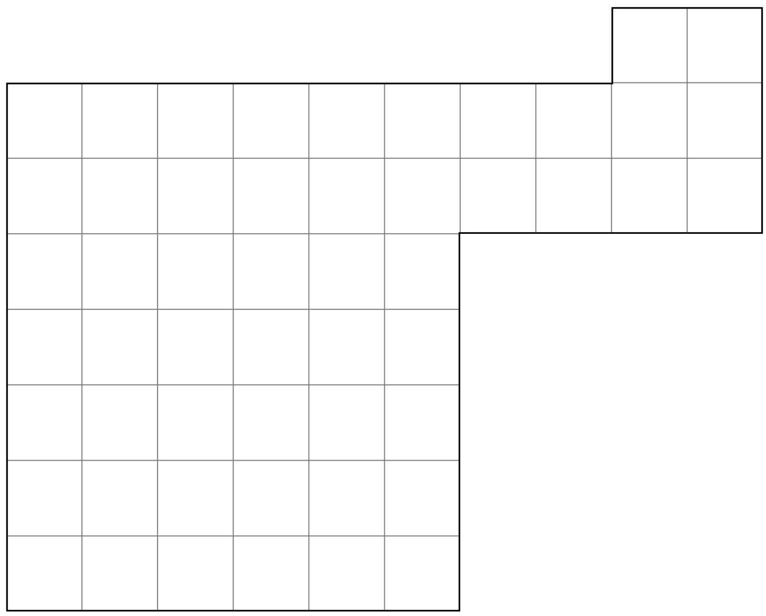
Schülerzirkel Mathematik

Problem des Monats • Dezember 2019
LÖSUNG

a) Das perfekte Plätzchen ist bis auf Drehung eindeutig. Es könnte also so aussehen:

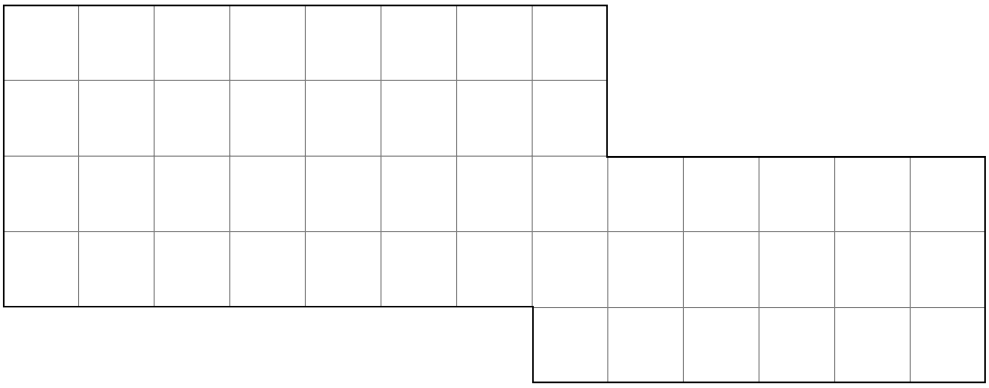


b) Wir betrachten das umschließende Rechteck. Seien s_1 und s_2 die Seitenlängen des Rechtecks (in Wichteldaumen), wobei o.B.d.A. $s_2 \geq s_1$ gelten soll. Es gilt $s_1 + s_2 = \sum_{i=1}^{8} i = 36$, und $s_1 \geq 1 + 2 = 3$. Damit folgt $s_2 \leq 15$.

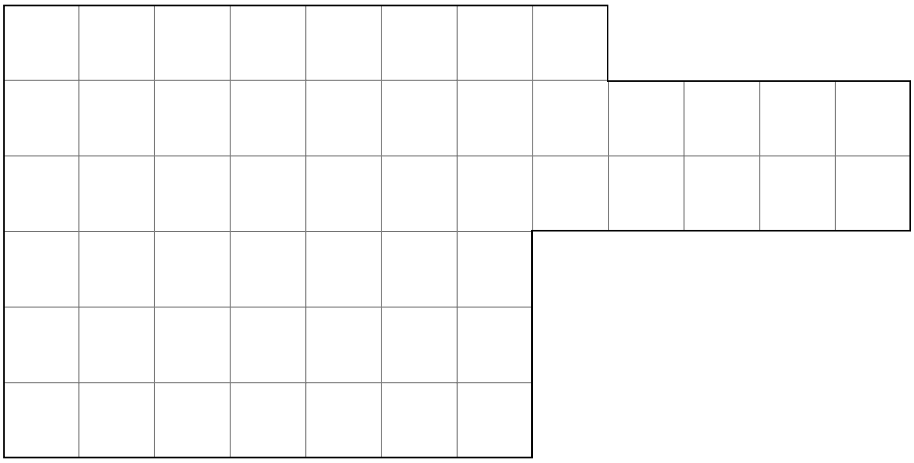
Sei nun $s_2 = 15$. Wir wollen so wenig wie möglich Seitenlängen für die langen Seiten verbrauchen und wählen deshalb $15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6$. Für die hintereinanderliegenden Kanten mit den Längen 7 und 8 ergibt sich eine Stufe, für die Seitenlängen 4, 5 und 6 zwei Stufen. Außerdem brauchen wir noch Kanten an den Enden der Seiten. Wir benötigen also noch 5 Kanten, haben aber nur noch 3. Daraus folgt $s_2 \neq 15$. Genau so argumentieren wir, dass $s_2 \neq 14$.

Damit erhalten wir die folgenden 5 Typen (mit je einem Beispiel):

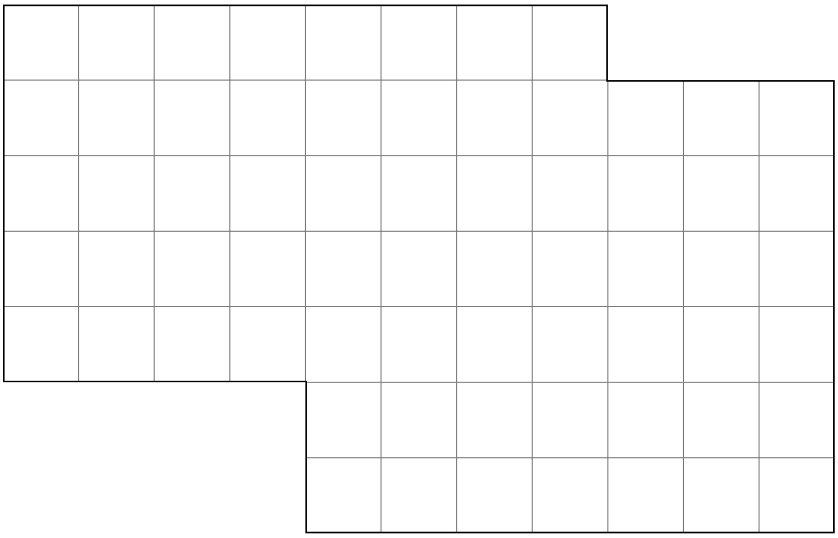
Typ 1: $s_2 = 13 = 6 + 7 = 8 + 5$ und $s_1 = 5 = 4 + 1 = 2 + 3$



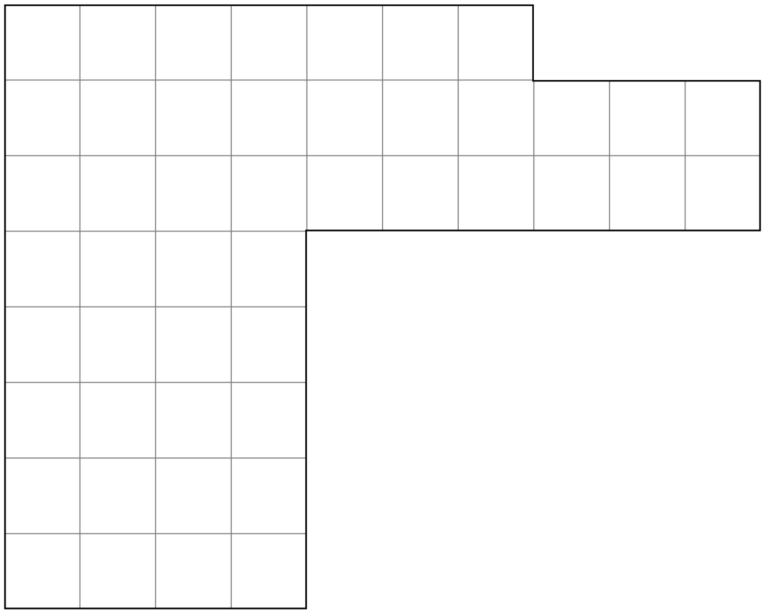
Typ 2: $s_2 = 12 = 8 + 4 = 7 + 5$ und $s_1 = 6 = 1 + 2 + 3$



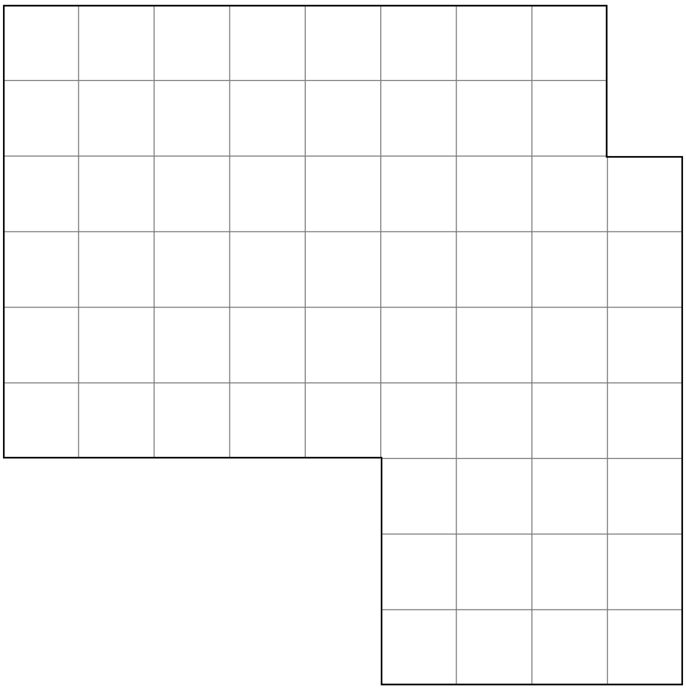
Typ 3: $s_2 = 11 = 8 + 3 = 7 + 4$ und $s_1 = 7 = 6 + 1 = 5 + 2$



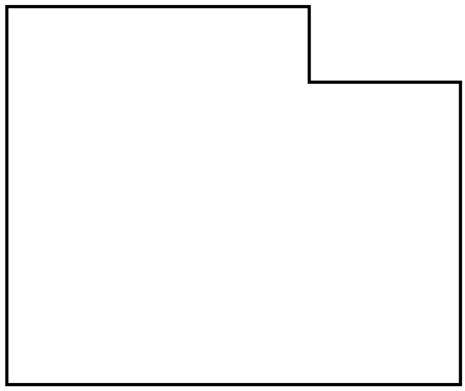
Typ 4: $s_2 = 10 = 7 + 3 = 6 + 4$ und $s_1 = 8 = 1 + 2 + 5$



Typ 5: $s_2 = 9 = 8 + 1 = 5 + 4$ und $s_1 = 9 = 7 + 2 = 6 + 3$



c) Eine Figur, die nur rechte Winkel hat, muss mindestens 4 Seiten haben. Die Summe der Seitenlängen des umschließenden Rechtecks muss gerade sein, womit magische Plätzchen mit 5 oder 7 Kanten unmöglich werden. Eine Figur mit rechten Winkeln und vier Seiten ist ein Rechteck, was wegen der unterschiedlichen Kantenläge nicht möglich ist. Es bleibt zu zeigen, dass es keine solche Figur mit den Kantenlängen 1 bis 6 geben kann. Dazu stellen wir fest, dass mindestens zwei Seiten lediglich aus einer Kante bestehen. Wären diese parallel zueinander, so müssten wegen der unterschiedlichen Kantenlängen die Enden mindestens auf einer Seite durch eine Stufe verbunden werden. Damit besteht eine Seite aber aus mindestens zwei Kanten. Demnach müssten die beiden Kanten über Eck aneinanderliegen. Dies könnte zum Beispiel so aussehen:



Die beiden allein stehenden Kanten sind dann die Summe von je zwei anderen Kanten. Da die Längen 1 und 2 nicht korrekt als Summen dargestellt werden können, bleiben als Kombinationen

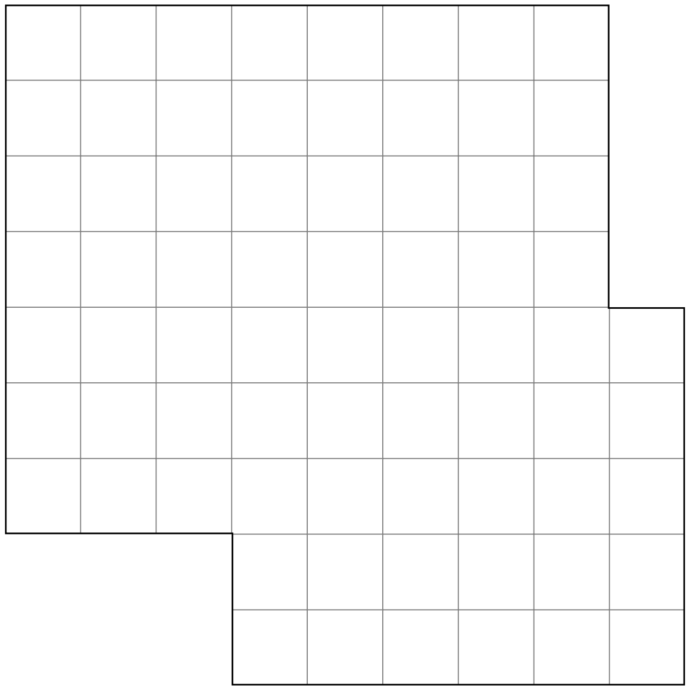
Kombination	Summendarstellung	Widerspruchsgrund
$(6\|5)$	$6 = 4 + 2,\ 5 = 4 + 1 = 3 + 2$	doppelte 4 oder 2
$(6\|4)$	$6 = 5 + 1,\ 4 = 3 + 1$	doppelte 1
$(6\|3)$	$6 = 4 + 2 = 5 + 1,\ 3 = 1 + 2$	doppelte 2
$(5\|4)$	$5 = 3 + 2,\ 4 = 3 + 1$	doppelte 3
$(5\|3)$	$5 = 4 + 1,\ 3 = 1 + 2$	doppelte 1
$(4\|3)$	$4 = 3 + 1$	doppelte 3

Somit ist auch kein Plätzchen mit den Kantenlängen 1 bis 6 möglich.

d) In jedem Fall schneiden wir aus dem umrandenden Rechteck, zwei kleinere Rechtecke aus. Diese sind dann am kleinsten, wenn sie die Seitenlängen 1, 2, 3 und 4 haben. Dabei gibt es die Kombinationen

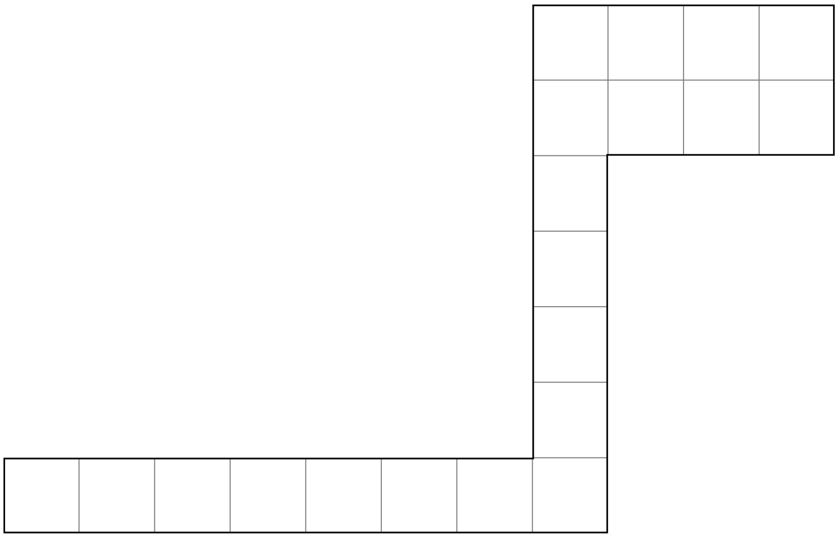
$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 14 > 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11 > 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 10.$$

Die kleinste Fläche, die wir aus der Umrandung ausschneiden können, misst also 10 Quadratwichteldaumen. Vergleichen wir alle möglichen Typen (siehe Aufgabenteil b)) so sehen wir, dass die größte umrandendende Fläche 81 Quadratwichteldaumen misst. Wir müssen ledglich ein Achteck angeben, welches die Bedingung erfüllt.



Somit hat das größte solche Achteck die Fläche $81 - 10 = 71$ Quadratwichteldaumen.

Für das flächenkleinste solche Achteck, überlegen wir uns, dass wir das Rechteck möglichst schmal haben wollen. Dafür müssen wir die sehr langen Seiten mit den sehr kurzen Seiten kombinieren. Als Breiten der inneren Rechtecke wählen wir die Kanten mit den Längen 1 und 2. Von den übrigen Kanten wollen wir so viele wie möglich mit der Breite 1 kombinieren und wählen dafür die größten Längen, denn sicher gilt für $a < b$, dass $2 \cdot a + 1 \cdot b < 1 \cdot a + 2 \cdot b$.[1] Somit erreichen wir das kleinste solche Achteck, wenn wir die Längen 8, 7, 6 und 5 mit 1 und die übrigen Längen 3 und 4 mit 2 kombinieren können. Zur Lösung müssen wir lediglich ein solches Achteck angeben. Hier ist es:



Somit hat das kleinste solche Achteck eine FLäche von 20 Quadratwichteldaumen.

[1]Wegen $1 \cdot a < 1 \cdot b$