Schülerzirkel Mathematik

Problem des Monats · Juni 2018 · Lösung

Spielsteine

Alina und Markus legen zwölf Spielsteine in eine Reihe.

✪ ✪ ✪ ✪ ✪ ✪ ✪ ✪ ✪ ✪ ✪ ✪

Sie vereinbaren die folgenden Regeln: Abwechselnd darf jeder mindestens einen und maximal drei Spielsteine aus der Reihe nehmen. Wer den letzten Spielstein nimmt, gewinnt.

(a) Zeige, dass Alina immer den Sieg erzwingen kann, falls Markus das Spiel beginnt.

Alina muss sicherstellen, dass die Anzahl der von Markus und von ihr genommenen Spielsteine pro Runde stets 4 beträgt. Dies kann sie mit der folgenden Strategie erreichen:

Nimmt Markus einen Spielstein, so muss Alina drei nehmen.
Nimmt Markus zwei Spielsteine, so muss Alina ebenfalls zwei Spielsteine nehmen.
Nimmt Markus drei Spielspiele, so muss Alina einen Spielstein nehmen.

Auf diese Weise kann sie den Sieg immer erzwingen.

(b) Untersuche, was für die Anzahl der Spielsteine gelten muss, damit Alina sicher gewinnen kann, falls Markus anfängt.

Immer wenn die Anzahl der Spielsteine durch 4 teilbar ist, kann Anna den Sieg erzwingen, falls Markus anfängt.

Beweis:
Sei $n \in N$ die Anzahl der Spielsteine und sei diese durch 4 teilbar, d.h. es gibt ein $k \in N$, sodass $n = 4k$.
Nun spielt Alina folgende Strategie. Wenn Markus $x \in \{1, 2, 3\}$ Spielsteine nimmt, dann nimmt Alina $4 - x$ Spielsteine. Dabei ist wichtig, dass dies von den Regeln her immer erlaubt ist. Denn für $x \in \{1, 2, 3\}$ gilt stets $4 - x \in \{1, 2, 3\}$. Nach einer Runde, in der Markus und Alina sich Spielsteine genommen haben, beobachtet man für die Anzahl der Spielsteine:
$n - x - (4 - x) = n - x - 4 + x = n - 4 = 4k - 4 = 4(k - 1)$.
Es ist also egal, wie viele Spielsteine Markus nimmt. Nachdem Alina an der Reihe war, sind es immer vier Spielsteine weniger. In der zweiten Runde sind es nur noch $4(k-2)$ Spielsteine, in der dritten Runde sind es nur noch $4(k - 3)$ Spielsteine usw. In der k-ten Runde sind es dann nur noch $4(k - k) = 4 \cdot 0 = 0$ Spielsteine, wobei Alina zuletzt am Zug war. Alina kann mit dieser Strategie immer gewinnen, falls die Anzahl der Spielsteine durch 4 teilbar ist und Markus beginnt.

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe