Schülerzirkel Mathematik

Problem des Monats · Oktober 2018 · Lösung

Wenn Geraden sich schneiden...

(a) Wie viele Schnittpunkte können 3 (4, 5) Geraden höchstens miteinander bilden?

Zwei Geraden können – wenn der Fall der echten Parallelität und Identität ausgeschlossen ist – genau einen Schnittpunkt bilden. Die dritte hinzukommende Gerade kann die zwei vorherigen Geraden im gleichen Schnittpunkt schneiden (der Fall ist für uns aber nicht interessant) oder jeweils einmal schneiden, sodass zwei weitere Schnittpunkte hinzukommen. 3 Geraden können also höchstens 1 + 2 = 3 Schnittpunkte miteinander bilden.

Jede weitere hinzukommende Gerade kann mit jeder bereits vorhandenen Geraden jeweils einen neuen Schnittpunkt bilden. 4 Geraden bilden also höchstens 1 + 2 + 3 = 6 Schnittpunkte, 5 Geraden bilden demnach höchstens 1 + 2 + 3 + 4 = 10 Schnittpunkte.

(b) Wie viele Schnittpunkte können 20 Geraden höchstens miteinander bilden?

Ohne Formel aus Teilaufgabe (c):
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 190
20 Geraden können also höchstens 190 Schnittpunkte miteinander bilden.

(c) Wie viele Schnittpunkte können *n* Geraden höchstens miteinander bilden?

Wie bei (a) und (b) gesehen, ergibt sich die maximale Anzahl an Schnittpunkten bei *n* Geraden über die Summe aller Zahlen von 1 bis (*n* – 1).

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

n Geraden können höchstens *n* – 1 Geraden schneiden. Da jeweils zwei Geraden ein- und denselben Schnittpunkt besitzen, muss das Produkt durch 2 dividiert werden, damit die Schnittpunkte nicht doppelt gezählt werden.

n Geraden können also höchstens $(n^2 - n) : 2$ Schnittpunkte miteinander bilden.