Problem des Monats · März 2017 – Lösung + weiterführende Aufgaben

Hinter dem hier dargestellten Problem und Spiel steckt das berühmte Gefangenendilemma, dass einen wunderbaren Einstieg bzw. Ausflug in die Spieltheorie ermöglicht.

Die Lösungen zu a) und b) sind natürlich individuell.

Bei der Vorstellung der „optimalen Strategie" sollte man die Schüler auffordern, zu erklären, wie sich eine „optimale Strategie" aus ihrer Sicht definiert. Die Ansichten können dabei auseinander gehen und Anlass für eine spannende Diskussion zum Finden einer gemeinsamen Definition bieten. In der Spieltheorie definiert sich eine Strategie als optimal, wenn sie so gewählt ist, dass bei bester Wahl des Gegners das beste Ergebnis für den Spieler selbst erreicht wird.
Bei der Frage nach einer derart definierten optimalen Strategie lässt sich nun die in der Spieltheorie übliche Bimatrix für 2-Personen-Spiele einführen:

		Spieler 1 (=Angelo)	
		Pik (=Schweigen)	Herz (=Gestehen)
Spieler 2 (=Sherwood)	Pik (=Schweigen)	-1 -1	0 -5
	Herz (=Gestehen)	-5 0	-3 -3

Die Handlungsmöglichkeiten (Strategien) der Spieler und die zugehörigen, sogenannten Auszahlungen werden als Einträge in der Matrix angezeigt. Im vorliegenden Beispiel sind die Auszahlungen mit einem negativen Vorzeichen behaftet, da es sich um einen Punktverlust handelt (bzw. in Angelos und Sherwoods Fall eine Verlust von Freizeit).
Im ersten Feld stehen die Auszahlungen, die die Spieler zu erwarten haben, wenn beide die Strategie *Pik (Schweigen)* wählen. Der Eintrag rechts oben ist dem Spieler 1 zugeordnet, der Eintrag links unten dem Spieler 2. Entsprechend sind auch die Einträge in den anderen Feldern zu interpretieren.

Wie soll nun ein Spieler entscheiden?

Betrachten wir die Situation aus der Sicht des Spielers 1:

- Legt Spieler 2 *Herz (Gestehen)*, so erhält er, wenn auch er *Herz (Gestehen)* legt, die Auszahlung – 3 (3 Punkte Abzug), wenn er *Pik (Schweigen)* wählt die Auszahlung – 5. Auf die Strategie *Herz (Gestehen)* des Spielers 2 sollte Spieler 1 also mit *Herz (Gestehen)* reagieren, er erhält damit eine höhere Auszahlung (weniger Punktabzug bzw. Freizeitverlust) als mit der Strategie *Pik (Schweigen)*.

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

- Wählt Spieler 2 *Pik (Schweigen)*, verliert Spieler 1 keine Punkte (Auszahlung 0), wenn er *Herz (Gestehen)* legt. Legt er hingegen auch *Pik (Schweigen)*, erhält er einen Punkt Abzug (Auszahlung – 1). Das heißt, auch auf die *Strategie Pik (Schweigen)* des Spielers 2 sollte Spieler 1 mit *Herz (Gestehen)* reagieren.

⇒ *Herz (Gestehen)* ist in also beiden Fällen die beste Antwort auf die Strategie des Spielers 2. Beste Antworten sind in der Spieltheorie jene Strategien, die die größte Auszahlung auf die jeweilige Strategie des Gegners einbringen.

Analog gestalten sich die Überlegungen aus der Sicht des Spielers 2. Auch für ihn ist *Herz (Gestehen)* immer die beste Antwort. In diesem Sinne ist die Kombination *(Herz, Herz)* bzw. *(Gestehen, Gestehen)* als Lösung des Spiels zu verstehen.

Damit hat sich auch ein **Gleichgewicht**[1] eingestellt. Für keinen der beiden Spieler zahlt es sich aus, (einseitig) von seiner Strategie *Herz (Gestehen*) abzuweichen, er würde dadurch seine Auszahlung verringern, d. h. er erhält mehr Punktabzug bzw. einen größeren Freizeitverlust. Beide Spieler können im Nachhinein mit ihrer Wahl der Strategie zufrieden sein. Zu denken gibt natürlich, dass beide mit der Strategienkombination *(Pik, Pik)* bzw. *(Schweigen, Schweigen)* eine höhere Auszahlung erreicht hätten. Allerdings hätte dann jeder für sich mit der Wahl seiner Strategie zu hadern gehabt, denn hätte er doch *Herz (Gestehen)* gewählt (während der andere *Pik* legt bzw. *schweigt*), wäre er sogar ohne Punktabzug/Freizeitverlust aus dem Spiel gegangen. Individuelle Rationalität führt also hier zum „Dilemma".

Abschließend zum Gefangenendilemma ein interessanter und ganz wesentlicher Punkt: Schüler meinen anfänglich oft, das Dilemma der Situation bestehe darin, dass die beiden Gefangenen sich nicht absprechen dürfen. Dabei würde eine Absprache vor dem getrennten Verhör am Dilemma nichts ändern. **Denn wird im spieltheoretischen Sinn überlegt, steht immer das Finden der besten Antwort, also das Erlangen der höchsten Auszahlung aus Sicht eines Spielers als**

---

1 Das am Beispiel des Gefangenendilemmas erklärte Lösungskonzept geht auf den Mathematiker John Forbes Nash (geb. 1928) zurück.
Dabei wird jeweils die beste Antwort auf die Strategie des Gegners ermittelt:
Eine Strategie $\hat{s}_1$ heißt **beste Antwort** des Spielers 1 auf eine Strategie s_2 des Spielers 2, wenn sie dem Spieler 1 von allen ihm zur Verfügung stehenden Strategien die höchst mögliche Auszahlung u_1 bringt:

$$u_1(\hat{s}_1, s_2) \geq u_1(s_1, s_2) \quad \forall s_1 \textit{ des Spielers } 1$$

Wenn sowohl s_1^* beste Antwort auf s_2^* als auch s_2^* beste Antwort auf s_1^* ist, dann heißt die Strategienkombination (s_1^*, s_2^*) ein **Nash-Gleichgewicht** des Spiels und es gilt:

$$\forall s_1: \; u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \quad \wedge \quad \forall s_2: \; u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2)$$

Das Nash-Gleichgewicht ist ein Zustand, von dem ausgehend kein einzelner Spieler einen Vorteil erzielen kann, wenn er von seiner Strategie abweicht.
John Nash erhielt als einer der wenigen Mathematiker einen Nobelpreis, nämlich 1994 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften für die Leistungen auf dem Gebiet der Spieltheorie, gemeinsam mit R. Selten (geb. 1930) und J. Harsanyi (1920 – 2000).
Das Nash-Gleichgewicht ist wohl das prominenteste von verschiedenen Lösungskonzepten der Spieltheorie. Eine weitere Möglichkeit ist beispielsweise die Suche nach Minimax- oder Maximin-Lösungen (siehe z. B. Humenberger oder Wiese). Dabei können unterschiedliche Konzepte durchaus unterschiedliche Lösungen hervorbringen. In diesem Aufsatz werden Lösungen immer mit dem Nash-Konzept ermittelt.

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

oberstes Ziel. *Herz (Gestehen)* ist in diesem Beispiel eben immer beste Antwort, gerade auch, wenn der andere schweigt. Moralische Werte wie das Halten an Absprachen oder Kalkulieren der Auswirkungen für den anderen bleiben völlig auf der Strecke - ein wunderbarer Ansatzpunkt für eine mögliche philosophische Diskussion.

Die Frage, was passiert wenn ich die Bedingungen (=Einträge in der Matrix) verändere, öffnet das mathematische Feld noch weiter. Unterstützung bei der Bearbeitung dieser offenen Frage, findet man in den folgenden Quellen, die entsprechende weiterführende Beispiele zum Vertiefen der Spieltheorie enthalten:

- https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2007%20Band%2040/VortragAbleitingerHauerTyppelt.pdf
- http://www.spieltheorie.de/spieltheorie-grundlagen/gefangenendilemma/
- http://www.wirtschaftundschule.de/fileadmin/user_upload/unterrichtsmaterialien/unternehmen_und_markt/Rationalitaet__Irrationalitaet__Risiko/Unterrichtseinheit_Rationalitaet__Irrationalitaet_und_die_Einstellung_zu_Risiko.docx