# Problem des Monats • Oktober 2021

## LÖSUNG

**<u>Lösungshinweise:</u>**

Eine mögliche Notiz zum Spiel könnte so aussehen:

| Zug | Person A | Person B | | Person A | Person B |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 50 | | | 49 | |
| 2 | | 25 | | | 7 |
| 3 | 5 | | | 21 | |
| 4 | | 20 | | | 42 |
| 5 | 60 | | | 84 | |
| 6 | | 30 | | | 14 |
| 7 | 15 | | | 2 | |
| 8 | | 45 | | | 10 |
| 9 | 90 | | | 20 | |
| 10 | | 10 | | | 40 |
| 11 | 40 | | | 80 | |
| 12 | | 80 | | | 8 |
| 13 | 8 | | | 16 | |
| 14 | | 64 | | | 32 |
| 15 | 32 | | | 4 | |
| 16 | | 4 | | | 12 |
| 17 | 2 | | | 24 | |
| 18 | | 1 | | | 48 |
| 19 | 13 | | | 96 | |
| 20 | | 26 | | | 1 |
| 21 | 52 | | | 5 | |
| 22 | | -vorbei- | | | 15 |
| 23 | | | | 45 | |
| 24 | | | | | 90 |
| 25 | | | | 9 | |
| 26 | | | | | 18 |
| 27 | | | | 36 | |
| 28 | | | | | 72 |
| 29 | | | | 3 | |
| 30 | | | | | 6 |
| 31 | | | | 30 | |
| 32 | | | | | 60 |
| 33 | | | | -vorbei- | |

Man stellt fest, dass man durch die Reihen des kleinen Einmaleins springt. **Wenn man nur in der Reihe der Vielfachen einer Zahl bleibt, ist das Spiel schnell zu Ende.** Also lohnt es sich die Reihen der Teiler und Vielfachen zu wechseln. (·2, ·3, ·5, ·7… und dann per Division rückwärts.)

Dabei erkennt man auch, dass die Primzahlen ab **53 (53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97) das Spiel schnell beenden können**, man also nicht mehr als eine dieser Zahlen benutzen sollte.
Die mittelgroßen **Primzahlen 47, 43, 41 und 37** lassen sich noch einmal verdoppeln und führen dann zur 2, es gibt aber jeweils keinen anderen Weg, so dass auch **aus diesen Zahlen nur eine gewählt werden sollte**.
Die mittleren Primzahlen 29 und 31 lassen sich verdoppeln und verdreifachen somit kann man die Einmaleins-Reihe wechseln. Die 23 lässt sich vervierfachen, die kleinen Primzahlen 17 und 19 verfünffachen und die 13 ermöglicht den Wechsel in die 7er Reihe.
Mit diesen Erkenntnissen kann man **im Team etwa die Hälfte der Zahlen erreichen**, da auch die kleinen Zahlen (1 bis 10) in Verbindung mit den Primzahlen schnell verbraucht sind.

**<u>Interessante Variante des Spiels:</u>**
Eine Variante des Spiels kann es sein, dass die beiden Personen nicht im Team, sondern **gegeneinander** spielen, d.h. wer keine Zahl mehr streichen kann, hat verloren. Die gewonnenen Strategien aus der kooperativen Varianten können nun auch im Spiel gegeneinander genutzt werden:
**Für das 100er Feld** ergibt sich, dass die Wahl einer großen Primzahl (53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97) dazu führt, dass der Gegner dann gezwungen ist, die 1 zu wählen und der Nächste wiederum eine weitere der Primzahlen, sodass dem Gegner kein weiterer Zug bleibt.

**Beginnt** man mit den **Zahlen 58 oder 62**, ist der Gewinn sicher.

Man unterteilt die Primzahlen im Feld in große in der oberen Hälfte des Feldes (53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97), sehr kleine (2, 3, 5, 7, 11, 13) sowie mittelgroße (37, 41, 43, 47) mittlere (29 und 31) und kleine (17 und 19).
Diese Unterteilung (13 und 23 fehlen bei Ian Stewart) hängt mit der Anzahl der Vielfachen im Hunderterfeld zusammen.

**Eventuelle Vereinfachung des Spiels zu Beginn:**
Zum Einstieg kann man Spiel auch in einem **40er Feld** spielen. In der **kleinen Version** gibt es zwei sogenannte **Gewinnzahlen (22 und 26)**, die zwingend zum Sieg führen.
Wenn niemand die 1 wählt, da sonst das Spiel vorzeitig zu Ende ist, ergibt sich folgendes Bild:

| Zug | Person A | Person B | | Person A | Person B |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 22 | | | 22 | |
| 2 | | 11 | | | 2 |
| 3 | 33 | | | 26 | |
| 4 | | 3 | | | 13 |
| 5 | 21 | | | 39 | |
| 6 | | 7 | | | 3 |
| 7 | 35 | | | 21 | |
| 8 | | 5 | | | 7 |
| 9 | 25 | verliert | | 35 | |
| 10 | | | | | 5 |
| 11 | | | | 25 | |
| 12 | | | | | verliert |

Person A startet mit dem Doppelten einer mittleren Primzahl, Person B halbiert bzw. wählt die Primzahl, Person A wählt die drei bzw. das Doppelte der anderen mittleren Primzahl und dann über die 17, die 19 und die 5 verliert Person B jeweils.

Analog dazu kann diese Strategie im 100er Feld so aussehen:

| Zug | Olivia | Paul | | Olivia | Paul |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 58 | | | 58 | |
| 2 | | 29 | | | 2 |
| 3 | 87 | | | 62 | |
| 4 | | 3 | | | 31 |
| 5 | 51 | | | 93 | |
| 6 | | 17 | | | 3 |
| 7 | 85 | | | 51 | |
| 8 | | 5 | | | 17 |
| 9 | 95 | | | 85 | |
| 10 | | 19 | | | 5 |
| 11 | 57 | | | 95 | |
| 12 | | 1 | | | 19 |
| 13 | 97 | | | 57 | |
| 14 | | verliert | | | 1 |
| 15 | | | | 97 | |
| 16 | | | | | verliert |

Vertiefende Fragestellungen, je nach Alter und Interesse:

- (Teilbarkeitsregeln)
- Primfaktorzerlegung
- Beweisführung: Ein Beweis für unendlich große Felder der Dimension n existiert, er hängt von der **Primfaktorzerlegung von n!** ab. Mit älteren Schülerinnen und Schülern kann man sich damit beschäftigen

**Quellen:**


Steward, Ian. "Zahlen wegnehmen." *Mathematische Spiele und Strategien*, Spektrum der Wissenschaft 2/15, 2015, S. 49–51. Online: https://moodle.phst.at/pluginfile.php/308884/course/section/54892/006d1ba42c_SdW_highlights_201502_ges.pdf

bzw. https://www.spektrum.de/magazin/zahlen-wegnehmen/824415) sowie in *Professor Stewarts Mathematische Schätze*, by Ian Stewart et al., Büchergilde Gutenberg, 2012, pp. 311–318. veröffentlicht.