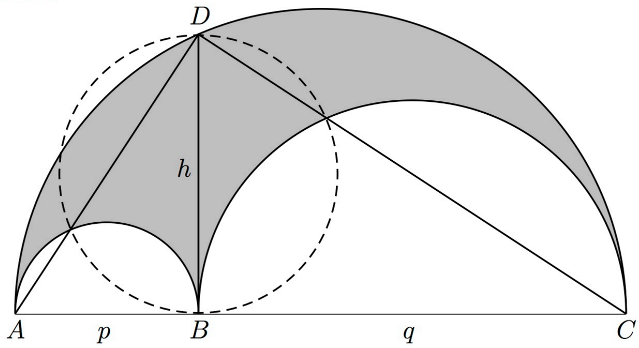
Lösung:
Nach dem Satz des Thales lässt sich in dem großen Halbkreis ein rechtwinkliges Dreieck einziehen:



In diesem Dreieck gilt der Höhensatz

$$h^2 = p \cdot q \ .$$

Zur Abkürzung schreiben wir:

$$\overline{AB} = p \quad , \quad \overline{BC} = q \quad , \quad \overline{BD} = h \ .$$

Der Flächeninhalt des gestrichelten Kreises beträgt damit

$$A_{\text{gestr.}} = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{p \cdot q}{4} \cdot \pi \ .$$

Der Flächeninhalt des großen Halbkreises berechnet sich zu:

$$A_{\text{gr.}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 \cdot \pi \ .$$

Die Flächeninhalte der beiden kleinen Halbkreise sind gegeben durch

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}\right)^2 \cdot \pi \\ A_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{q}{2}\right)^2 \cdot \pi \ . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt des Arbelos

$$\begin{aligned} A_{\text{Arbelos}} &= A_{\text{gr.}} - A_1 - A_2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}\right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2}\left(\frac{q}{2}\right)^2 \cdot \pi \\ &= \frac{\pi}{8} \cdot (p^2 + 2pq + q^2 - p^2 - q^2) \\ &= \frac{p \cdot q}{4} \cdot \pi = A_{\text{gestr.}} \ . \end{aligned}$$