Schülerzirkel Mathematik

Problem des Monats · März 2019

Mögliche Lösungen und Anregungen

Übernehmen Sie als Zirkelleiter die Rolle des Zauberers und spielen Sie die Show ein paar Mal zum Warmwerden durch.

a) Aus den Augenzahlen *a, b, c* ergibt sich durch die Anweisungen des Zauberers:

$$\begin{aligned}(((2a+8)\cdot 5+b)\cdot 2-20)\cdot 5+c &= 2a\cdot 5\cdot 2\cdot 5+(8\cdot 5\cdot 2-30)\cdot 5+b\cdot 2\cdot 5+c\\ &= 100a+250+10b+c\end{aligned}$$

Fasst man die Zahlenfolge *a, b, c* als dreistellige Zahl auf, gilt $abc = 100a + 10b + c$.
D.h. der Zauberer muss von der genannten Zahl nur 250 subtrahieren, um die gewürfelten Augenzahlen als dreistellige Zahl zu erhalten (Die Reihenfolge, in der gewürfelt wurde, ist dabei egal.)

Die meisten Schüler werden allerdings über die Rekursion versuchen zum Ergebnis zu gelangen.
Folgende Überlegungen sind dazu möglich:
Da vor der Addition der letzten Augenzahl mit 5 multipliziert wurde, kann die letzte Augenzahl nur der letzten Ziffer des Ergebnisses (1. Fall) oder der letzten Ziffer des Ergebnisses minus 5 (2. Fall) entsprechen.
Der 2. Fall entfällt in der weiteren Rekursion allerdings, entweder weil

- das Ergebnis minus 5 zu einer Ziffer größer als 6 an letzter Stelle führt oder
- die sich anschließende Division durch 5 zu einer ungeraden Zahl führt oder
- die Probe zum Schluss zu einem Widerspruch führt, da sich durch die Subtraktion von 5 eine zusätzliche Rechenoperation in den Zaubertrick eingeschlichen hat.

Diese unterschiedlichen Ergebnisse können dann Anlass geben sich über Termberechnungen (siehe oben) dem Ergebnis auf einem schnelleren Weg zu nähern. (Schließlich löst der Zauberer sofort.)

b) Der Trick lässt sich vereinfachen, indem man eine Verdopplung und eine Verfünffachung zur Multiplikation mit 10 zusammenfasst. Die Multiplikation mit 10 fällt den meisten Menschen erfahrungsgemäß am leichtesten.

c) Auf der Basis von $abc = 100a + 10b + c$ lassen sich viele weitere Tricks durch Zerlegung der Faktoren und der Addition bzw. Subtraktion beliebiger Zahlen, die der Zauberer zum Schluss wieder entfernt, bestimmen.

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

Es lassen viele ähnliche zahlentheoretische Überlegungen anschließen[1]:

- Warum sind alle 6-stelligen Zahlen der Form *abcabc* durch 13 teilbar?

→ $abcabc = 100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c$
$= 100100a + 10010b + 1001c = 1001 \cdot (100a + 10b + c)$

und 1001 ist durch 13 teilbar.

Analog lassen sich lösen:

- Zeige, dass alle 8-stelligen Zahlen *abcdabcd* durch 73 und 137 teilbar sind.
- Welches ist die kleinste 3-stellige Zahl *abc*, die selbst sowie ihre Umkehrung *cba* durch 13 teilbar ist?
- Bestimme alle 3-stelligen Zahlen, die 13mal so groß sind wie ihre Quersumme.
- Zeige, dass keine 3-stellige Zahl gibt, die das 9-fache ihrer Quersumme ist.
- Wann ist die 4-stellige Zahlen *abcd* durch 9 teilbar?
- ...

Auch hier könnten die Schüler dann die Basisidee zur Entwicklung eigener Fragestellungen nutzen.

[1] Die folgenden Aufgaben stammen aus: N. Roth-Sonnen, G. Stein und A. Stengel, *[Eins plus] Begabungen fördern im Mathematikunterricht 7/8,* Cornelsen.