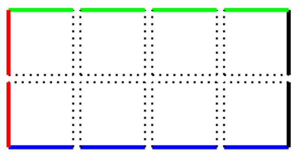
Schülerzirkel Mathematik

Problem des Monats · Juli 2017 - Lösung

ALLER GUTEN DINGE SIND VIER

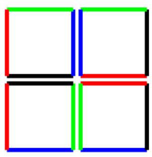
a) 4!
b) 3!
c) Die Lösung zum komplexen Aufgabenteil c) kann man der Lösungsskizze von Jan Hendrik Sylvester entnehmen. Dabei werden die vier Zahlen durch vier verschiedene Farben ersetzt.

Lösung 1. Bei allen Lösungen gehen wir davon aus, dass die Randfärbung des Rechtecks jeweils wie folgt vorgegeben ist:

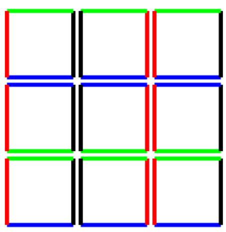


der obere Rand soll also grün, der untere blau, der rechte schwarz und der linke rot sein.

(a) Für ein 2×2-Rechteck gibt es dann genau eine Lösung. Da die beiden Quadrate in der ersten Zeile bereits eine grüne Seite vorgegeben haben und die beiden Quadrate in der zweiten Zeile noch einen grünen Rand benötigen, muss die gemeinsame Seite zwischen den beiden unteren Quadraten grün sein. Genauso argumentiert man ausgehend von der blauen, schwarzen und roten Seite und erhält die folgende eindeutige Lösung.



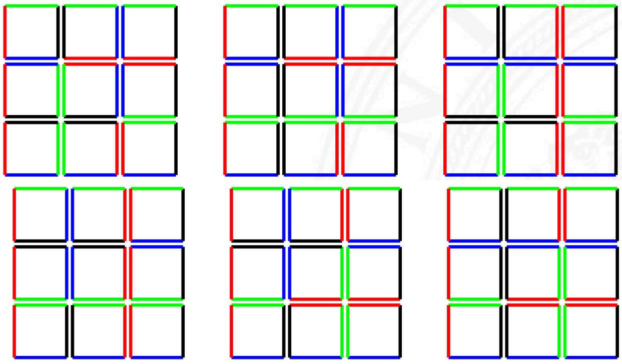
(b) Für das 3×3-Rechteck gibt es mehrere Möglichkeiten. In der einfachsten Variante „übernehmen“ wir die Randfärbung indem die vertikalen Ränder abwechselnd durchgängig schwarz und rot gefärbt werden und die horizontalen abwechselnd blau und grün einfärben:



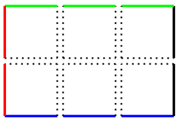
Bemerkung: Allerdings gibt es ist hier noch sechs weitere Lösungen:

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe
http://remath.de/Schuelerzirkel/SchuelerzirkelGeomatikum.html

Schülerzirkel Mathematik



(c) Nach der oben genannten Vereinbarung ist die folgende Randfärbung vorgegeben:



Alle drei Quadrate in der unteren Reihe benötigen noch einen grünen Rand. Da aber die drei oberen Quadrate bereits einen grünen Rand haben, können nur noch die vertikalen Seiten der unteren Quadrate grün gefärbt werden. Wenn einer dieser Ränder grün ist, dann erhalten nur zwei der drei unteren Quadrate einen grünen Rand und wenn beide grün gefärbt werden, dann hat das mittlere Quadrat zwei grüne Ränder, was auch verboten ist. Es ist also unmöglich die freien Ränder der unteren Quadrate so einzufärben, dass jedes Quadrat genau eine grüne Seite bekommt.

(d) Wir zeigen zuerst, dass es immer eine Lösung gibt, falls $m + n$ gerade ist. Hierbei unterscheiden wir zwei Fälle. Entweder ist sowohl m als auch n ungerade oder beide Zahlen sind gerade.

Falls m und n ungerade sind, dann können wir die erste Lösung des 3×3-Falles aus Aufgabenteil b verallgemeinern. D. h. wir färben abwechselnd die vertikalen Ränder schwarz und rot und die horizontalen Ränder blau und grün. Da sowohl m als auch n ungerade sind, geht diese Einfärbung genau auf, und da jedes Quadrat zwei hintereinander liegende vertikale und horizontale Seiten hat, erhält es so alle vier Farben.

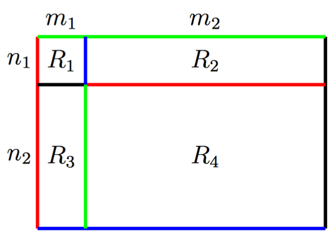
Den Fall, wenn m und n gerade sind, führen wir auf den ungeraden Fall zurück. Da m und $n \geq 2$, gibt es ungerade natürliche Zahlen m_1, m_2 und n_1, n_2 mit

$$n_1 + n_2 = n \quad \text{und} \quad m_1 + m_2 = m\,.$$

Die genaue Wahl von m_1, m_2, n_1 und n_2 ist hier irrelevant, z. B. könnten wir $m_1 = n_1 = 1$ und $m_2 = m - 1$ und $n_2 = n - 1$ wählen.

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com

Als nächstes zerlegen wir das vorgegebene $n \times m$-Rechteck in vier Rechtecke R_1, R_2, R_3 und R_4 mit den Seitenlängen $n_1 \times m_1$, $n_1 \times m_2$, $n_2 \times m_1$ und $n_2 \times m_2$ auf und färben die Ränder wie folgt ein.



Jedes der vier entstandenen Rechtecke $R_1, \ldots, R_4$ hat ungerade Seitenlängen und jede Seite ist mit einer anderen Farbe markiert. Wir können nun den bereits gelösten Fall (m und n ungerade) für jedes dieser vier Rechtecke anwenden und erhalten somit eine Lösung für m und n gerade.

Zum Schluss zeigen wir noch, dass es keine Lösung gibt, wenn $m + n$ ungerade ist. In diesem Fall ist eine Seitenlänge gerade und die andere ungerade. Wir argumentieren hier für den Fall, dass die Höhe n ungerade ist. Für den anderen Fall vertauscht man einfach m und n im folgenden Beweis.

Wir benutzen ein einfaches *Paritätsargument*: Insgesamt soll das Rechteck mit $M = m \cdot n$ Quadraten ausgefüllt werden. Da m gerade ist, ist auch M gerade. Durch die vorgegebene Färbung des Randes haben bereits n Quadrate einen roten Rand. Die restlichen $M - n$ Quadrate brauchen noch eine rote Seite und da M gerade ist und n ungerade ist, ist $M - n$ ebenfalls ungerade. D. h. eine ungerade Anzahl von Quadraten benötigen noch einen roten Rand. Da sich aber immer zwei dieser $M - n$ Quadrate einen roten Rand teilen, kann es keine solche Zuordnung geben.

(Quelle: http://www.math.uni-hamburg.de/tdm/2011/tdm2011_AufgabenLoesungen, S. 28 – 30)