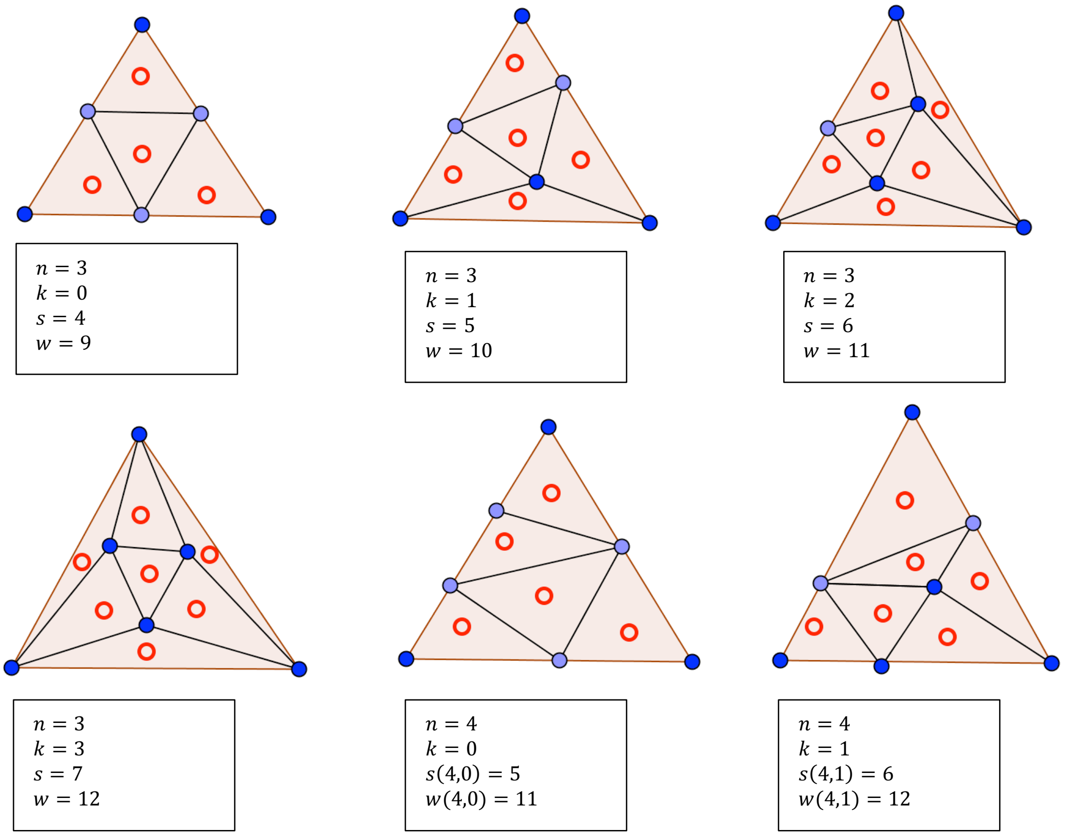
Schülerzirkel Mathematik

Problem des Monats · Oktober 2019
LÖSUNG

Blumenbeete mathematisch teilen

a)+b) Es können zu Beginn sämtliche Unterteilungen mit verschiedenen Werten von n und k skizziert werden. Dabei lassen sich die Anzahl der Wege w und die Anzahl der Steckzwiebeln s z.B. durch einfaches Abzählen ermitteln.



Hier können schon vertiefende Fragen gestellt werden:

- Wie viele verschiedene Unterteilungen des großen Beetes kann es bei gleichen Werten n und k geben? Warum hat die Art der Aufteilung aber keinen Einfluss auf s und w?
- Warum dürfen außer am Rand nie drei Stöcke auf einer Geraden liegen? Wie ändern sich die Anzahlen von s und w, wenn man diese Bedingung aufhebt?
- Was ändert sich an dem Problem, wenn sich die Wege doch kreuzen dürfen? Es entstehen viel mehr Dreiecke – nach welchem Prinzip kann man die Anzahl von s nun ermitteln?

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

Schülerzirkel Mathematik

Eine Tabelle kann die Werte ordnen und das Zählmuster schneller erkennbar machen.

n	k	s	w
0	0	1	3
1	1	2	6
2	0	3	7
2	1	4	8
2	2	5	9
3	0	4	9
3	1	5	10
3	2	6	11
3	3	7	12

n	k	s	w
4	0	5	11
4	1	6	12
4	2	7	13
4	3	8	14
4	4	9	15
5	0	6	13
5	1	7	14
5	2	8	15
5	3	9	16

c) $\boldsymbol{s(n,k) = n + k + 1}$ $\boldsymbol{w(n,k) = 2n + k + 3}$

d) Die Frage nach der Anzahl von $\boldsymbol{s}$ ist ja die Frage nach der Anzahl von Teildreiecken. Die Anzahl der Teildreiecke kann man sich über die Summe aller Innenwinkel der Teildreiecke herleiten.
Für den Beweis muss man zwischen den $\boldsymbol{k}$ Punkten im Inneren und den $(\boldsymbol{n - k})$ Punkten auf dem Rand des Dreiecks unterscheiden. Das Ausgangsdreieck hat eine Innenwinkelsumme von $180°$. Die $(\boldsymbol{n - k})$ Punkte auf dem Rand erzeugen $180°$- Winkel und bei den $\boldsymbol{k}$ Punkte kommen $360°$- Winkel vor. Daraus ergibt sich folgende Summe:

$180° + (n - k) \cdot 180° + k \cdot 360°$

Durch Vereinfachen erhält man $180° \cdot (n + k + 1)$

Daraus kann man schließen, dass es $(n + k + 1)$ Teildreiecke gibt, so dass die Formel $\boldsymbol{s(n,k) = (n + k + 1)}$ hergeleitet wurde.

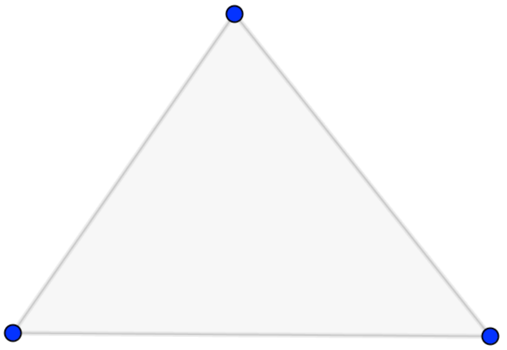
Die Frage nach der Anzahl der Wege w ist ja die Frage nach der Anzahl der einfach gezählten Dreiecksseiten. Jede Verbindungsstrecke zweier Punkte im Inneren des Dreiecks ist gleichzeitig eine Seite von zwei Teildreiecken im Inneren des Dreiecks. Folglich gibt $3 \cdot (n + k + 1)$ die Anzahl der Seiten der Teildreiecke an, wobei alle im Inneren des Dreiecks liegenden Dreiecksseiten doppelt gezählt werden.
Die $(n - k)$ Punkte auf dem Rand des Dreiecks sind zusammen mit den drei Eckpunkten des Dreiecks die Endpunkte von $(n - k + 3)$ Seiten von Teildreiecken, die auf dem Rand liegen. Addiert man diese Anzahl zu $3 \cdot (n + k + 1)$, dann werden alle Seiten der Teildreiecke doppelt gezählt. Die Hälfte dieser Anzahl gibt schließlich die Anzahl der Seiten der Teildreiecke an.
Es ergibt sich also folgende Rechnung: $\big(3 \cdot (n + k + 1) + (n - k + 3)\big) \div 2 = (4n + 2k + 6) = 2n + k + 3$

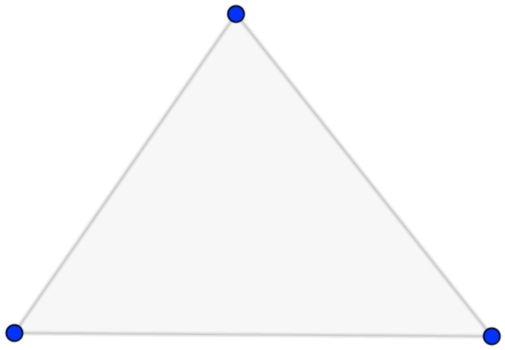
Also gilt $\boldsymbol{w(n,k) = 2n + k + 3}$

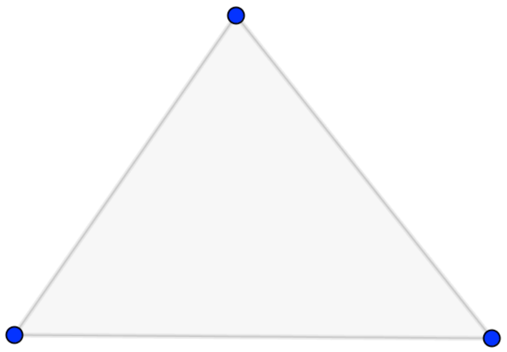
Petra Presun, Alexander Schöning • mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

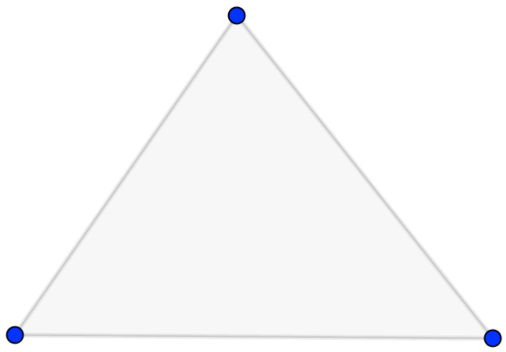
Schülerzirkel Mathematik

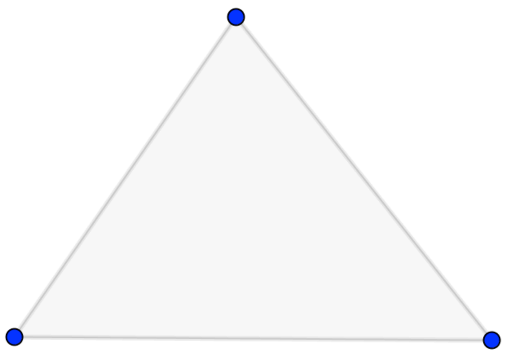
Anhang

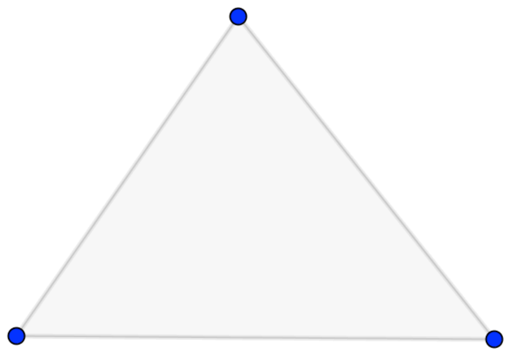












Petra Presun, Alexander Schöning • mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe