Lösung zum Problem des Monats November 2018

(a) Primitive pythagoreische Tripel mit $z < 100$ sind:

(3, 4, 5)	**(5, 12, 13)**	**(8, 15, 17)**	(7, 24, 25)
(20, 21, 29)	(12, 35, 37)	(9, 40, 41)	(28, 45, 53)
(11, 60, 61)	(16, 63, 65)	(33, 56, 65)	(48, 55, 73)
(13, 84, 85)	(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(65, 72, 97)

Nicht primitive pythagoreische Zahlentripel erhält man aus den primitiven durch Multiplikation von *x, y* und *z* mit einer natürlichen Zahl > 1, z.B.
$(5\cdot3, 5\cdot4, 5\cdot5)$ = **(15, 20, 25),** $(7\cdot3, 7\cdot4, 7\cdot5)$ = **(21, 28, 35)** oder $(3\cdot5, 3\cdot12, 3\cdot13)$ = **(15, 36, 39)**.

(b) Fallunterscheidung für *x* und *y*:

1. Fall: *x* und *y* sind beide gerade.
x und *y* können nicht beide gerade sein, da es dann auch *z* wäre und 2 ein gemeinsamer Teiler von *x, y* und *z* wäre.
2. Fall: *x* und *y* sind beide ungerade.
Eine ungerade Zahl u lässt sich schreiben als: $u = 2k + 1$ mit $k \in IN$.
Damit ist $u^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$.
Da entweder *k* oder $(k+1)$ gerade ist, hat das Quadrat einer ungeraden Zahl die Form $u^2 = 8a + 1$ mit $a \in IN$.
Für ungerade Zahlen *x* und *y* ergibt sich als Summe ihrer Quadrate eine Zahl der Form $8c + 2 = z^2$ mit $c \in IN$. Das ist aber nicht das Quadrat einer geraden Zahl, das die Form $g^2 = 4b$ mit $b \in IN$ hat (ungerade konnte z^2 als Summe zweier ungerader Zahlen nicht sein, *z* also auch nicht), also war die Annahme falsch.
Damit muss der 3. Fall richtig sein:
3. Fall: Von *x* und *y* ist die eine Zahl gerade und die andere ungerade.
Da die Quadrate von *x* und *y* dann auch gerade und ungerade sind, muss *z* immer ungerade sein.

(c) Mit den angegebenen Ersetzungen gilt:
$x^2 + y^2 = (n^2 - m^2)^2 + (2nm)^2 = n^4 - 2n^2m^2 + m^4 + 4n^2m^2 = n^4 + 2n^2m^2 + m^4 = (n^2 + m^2)^2 = z^2$,
also ist (x, y, z) ein pythagoreisches Tripel.

(d) Bedingung 1: *m* und *n* müssen teilerfremd sein.
(Wäre *t* ein gemeinsamer Teiler von *m* und *n*, dann wäre t^2 ein gemeinsamer Teiler von *x, y* und *z*.)
Bedingung 2: $(n - m)$ muss eine ungerade Zahl sein.
(Da *y* aufgrund der Konstruktion $y = 2nm$ eine gerade Zahl ist, muss also $x = n^2 - m^2$ eine ungerade Zahl sein. Das ist nur möglich, wenn von *n* und *m* eine Zahl ungerade und die andere gerade ist. Damit ist $(n - m)$ eine ungerade Zahl.)