Mathematikzirkel

Problem des Monats · Januar 2021
LÖSUNG

Aufgabe 1

Bei der Untersuchung der Zahlen benutzen wir die Primfaktorzerlegungen.

1395 Aus der Quersumme und der letzten Ziffer erkennen wir, dass die Zahl durch 5 und 9 teilbar ist. Daraus folgt, dass ein Faktor auf 5 enden und die 3 insgesamt zweimal in der Primfaktorzerlegung vorkommt. Da aber eine Zweiersumme von zwei Ziffern nur 9 oder 18 aus der Zweierreihe ergeben können, und dies für die 1395 für keine zwei Ziffern geht, müssen beide Faktoren durch 3 teilbar sein. Damit muss ein Faktor 15 sein und der andere ergibt sich zu 93. Wir erhalten

$$1395 = 15 \cdot 93.$$

1435 Auch hier muss ein Faktor auf 5 enden. Zudem erkennen wir an der Zusammensetzung aus 14 und 35, dass die Primfaktorzerlegung mindestens einmal die 7 enthalten muss. Aus den gegebenen Ziffern kommen nur die Faktoren 14 und 35 in Frage, wobei 14 nicht sein kann, da 1435 ungerade ist. Die Faktoren müssen also 35 und 41 sein. Wir erhalten

$$1435 = 35 \cdot 41.$$

1530 Die Zahl ist durch 9 und 10 teilbar. Außerdem erkennen wir außer der 0 keine geraden Ziffern, weshalb ein Faktor durch 10 teilbar sein muss. Da keine zwei Ziffern eine Zahl der Neunerreihe ergeben, müssen beide Faktoren durch 3 teilbar sein. Damit muss die durch 10 teilbare Zahl 30 sein und für die andere ergibt sich 51. Wir erhalten

$$1530 = 30 \cdot 51.$$

1827 Hier geben wir uns mal die Mühe für die vollständige Primfaktorzerlegung. Wir erkennen schnell den Teiler 9 und berechnen $1827 : 9 = 203$. Wegen $\mathbf{20} - 2 \cdot \mathbf{3} = 14$ ist **203** durch 7 teilbar.[1] Dies liefert letztlich $1829 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29$. Ein Faktor ist also ein Vielfaches von 29. Da kommt nur die 87 in Frage womit der zweite Faktor 21 ist. Wir erhalten

$$1827 = 21 \cdot 87.$$

2187 Auch hier zerlegen wir etwas genauer. Wir erkennen die Teilbarkeit durch 9 und berechnen $2187 : 9 = 243$. Einige erkennen vielleicht gleich $243 = 3^5$, aber alle sehen, dass 243 durch 9 teilbar ist und mit $243 : 9 = 27$ die Gleichheit zu 3^5. Insgesamt gilt demnach $2187 = 3^7$. Wegen $3^5 > 100$ kann nur die Zerlegung $3^3 \cdot 3^4$ funktionieren. Wir erhalten

$$2187 = 27 \cdot 81.$$

6880 Wir erkennen, dass ein Faktor auf 0 enden muss (da keine 5 als Ziffer vorkommt) und keiner der beiden durch 3 teilbar sein darf. Damit ist ein Faktor 80 und der andere ergibt sich zu 86. Wir erhalten

$$6880 = 80 \cdot 86.$$

102 510 Wir erkennen die Teilbarkeit durch 9 und berechnen $102\,510 : 9 = 11\,390$, welche nicht durch 3 teilbar ist, aber natürlich durch 10. Wir berechnen weiter und erhalten $11\,390 : 10 = 1139$. Wenden wir alle Teilbarkeitsregeln bis zur 11 an, finden wir keinen weiteren Teiler. Insbesondere ist wegen $113 - 2 \cdot 9 = 95$ die Zahl 7 kein Teiler.[2] Die 3 kommt nach unseren bisherigen Überlegungen genau zweimal in der Primfaktorzerlegung vor. Da wir aus den gegebenen Ziffern nur dreistellige Zahlen mit Quersumme ≤ 8 bilden können, müssen beide Faktoren durch 3 teilbar sein. Demnach kommen nur die Paare $1|2$ und $1|5$ in Frage, welche jeweils das andere hervorrufen, denn die zwei Nullen müssen sich auf die beiden Faktoren

[1] Eine Zahl $x = 10 \cdot m + n$, mit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn die Differenz $m - 2 \cdot n$ durch 7 teilbar ist. Dies kann gerne im Mathezirkel nachgewiesen werden.

[2] Beachte noch einmal die vorher erwähnte Teilbarkeitsregel der 7.

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

aufteilen. Es reicht also, das Paar 1|2 zu untersuchen. Wegen $120 \cdot 600 = 72\,000 < 102\,510$ muss die 2 an erster Stelle stehen. Die 0 kann an letzter oder erster Stelle folgen. Da 210 verbotenerweise durch 7 teilbar ist, muss 201 der gesuchte Faktor sein und der andere ist dann 510. Wir erhalten

$$102\,510 = 201 \cdot 510.$$

Diese Zerlegung hätte man auch recht schnell sehen können, wenn man entdeckt, dass 102 das Doppelte von 51 ist und damit schnell $510 \cdot 200 = 102\,000$ erkennt. Nur die Eindeutigkeit der Lösung hat man so noch nicht gezeigt.

117 067 Die Zahl ist schon etwas knackiger. Wenn wir alle uns bekannten Teilbarkeitsregeln bis zur 11 betrachten, dann sehen wir, dass bis dahin kein Teiler existiert. Wegen der ungeraden Eigenschaft und wegen $1 \cdot 1 = \mathbf{1}$ bzw. $7 \cdot 7 = \mathbf{49}$ müssen die letzten Ziffern der beiden Faktoren demnach 1 und 7 sein. Da die 0 in der Mitte stehen muss, erhalten wir als einen möglichen Faktor 101, 601 oder 701. Wegen $101 \cdot 1000 < 117\,067$ und $601 \cdot 177 = 106\,377$ sowie $601 \cdot 717 > 600 \cdot 700 = 420\,000$ muss ein Faktor 701 sein. Der andere ergibt sich dann zu 167. Wir erhalten

$$117\,067 = 167 \cdot 701.$$

Dies ist ein besonderes Resultat, denn 167 und 701 sind Primzahlen. Da Vampirzahlen definitionsgemäß keine Primzahlen sein können werden solche Vampirzahlen als prime Vampirzahlen bezeichnet.

125 460 Wir erkennen die Teilbarkeit durch 9 und berechnen $125\,460 : 9 = 13\,940$. Wir erkennen weiterhin die Teilbarkeit durch 20 und berechnen $13940 : 20 = 697$. Bis zu den schnell zu überprüfenden Teilbarkeitsregeln von 2 bis 11 existiert kein weiterer Teiler. Zum Glück[3] werden wir bei den nächsten beiden Kandidaten fündig. Während $697 : 13 \ni \mathbb{N}$ finden wir $697 : 17 = 41$ und damit die gesamte Zerlegung

$$125\,460 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 41$$

Demnach kommt die 3 nur zweimal in der Primfaktorzerlegung vor. Sollte einer der Faktoren durch 9 teilbar sein, so muss die Quersumme 9 betragen, da 18 nicht durch eine Summe aus drei der gegebenen Ziffern erreicht werden kann. Die einzigen möglichen Summen sind $4+5+0$ und $6+2+1$. Dann wären aber beide Faktoren durch 9 teilbar, was nicht sein kann. Also sind beide Faktoren durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Ein Faktor endet zudem auf 0 oder einer mit 5 und der andere mit einer geraden Zahl. Wir überlegen zunächst den Fall mit einem durch 10 teilbaren Faktor. Die anderen beiden Ziffern sind dann nach den obigen Überlegungen 2|1, 2|4 oder 5|1. Egal wie wir die 2|4 anordnen erreichen wir auf jeden Fall mit der 0 am Ende eine durch 8 teilbare Zahl, was nicht sein darf. Es bleiben also die Kandidaten 2|1 und 5|1. Dies führt auf vier Divisionen, nämlich

$$\begin{aligned}
125\,460 : 120 &= 1045 Rest 60 \ni \mathbb{N},\\
125\,460 : 210 &= 597 Rest 90 \ni \mathbb{N},\\
125\,460 : 150 &= 836 Rest 60 \ni \mathbb{N},\\
125\,460 : 510 &= 246,
\end{aligned}$$

womit wir eine Lösung haben. Um weitere zu finden, bzw. die Eindeutigkeit zu zeigen, untersuchen wir noch den Fall, dass ein Faktor auf 5 endet. In der Reihe der 41 kommen

$$5 \cdot 41 = 205 \text{ und} 15 \cdot 41 \qquad = 615$$

vor. Wegen

$$\begin{aligned}
125\,460 : 205 &= 612,\\
125\,460 : 615 &= 204
\end{aligned}$$

[3]Hier sollte man die SuS noch einmal motivieren mindestens bis 19 zu untersuchen.

erhalten wir mit der zweiten Gleichung noch eine Lösung. In der Reihe der 17 kommen

$$\begin{aligned}
&15 \cdot 17 = 255, \\
&25 \cdot 17 = 425, \\
&35 \cdot 17 = 595, \\
&45 \cdot 17 = 765 \text{ und} \\
&55 \cdot 17 = 935
\end{aligned}$$

vor, wobei nur die zweite Zahl von den Ziffern passen könnte. Wegen $125\,460 : 425 = 295 Rest 85 \ni \mathbb{N}$ gibt diese keine weiteren Lösungen. Damit haben wir gezeigt, dass

$$\begin{aligned}
&125\,460 = 246 \cdot 510 \text{ und} \\
&125\,460 = 204 \cdot 615
\end{aligned}$$

die einzigen beiden Lösungen sind. In der Tat ist 125 460 die erste Vampirzahl mit zwei möglichen Fangzahnpaaren.

Aufgabe 2

Unter der Voraussetzung, dass von 1000 bis 1259 keine Vampirzahl vorkommt, muss nur noch gezeigt werden, dass zwischen 1 und 999 keine weitere Vampirzahl auftritt.

Aus der Definition der Vampirzahlen geht hervor, dass die Fangzähne der Vampirzahlen genau die Hälfte der Dezimalstellen der eigentlichen Vampirzahl haben. Daher können Vampirzahlen keine ungerade Anzahl von Dezimalstellen haben und alle Zahlen zwischen 1 und 9 und zwischen 100 und 999 können ausgeschlossen werden.

Es bleibt also zu zeigen, dass es von 10 bis 99 keine Vampirzahl gibt. Da für mögliche zweistellige Vampirzahlen gilt, dass die Zahl das Produkt ihrer beiden Ziffern sein muss, kann dies leicht überprüft werden.

10 - 19: Es gilt $1 \cdot n < 10$ für alle $n \in \{0, ..., 9\}$.

20 - 29: Es gilt $2 \cdot n < 20$ für alle $n \in \{0, ..., 9\}$.

30 - 39: Es gilt $3 \cdot n < 30$ für alle $n \in \{0, ..., 9\}$.

⋮

90 - 99: Es gilt $9 \cdot n < 90$ für alle $n \in \{0, ..., 9\}$.

Das Produkt beider Ziffern ist also stets kleiner als die Zahl selbst.

Aufgabe 3

Teil a)

Die Vampirzahl 1 395 hat die Fangzähne 15 und 93. Das initiale d ergibt sich also aus

$$d = 1\,395 - (15 + 93) = 1\,287.$$

1. Durchlauf

Schritt 1: 1 287 hat 4 Stellen. Also $n = 4$.

Schritt 2: $d_{neu} = d_{alt} - f(n-1)$, also $d_{neu} = 1\,287 - f(3) = 1\,287 - 900 = 387$

Schritt 3: Es ist $d \neq 9 \cdot 10^n$, also muss ein weiterer Durchlauf gestartet werden.

2. Durchlauf

Schritt 1: 387 hat 3 Stellen. Also $n = 3$.

Schritt 2: $d_{neu} = d_{alt} - f(n-1)$, also $d_{neu} = 387 - f(2) = 387 - 90 = 297$

Schritt 3: Es ist $d \neq 9 \cdot 10^n$, also muss ein weiterer Durchlauf gestartet werden.

3. Durchlauf

Schritt 1: 297 hat 3 Stellen. Also $n = 3$.

Schritt 2: $d_{neu} = d_{alt} - f(n-1)$, also $d_{neu} = 297 - f(2) = 297 - 90 = 207$

Schritt 3: Es ist $d \neq 9 \cdot 10^n$, also muss ein weiterer Durchlauf gestartet werden.

$\vdots$

Nun wird bei jedem weiteren Durchlauf 90 subtrahiert, bis d zweistellig wird:

Nach Durchlauf 4: $d_{neu} = 207 - 90 = 117$

Nach Durchlauf 5: $d_{neu} = 117 - 90 = 27$

$\vdots$

6. Durchlauf

Schritt 1: 27 hat 2 Stellen. Also $n = 2$.

Schritt 2: $d_{neu} = d_{alt} - f(n-1)$, also $d_{neu} = 27 - f(1) = 27 - 9 = 18$

Schritt 3: Es ist $d \neq 9 \cdot 10^n$, also muss ein weiterer Durchlauf gestartet werden..

7. Durchlauf

Schritt 1: 18 hat 2 Stellen. Also $n = 2$.

Schritt 2: $d_{neu} = d_{alt} - f(n-1)$, also $d_{neu} = 27 - f(1) = 18 - 9 = 9$

Schritt 3: Es ist $d = 9$, also ist die Vampirzahl 1 395 besiegt.

Teil b)

Das Verfahren funktioniert, wenn wir zu Beginn eine durch 9 teilbare Zahl haben, denn wir ziehen gerade immer die $9 \cdot 10^{n-1}$-Zahlen ab und landen schließlich bei einer Zahl, die mit 9 beginnt und danach eine beliebige Anzahl an Nullen hat. Zu zeigen ist also, dass die Differenz

$$v - (f_1 + f_2)$$

durch 9 teilbar ist, wobei v eine Vampirzahl mit den Fangzähnen f_1 und f_2 ist. Bei der Teilbarkeit durch 9 schauen wir uns die Quersumme an und halten zunächst fest, dass

$$n \equiv Q(n) \mod 9$$

für alle natürlichen Zahlen n ist, wobei $Q(n)$ die Quersumme von n ist. Dazu muss natürlich vorher verstanden werden, was Zahlkongruenzen bedeuten.

Zur Erinnerung vermerken wir

$$a \equiv b \mod c \iff c|(a-b); a,b \in \mathbb{Z} c \in \mathbb{N} \setminus 0. \tag{1}$$

Dies bedeutet gerade, dass a und b bei Division durch c den gleichen Rest lassen. Die so definierte Äquivalenz von Zahlen ist eine Äquivalenzrelation und man kann verschiedene Rechenregeln beweisen.[4] Dies wollen wir hier aber nicht in aller Einzelheit tun. Da es für Restklassen verschiedene Repräsentanten gibt, können die ausgetauscht werden. Sehr schön kann man so für Zehnerpotenzen berechnen:

$$10^k \equiv 1 \mod 9$$

Für eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit der Dezimaldarstellung $\overline{n_k n_{k-1} \dots n_2 n_1 n_0}$ gilt dann

$$n = \sum_{i=0}^{k} 10^i n_i \equiv \sum_{i=0}^{k} n_i = Q(n) \mod 9,$$

also ist der Rest, den eine natürliche Zahl bei der Division durch 9 lässt gleich dem Rest bei der Division der entsprechenden Quersumme durch 9.

Kommen wir zurück zu unserer Vampirzahl v mit den Fangzähnen f_1 und f_2. Es gilt

$$\begin{aligned} v = f_1 \cdot f_2 &\equiv Q(f_1 \cdot f_2) \mod 9 \\ &\equiv Q(f_1) + Q(f_2) \mod 9 \qquad \text{(denn } v \text{ hat ja dieselben Ziffern wie } f_1 \text{ und } f_2\text{)} \\ &\equiv f_1 + f_2 \mod 9. \end{aligned}$$

Da somit v und $f_1 + f_2$ den gleichen Rest bei der Division durch 9 lassen, gilt insbesondere

$$v - (f_1 + f_2) \equiv 0 \mod 9,$$

also ist die Differenz immer durch 9 teilbar. Dies ist der Beweis, dass der Algorithmus immmer funktionieren wird.

Teil c)

Eine weitere Aufgabe für die SuS könnte es sein, einen besseren Algorithmus zu suchen. Hier geben wir keine Lösung vor, sondern sind selbst interessiert an kreativen Ideen.

Aufgabe 4

Zunächst einmal kann man ja mit einem Rechner nachrechnen, dass

$$948\,922\,547\,95\mathbf{0}\,000\,000\,000\,001^2 = 900\,454\,002\,007\,920\,049\,202\,5\mathbf{0}1\,897\,845\,095\,9\mathbf{0}0\,000\,000\,000\,000\,001$$

gilt. Da lediglich eine Null in der Basis und zwei Nullen im Produkt hinzugefügt wurden (siehe fett gedruckte Nullen), haben wir wirklich wieder eine quadratische Vampirzahl.[5]

Um möglichst wenig mit riesigen Zahlen zu hantieren, setzen wir

$$\begin{aligned} a &:= 94\,892\,254\,795 \\ b &:= 9\,004\,540\,020\,079\,200\,492\,025 \\ c &:= 18\,978\,450\,959. \end{aligned}$$

[4]Einführungen zum Rechnen mit Zahlkongruenzen kann man an verschiedenen Stellen finden. Schön ist beispielsweise dieser Auszug aus dem Skript des Bremer Mathedidaktikers Raimund Albers:
http://www.math.uni-bremen.de/didaktik/ma/ralbers/Veranstaltungen/MaDenken1112/Material/SkriptWiSe_K4.pdf

[5]Zum Rechnen mit großen Zahlen, kann zum Beispiel die Seite https://web2.0rechner.de/ verwendet werden.

Die erste durch Valea herausgefundene Identität ist dann

$$(10^{12}a+1)^2 = 10^{24}b + 10^{13}c + 1$$

und die zweite

$$(10^{13}a+1)^2 = 10^{26}b + 10^{14}c + 1.$$

Wir behaupten, dass für alle $n \geq 12$ gilt:

$$(10^n a+1)^2 = 10^{2n}b + 10^{n+1}c + 1$$

Wir beweisen dies mit vollständiger Induktion über n.

Induktionsanfang Für $n = 12$ wurde die Behauptung schon mit Valeas Rechner gezeigt. Wer mag, kann auch gerne noch einmal nachrechnen.

Induktionsvoraussetzung Für ein $k \geq 12$ möge gelten:

$$(10^k a+1)^2 = 10^{2k}b + 10^{k+1}c + 1$$

Induktionsbehauptung Dann gilt:

$$(10^{k+1}a+1)^2 = 10^{2k+2}b + 10^{k+2}c + 1$$

Induktionsbeweis Es ist

$$\begin{aligned}(10^{k+1}a+1)^2 &= (10^{k+1}a + 1 + 10 - 10) \\ &= (10 \cdot (10^k a + 1) - 9)^2 \\ &\overset{IV}{=} 10^2 \cdot (10^{2k}b + 10^{k+1}c + 1) - 2 \cdot 10 \cdot (10^k a + 1) \cdot 9 + 81 \\ &= 10^{2k+2}b + 10^{k+3}c + 1 - 180 \cdot 10^k a.\end{aligned}$$

Für den weiteren Beweis müssen wir noch

$$10^{k+3}c - 180 \cdot 10^k a = 10^{k+2}c$$

zeigen. Nach Kürzen mit 10^{k+1} ergibt sich äquivalent die zu zeigende Gleichung

$$100c - 18a = 10c.$$

Jetzt müssen wir doch noch ein wenig mit großen Zahlen rechnen und erhalten

$$\begin{aligned}18 \cdot a &= 18 \cdot 94\,892\,254\,795 \\ &= 1\,708\,060\,586\,310,\end{aligned}$$

sowie

$$100 \cdot c = 1\,897\,845\,095\,900.$$

Die finale Subtraktion

$$\begin{array}{rr} & 1\,897\,845\,095\,900 \\ - & 1\,708\,060\,586\,310 \\ \hline & 189\,784\,509\,590 \end{array}$$

liefert die gewünschte Gleichheit und damit den Beweis der Induktionsbehauptung.