Schülerzirkel Mathematik

Problem des Monats · August 2019 · Lösung

Mathematische Knobeleien mit der 7

(a) Die neue Zahl ist durch Multiplikation der zweiziffrigen Zahl mit 1001 entstanden. Die Zahl 1001 ist aber durch 7 teilbar ($1001 = 7 \cdot 143$), somit ist auch die neue Zahl durch 7 teilbar.

(b) In diesem Fall wird zur neuen Zahl (aus a) noch 700 addiert. Somit werden zwei Zahlen addiert, die beide durch 7 teilbar sind, also ist auch die Summe durch 7 teilbar.

(c) Sei $z = 10a + b$ eine durch 7 teilbare Zahl. Man bildet

$z_1 = 100a + 10(a + b) + b = 100a + 10a + 10b + b = 110a + 11b = 11(10a + b)$

Somit ist mit z auch z_1 durch 7 teilbar. Fügt man die Summe $a + b$ ein zweites Mal ein, erhält man

$z_2 = 1000a + 100(a + b) + 10(a + b) + b = 1000a + 100a + 10a + 100b + 10b + b$
$= 1110a + 111b = 111(10a + b)$

Also ist auch z_2 durch 7 teilbar. Dies kann man nun beliebig fortsetzen (das ist z.B. durch Induktion zu zeigen).

(d) Durch Probieren mit kleinen n (z.B. $n = 1, 2, 3$) gelangt man zur Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $6^{n+1} + 6^n = 6^n \cdot 7$

Beweis: Sei n eine natürliche Zahl. Dann ist: $6^{n+1} + 6^n = 6^n\,(6^1 + 6^0) = 6^n\,(6 + 1) = 6^n \cdot 7$.

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe