Problem des Monats · September 2021

LÖSUNG

Die Aufgabenteile a) und c) eignen sich gut für die jüngeren Jahrgänge (ab 5/6). Die Aufgabenteile b) und d) sind durch den erhöhten Schwierigkeitsgrad und die inhaltlichen Anforderungen eher von höheren Jahrgängen weiter zu bearbeiten.

a) Definition: L := ein Schritt nach links
R := ein Schritt nach rechts

Es gibt beim zweimaligen Werfen der Münze genau 4 mögliche Wege beim Laufen: LL, LR, RL, LL

Es gibt bei vier Münzwürfen genau 16 verschiedene Wege beim Laufen:
LLLL, RLLL, LRLL, LLRL, LLLR, RRLL, RLRL, RLLR, LRRL, LRLR, LLRR, RRRL, RRLR, RLRR, LRRR, RRRR

Methodisch-didaktischer Hinweis: Zusätzlich könnten die Läufe auch graphisch dargestellt werden. Vor allem jüngere Schülerinnen und Schüler könnten die entsprechenden Random Walks bei gutem Wetter draußen selbst durchführen und so spielerisch erfahren.

Damit Eliza zum Schluss wieder auf dem Punkt S steht, kommen nur Kombinationen infrage, bei denen L und R in gleicher Anzahl vorkommen.

Wahrscheinlichkeit bei zwei Münzwürfen: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Wahrscheinlichkeit bei vier Münzwürfen: $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$
(Man könnte hier noch begründen, warum es sich um einen Laplace-Versuch handelt und man auf diesem Weg die Wahrscheinlichkeit bestimmen kann)

b) Lösung mithilfe der Binomialverteilung

Die Zufallsvariable *X* (Anzahl der Schritte nach links) ist binomialverteilt. Sei *p* die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt nach links und (1 – *p*) die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt nach rechts, lässt sich die Wahrscheinlichkeit für *k* Schritte nach links folgendermaßen berechnen:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Methodisch-didaktischer Hinweis: Insbesondere für jüngere Schülerinnen und Schüler kann eine „Überprüfung" der Gültigkeit der obigen Gleichung erfolgen, indem bezogen auf a) n = 2 und n = 4 sowie k = 1 bzw. k = 2 betrachtet werden. Die Bedeutung des Binomialkoeffizienten n über k (hier 2 über 1 und 4 über 2) lässt sich mithilfe der entsprechenden Kombinationen aus Teilaufgabe a) erklären. Überdies könnte in diesem Zusammenhang auch das Pascalsche Dreieck behandelt werden.

c) Lösung z. B. mithilfe der Kombinatorik

Alle Läufe sind gleichwahrscheinlich. Zu untersuchen ist daher lediglich, wie viele verschiedene Läufe insgesamt zu den einzelnen Punkten führen. Aufgrund der Symmetrie müssen nicht alle Punkte betrachtet werden.

Die Punkte, die den größten Wetterfolg versprechen, sind die benachbarten Punkte von S. Es gibt nämlich jeweils 9 verschiedene Läufe, um diese Punkte zu erreichen. Für alle anderen Punkte ist die Anzahl der Läufe (mitunter deutlich) geringer.

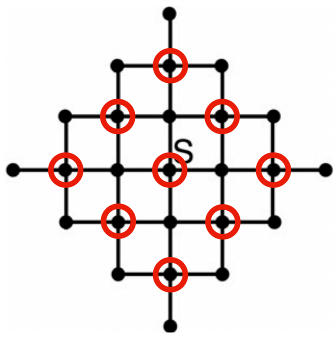
Beispiel für den nächstgelegenen Punkt links vom Punkt S:

Definition: L := ein Schritt nach links
R := ein Schritt nach rechts
O := ein Schritt nach „oben"
U := ein Schritt nach „unten"

Mögliche Läufe, die zu diesem Punkt führen:

LLR, RLL, LOU, LUO, OLU, ULO, OUL, UOL, LRL

Es gibt neun Punkte, bei dem die Wette mit Sicherheit verloren geht (siehe Abbildung). Da die Anzahl der Schritte ungerade ist, kann David diese Punkte mit dem letzten Schritt nicht erreichen.



d) Bestimmung der mittleren Entfernung (u. a. mithilfe des Satzes von Pythagoras)

Es gibt $4^3 = 64$ verschiedene Läufe. Bei 36 Läufen beträgt der Abstand schlussendlich 1 LE, bei 24 Läufen $\sqrt{5}$ LE und bei 4 Läufen 3 LE. (Abstände mit gerader Länge sind nicht möglich, da die Anzahl der Schritte ungerade ist).
(Man kann hier die fachsprachliche Beschreibung „mittlere Entfernung" erst einmal definieren)

Möglicher Abstand	Wahrscheinlichkeit (Gewicht)
1 LE	$\frac{36}{64} = \frac{9}{16}$
$\sqrt{5}$ LE	$\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$
3 LE	$\frac{4}{64} = \frac{1}{16}$

$\frac{9}{16} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{16} \cdot 3 \approx 1{,}59$ LE

Die mittlere Entfernung zwischen David und dem Punkt S nach drei Schritten beträgt ca. 1,59 LE.

Möglichkeiten der Weiterarbeit:

- alle Aufgaben: Veränderung der Wahrscheinlichkeiten: Die Münze und der Würfel sind nicht fair.
- ad d): Herleitung einer Formel zur Berechnung des mittleren Abstandes bei *n* Schritten
- Betrachtung eines dreidimensionalen Random Walks
- Internetrecherche: Kennenlernen weiterer Random Walks, z. B. Diffusion von Teilchen (Bezug zum Physikunterricht)