LÖSUNG

Lösungshinweise

Insbesondere für jüngere Mathematiker empfehlen wir ein reales langes Seil/Tau/(Gummi-)Band zu verwenden.

Auch der Einsatz von Geogebra ist bis zu einem gewissen Grad sehr hilfreich. Die Personen können als Punkte angelegt und beliebig verschoben werden. Das Gummiband kann aus einzelnen Strecken zusammengesetzt oder als Polygonzug gezeichnet werden. Diese Übungen sind besonders für den Einstieg in Geogebra interessant.

Vorüberlegungen:
Eine erste Analyse der Aufgabe führt dazu, dass nochmals verschiedene Situationen unterschieden werden können, nämlich:

Variante 1: Das Herumwickeln um eine Person, die bereits ein Gummiband in der Hand hält, ist nicht erlaubt.

Variante 2: Das Herumwickeln um eine Person, die bereits ein Gummiband in der Hand hält, ist erlaubt.

Variante 3: Eine Person kann mehrere Gummibänder greifen, Knoten sind erlaubt.

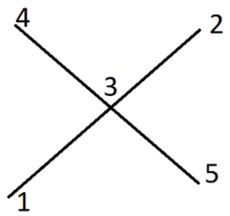
Variante 4: Anfangs- und Endpunkt des Gummibandes sind gleich.

Außerdem lässt sich **verallgemeinernd** – spätestens aber nach dem Lösen der Beispiele - feststellen:

1. Alle äußeren Eckpunkte müssen besetzt werden.
2. Jeder innere Eckpunkt, der mit zwei anderen Punkten auf einer Geraden liegt, ist nicht zwingend zu besetzen.

Das Kreuz:

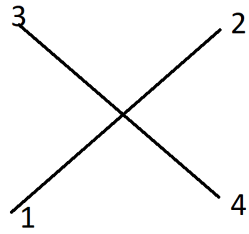
Variante 1: (Ohne Umlaufen, Knoten, etc.)
Minimale Personenanzahl: 5



Variante 2: (Man darf andere umkreisen)
Minimale Personenanzahl: 5 – *analog zu Variante 1*

Anja Kühnemund, Petra Presun, ・ mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

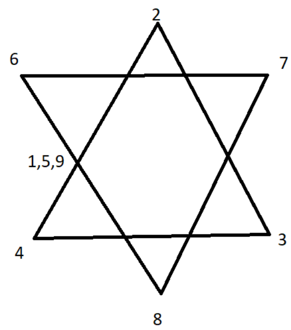
Variante 3: (Alle Tricks erlaubt)
Minimale Personenanzahl: 4
Erklärung: Person 1 und 2 nebeneinander, Person 3 läuft zur Mitte und knotet das Gummi fest, läuft dann senkrecht weiter und Person 4 wieder in entgegengesetzter Richtung. Alternativ und eleganter: Person 1-4 stehen in Reihe. Person 1 und 4 bewegen sich aufeinander zu und laufen beide einmal über das Gummi des anderen (Klassischer Beginn beim Schuhe zubinden). Nun laufen sie entgegengesetzt senkrecht zu 2 und 3.



Variante 4: (Person 1 hält beide Gummienden) – *identisch zu Variante 3.*

<u>Das Hexagramm:</u>

Variante 1: (Ohne Umlaufen, Knoten, etc.)
Minimale Personenanzahl: 9

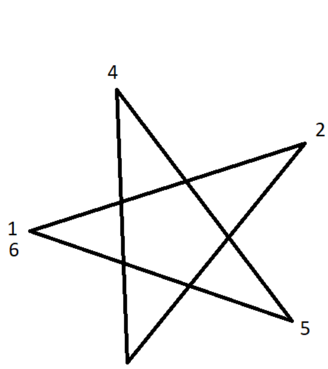


Variante 2: (Man darf andere umkreisen)
Minimale Personenanzahl: 8
Erklärung: Wie oben, nur dass Person 5 nicht benötigt wird, da man einfach um Person 1 herumlaufen kann.

Variante 3: (Alle Tricks erlaubt)
Minimale Personenanzahl: 6
Erklärung: Person 1 und 2 nebeneinander, Person 3 läuft mehrfach um die beiden herum. Nun nimmt er sich eines der vielen Verbindungsgummis und bildet damit ein Dreieck. Person 4 geht wie in Variante 1 beschrieben ein Stück Richtung Person 2, knotet nun aber das Gummi fest und geht weiter zum Ausgangspunkt vom zweiten Dreieck. Person 5 bildet den 2. Punkt, Person 6 läuft wieder mehrfach um 4 und 5 und spannt das 2. Dreieck wie oben beschrieben.

Variante 4: (Person 1 hält beide Gummienden) – identisch zu Variante 3.

<u>Das Pentagramm:</u>



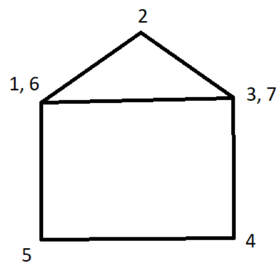
Variante 1: (Ohne Umlaufen, Knoten, etc.)
Minimale Personenanzahl: 6

Variante 2: (Man darf andere umkreisen)
Minimale Personenanzahl: 6
Erklärung: Hier gibt es keinen Vorteil zu Variante 1.

Variante 3: (Alle Tricks erlaubt)
Minimale Personenanzahl: 5
Hier ließe sich Anfangs- und Endpunkt auf einen Linienkreuzpunkt legen (Verknoten der Enden). Es hält somit keine Person ein Ende fest.

Variante 4: (Person 1 hält beide Gummienden)
Minimale Personenanzahl: 5 – *analog zu Variante 3*

<u>Das Haus:</u>



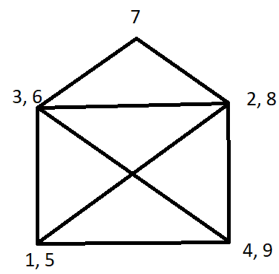
Variante 1: (Ohne Umlaufen, Knoten, etc.)
Minimale Personenanzahl: 7
Erklärung: Die Figur lässt sich ohne Absetzen des Stiftes mittels 6 Strichen zeichnen, es werden demnach 7 Personen benötigt.

Variante 2: (Man darf andere umkreisen)
Minimale Personenanzahl: 5
Erklärung: Analog zu Variante 1, allerdings kann eine Person am Startpunkt und eine am Endpunkt eingespart werden.

Variante 3: (Alle Tricks erlaubt)
Minimale Personenanzahl: 5 – *analog zu Variante 2*

Variante 4: (Person 1 hält beide Gummienden) – *identisch zu Variante 3, eine Linie ist doppelt.*

<u>Das Nikolaushaus:</u>



Variante 1: (Ohne Umlaufen, Knoten, etc.)
Minimale Personenanzahl: 9
Erklärung: Die Figur lässt sich ohne Absetzen des Stiftes mittels 8 Strichen zeichnen, es werden demnach 9 Personen benötigt.

Variante 2: (Man darf andere umkreisen)
Minimale Personenanzahl: 6
Erklärung: Hier wird an jeder Ecke der Figur jeweils eine Person benötigt plus eine zusätzliche am Endpunkt der Figur.

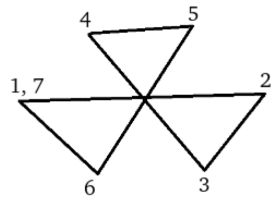
Variante 3: (Alle Tricks erlaubt)
Minimale Personenanzahl: 5
Erklärung: Die Person am Endpunkt kann zusätzlich gespart werden.

Variante 4: (Person 1 hält beide Gummienden)
Minimale Personenanzahl: 5

Erklärung: Die Figur kann ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden. Entsprechend verläuft das Gummiband, an der Unterseite jedoch doppelt.

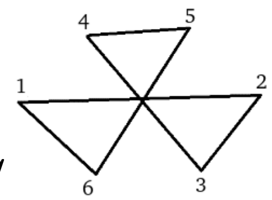
<u>Drei Dreiecke:</u>

Variante 1: (Ohne Umlaufen, Knoten, etc.)
Minimale Personenanzahl: 7
Erklärung: Die Figur kann ohne Absetzen des Stiftes durchgezeichnet werden. Damit muss nur am Start/Endpunkt eine Person doppelt stehen.



Variante 2: (Man darf andere umkreisen)
Minimale Personenanzahl: 7 – *analog zu Variante 1*

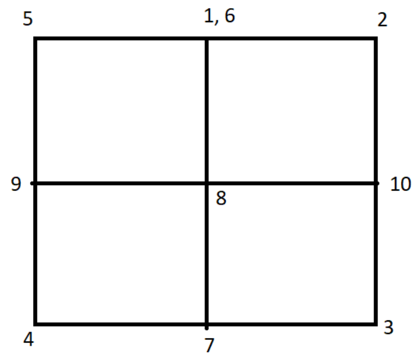
Variante 3: (Alle Tricks erlaubt)
Minimale Personenanzahl: 6
Erklärung: Entspricht Variante 1, nur dass Person 1 den Anfang und das Ende des Gummibandes hält. Alternativ kann das Anfang und das Ende in der Mitte verknotet werden, dann umläuft das Band lediglich alle 6 Personen.



<u>Vier Quadrate:</u>

Variante 1: (Ohne Umlaufen, Knoten, etc.)
Minimale Personenanzahl: 10

Variante 2: (Man darf andere umkreisen)
Minimale Personenanzahl: 8
Erklärung: Die Personen 6 und 8 können eingespart werden.

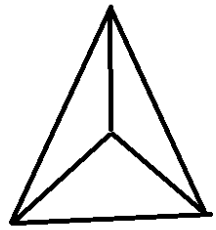


Variante 3: (Alle Tricks erlaubt)
Entspricht Variante 2, natürlich sind Abwandlungen möglich.

Weiterführende Problemfragen:

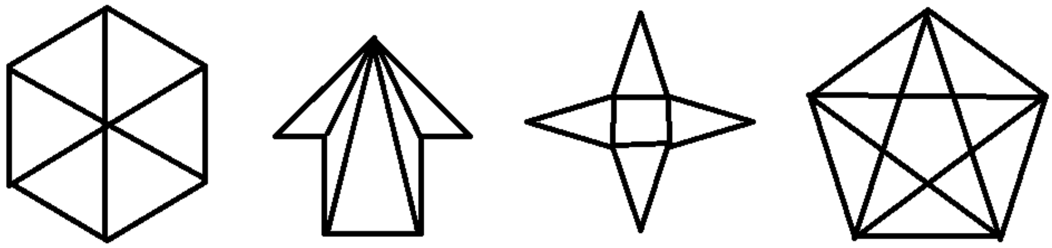
1. Wenn man zwei Figuren zusammenfügt, lässt sich die dann benötigte Personenzahl bei bestimmten Figuren aus den Einzelpersonenzahlen bestimmen? Die Frage lässt sich experimentell recht schnell bereits an einfachen Figuren wie zwei Dreiecken untersuchen und kann final nicht eindeutig beantwortet werden.

2. Das Brückenproblem (Graph rechts): Das Gummiband-Problem verweist indirekt auf das Königsberger-Brücken-Problem, wenn man fordert, dass das Gummiband jede Strecke nur einmal durchlaufen darf (Doppellegung des Bandes verboten) und das Umkreisen der Personen erlaubt ist.

   Die Personen sind dann die Knoten des Graphen, das Gummiband stellt die Gemeinsamkeit aller Kanten dar. Hier stellt sich schnell die Frage danach, ob der Graph ein Eulergraph ist oder nicht. Wenn Variante 4 ohne Doppellegung betrachtet wird, sucht man nach einem Eulerkreis.

3. Spätestens nach 2. lässt sich die Aufgabenstellung auch umkehren und man kann die SuS nach neuen Figuren suchen lassen, zu denen dann die minimale Anzahl an Personen gesucht werden soll. Hier sind kleine Wettkämpfe zwischen SchülerInnen denkbar. Mögliche Figuren könnten dann folgende sein:



Anja Kühnemund, Petra Presun, ・ mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe