humenberger (Uni Wien) zum Thema "Nachbarbrüche, Medianten und Farey-Reihen". Bis Seite 9 wird hier sehr gut nachvollziehbar alles Notwendige entwickelt.