

Problem des Monats März 2018



Lösung

Das vorliegende Problem liefert einen Anlass für einen Einstieg oder Ausflug in die Spieltheorie.

Das Spiel erfüllt den folgenden Satz von [Ernst Zermelo](#):

Ein endliches Zwei-Personen-Spiel, bei dem sich die Spieler abwechseln, mit perfekter Information und ohne Zufallseinfluss besitzt ein eindeutig bestimmtes Spielergebnis, und zwar in dem Sinn, dass der eine Spieler mindestens dieses Ergebnis unabhängig von der Spielweise des Kontrahenten erzwingen kann.

Jede Spielstellung in dem Spiel gehört zu einer von genau zwei Kategorien:

1. *Z-Stellung (von „Zwang“): Aus einer Z-Stellung muss immer eine C-Stellung gemacht werden.*
2. *C-Stellung (von „Chance“): Aus einer C-Stellung kann immer eine Z-Stellung gemacht werden.*

	X	X

Kurz gesagt, dieses Spiel ermöglicht eine eindeutige Gewinn-Strategie zu finden. Dabei sollen die Schüler die Symmetrie des Spiels erkunden, um die Analyse zu erleichtern.

b) und c)

Das vorliegende Spiel besitzt neben den sieben Symmetrien eines regulären Tic Tac Toe-Spiels:

Ausgangsposition

X	X	

senkrechte
Symmetrieachse

	X	X

waagerechte
Symmetrieachse

X		
X		

diagonale
Symmetrieachsen

		X
		X

		X
		X

90°-Drehung

X	X	

180°-Drehung

X		
X		

270°-Drehung

noch die folgenden zur oberen Ausgangsposition äquivalenten Positionen:

	X	X

X	X	

	X	
	X	

	X	
	X	

X		X

	X	X

weil die

X		
X		

	X	
	X	

		X
		X

bzw. Zeilen

nicht relevant sind für das Gewinnen des

Diagonalen, die durch das Durchtauschen der Spalten hier verändert werden, Spiels.

X		X

Durch diese äquivalenten Positionen ergibt sich für die Betrachtung des Eröffnungszugs nur drei tatsächlich unterschiedliche Fälle von insgesamt 33 Eröffnungsmöglichkeiten:

O	O	O

O	O	

O		

d) Wenn Tom anfängt und zwei Felder belegt, kann Tim gewinnen, indem er die beiden übriggebliebenen Felder belegt.

Wenn Tom anfängt und nur ein Feld belegt, kann Tim gewinnen, indem er das Feld diagonal gegenüber belegt und Tom dann nur eine der beiden übriggebliebenen Felder belegen kann.

Zusammengefasst: Solange Tom anfängt, kann Tim einen Sieg für sich erzwingen. Daher sollte Tom das Spiel nicht beginnen, um zu gewinnen.

e) Aus d) lässt sich schlussfolgern, dass wenn Tom einen Spielstand hinterlässt, bei dem vier Felder derart frei bleiben, dass jeweils genau zwei in einer Reihe oder Spalte liegen, er einen Gewinn erzwingen kann.

z.B.

*	*	*
		*
		*

*	*	*
	*	
	*	

	*	
*	*	*
	*	

*	*	
*	*	
		*

	*	
*		*
*		*

*		*
	*	
*		*

(b)

(c)

(a)

Hinterlässt Tom den folgenden Spielstand lässt sich kein Gewinn für ihn mehr erzwingen, da von den vier Feldern nicht jeweils genau zwei in einer Reihe bzw. Spalte liegen.

*	*	*
*		
		*

Aus c) und d) lässt sich nun schlussfolgern, dass

1. Fall: Wenn Tom das Spiel eröffnet und drei Felder belegt, kann Tim stets zwei Steine so legen, dass für ihn ein Gewinnspielstand entsteht (= vier freie Felder, von denen jeweils genau zwei in einer Reihe oder Spalte liegen).

2. Fall: Wenn Tom das Spiel eröffnet und zwei Felder belegt, kann Tim stets drei Steine so legen, dass für ihn ein Gewinnspielstand entsteht (= vier freie Felder, von denen jeweils genau zwei in einer Reihe oder Spalte liegen).

3. Fall: Wenn Tom (X) das Spiel eröffnet und ein Feld belegt, kann Tim (O) entweder
- I. ein Feld belegen, dass nicht in einer Reihe oder Spalte mit Tom liegt (in allen anderen Fällen kann Tom offensichtlich einen Gewinnspielstand im nächsten Zug erzeugen).
 - II. zwei Felder belegen, die nicht in einer Reihe oder Spalte mit Tom liegen (in allen anderen Fällen kann Tom offensichtlich einen Gewinnspielstand im nächsten Zug erzeugen).
 - III. zwei Felder belegen, von denen genau ein Feld in einer Reihe oder Spalte mit Tom liegt (in allen anderen Fällen kann Tom offensichtlich einen Gewinnspielstand im nächsten Zug erzeugen).

Aufgrund der gefundenen Symmetrien, genügt es die folgenden drei Spielstände weiter zu betrachten: I)

III)

X		
	O	

X		
	O	O

X	O	
	O	

II)

Wenn Tom bei II) seine Spalte vervollständigt, hat er einen Gewinnspielstand erzeugt.

Egal wie viele und welcher Felder Tom bei III) belegt, Tim kann stets im nächsten Zug einen Gewinnspielstand für sich erzeugen:

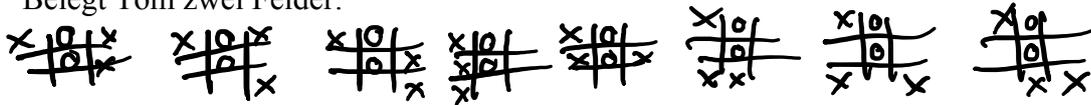
Belegt Tom drei Felder:



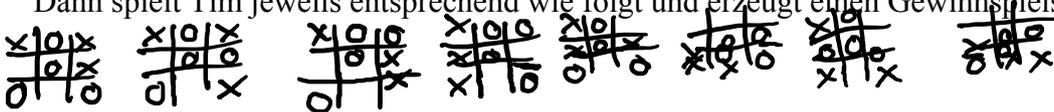
Dann spielt Tim wie folgt und erzeugt einen Gewinnspielstand für sich:



Belegt Tom zwei Felder:



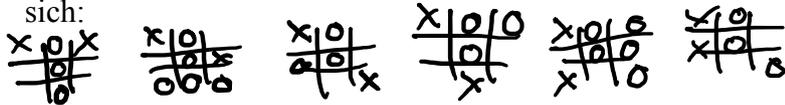
Dann spielt Tim jeweils entsprechend wie folgt und erzeugt einen Gewinnspielstand für sich:



Belegt Tom ein Feld:



Dann spielt Tim jeweils entsprechend wie folgt und erzeugt einen Gewinnspielstand für sich:



III) ist also von vornherein ein Verliererspielstand für Tom und damit der Spielzug, den Tim ausführen wird, wenn Tom das Spiel eröffnet und ein Feld belegt.

Aus III) lässt sich für I) schlussfolgern, dass Tim diesen Zug nicht ausführen wird (und falls doch muss Tom einfach III) erzeugen, um einen Gewinn für sich zu erzwingen.)

Zusammengefasst sollte Tom:

1. das Spiel nicht eröffnen, wenn er definitiv gewinnen will.
2. wenn Tim beginnt und zwei oder drei Felder belegt, entsprechend auch drei oder zwei Felder belegen, so dass ein Gewinnspielstand analog zum 2x2-Spiel für ihn entsteht.
3. wenn Tim beginnt und ein Feld belegt, zwei Felder belegen, von denen genau eins in einer Reihe oder Spalte mit Tim liegt.