Schülerzirkel Mathematik

Problem des Monats · Mai 2019

Lösung

Das Verfahren von Emmy (eigentlich von Heron) lässt sich gut mit einem Tabellenkalkulationsprogramm auswerten. Man erhält:

1	2
1,5	1,33333333
1,41666667	1,41176471
1,41421569	1,41421144
1,41421356	1,41421356
1,41421356	1,41421356

Leons Verfahren kann man zunächst in

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\cdots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{\cdots}\right)}\right)}$$

also

$$x = 1 + \frac{1}{1 + x}$$

Umschreiben und dann in ein Tabellenkalkulationsprogramm eingeben. Man erhält:

1
1,5
1,4
1,41666667
1,4137931
1,41428571
1,41420118
1,41421569
1,4142132
1,41421362
1,41421355
1,41421356

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

Schülerzirkel Mathematik

Man sieht, dass für dieselbe Genauigkeit deutlich mehr Rechenschritte erforderlich sind.
Dass bei Leons Verfahren tatsächlich $\sqrt{2}$ herauskommt, sieht man durch Umformung:

$$x = 1 + \frac{1}{1+x}$$

Multiplikation mit $1 + x$ ergibt

$$x \cdot (1+x) = (1+x) + 1$$

Die Lösung der daraus folgenden quadratischen Gleichung liefert $\sqrt{2}$.
Will man dieses Verfahren auf die Berechnung von $\sqrt{3}$ anpassen, muss man diese Schritte rückwärts gehen:

$$x^2 = 3$$
$$x^2 + 2x = 2x + 3$$
$$x \cdot (x+1) + x = 2 \cdot (x+1) + 1$$
$$x + \frac{x}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$$
$$x \cdot \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) = 1 + \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$$
$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{x+1}} + 1 \Rightarrow \sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}}$$

Emmy's Verfahren lässt sich zusammenfassen. Es seien a_n und b_n die Seitenlängen der jeweiligen Rechtecke. Diese sind:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

und

$$b_n = \frac{2}{a_n}$$

Durch Einsetzen erhält man

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$$

Schülerinnen und Schüler der Oberstufe können sich in das Newton-Verfahren einarbeiten. Für eine Differenzierbare Funktion f lassen sich mit diesem Verfahren deren Nullstellen mit diesem Verfahren bestimmen. Allgemein gilt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Wählt man eine Funktion mit den Nullstellen $\pm\sqrt{2}$, also

$$f(x) = x^2 - 2$$

erhält man nach Einsetzen der Funktion und deren Ableitung

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

was dem Verfahren von Emmy entspricht. Die Anpassung von Emmy's Verfahren erfolgt über die entsprechende Anpassung bei der Berechnung der zweiten Seitenlänge, d.h.

$b_n = \frac{A}{a_n}$ wobei A der Flächeninhalt ist.

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe