LÖSUNG

Lösungshinweise

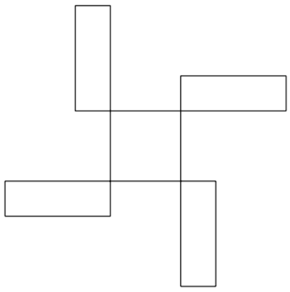
Allgemeine Hinweise

Wir glauben, es ist eine gute Idee, die Schülerinnen und Schüler zunächst viel zeichnen zu lassen.
Aufgrund der Übersichtlichkeit bestehen die verwendeten Folgen nur aus Ziffern. Die Folgenglieder könnten aber auch mehrstelligen Zahlen sein.
Windmühlenbilder könnten schulintern veröffentlicht werden und für die Zirkeltreffen werben.

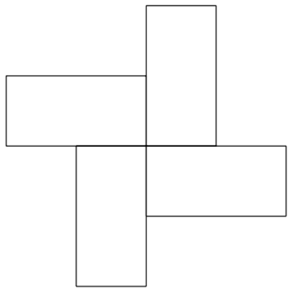
Lösungen

a) Hier sind die drei Windmühlen:

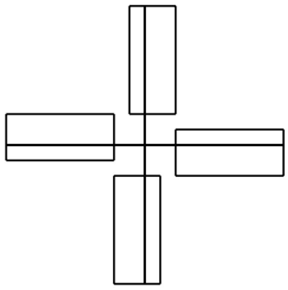
Windmühle 1 6 3



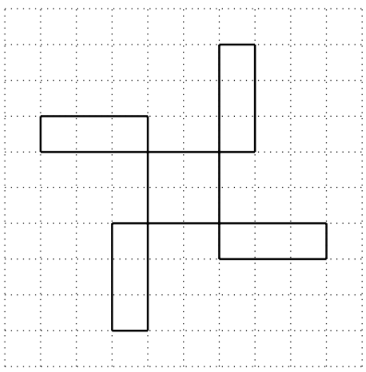
Windmühle 2 4 6

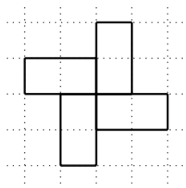


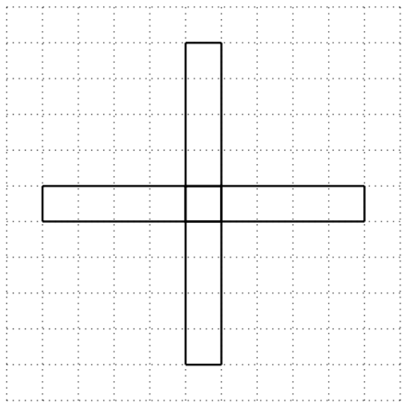
Windmühle 9 2 7 3 7 1 9



b) Das erste Bild ist die eingangs erwähnte Folge 6 1 3, das zweite Bild wurde mit der Folge 1 2 3 und das dritte mit 5 1 5 erzeugt.

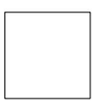




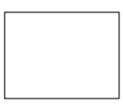


c) Hier sind ein paar Beispiele für geschlossene Flügelbilder für ein- bis achtstellige Zahlenfolgen:

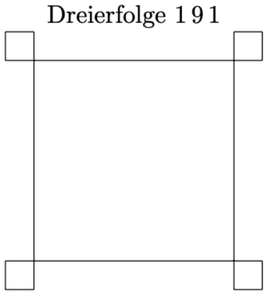
Einerfolge 3



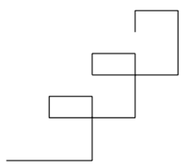
Zweierfolge 3 4



Dreierfolge 1 9 1

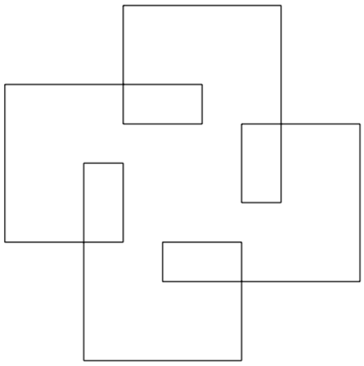


Viererfolge 1 2 3 4 schließt nicht s. Lösung zu f)

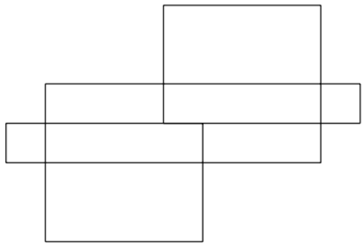


Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

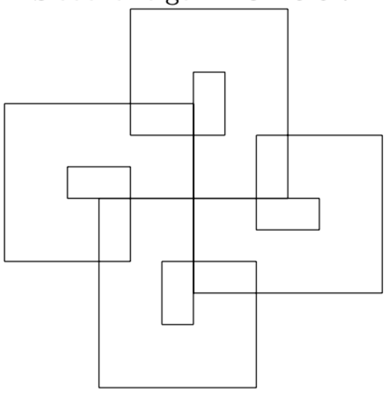
Fünferfolge 1 2 3 4 5



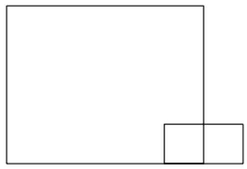
Sechserfolge 1 5 3 4 4 8



Siebenerfolge 1 2 3 4 5 6 7



Achterfolge 1 2 1 6 4 5 4 1



d) Für ein Schließen der Figur muss

   i) die Summe der Schritte nach unten gleich der Summe der Schritte nach oben sein sowie

   ii) die Summe der Schritte nach rechts gleich der Summe der Schritte nach links sein.

   Nur so gelangt man zum Ausgangspunkt. Für eine Dreierfolge sind diese beiden Bedingungen für beliebige a, b und c erfüllt, wie man schön an der folgenden Tabelle sehen kann.

$\uparrow$	$\rightarrow$	$\downarrow$	$\leftarrow$
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

e) Sei bei der Folge $a\ b\ c$ die größte Ziffer a. Entsteht in der Mitte ein Loch, so wird es von einem Teil der längsten Strecke a begrenzt. Die vorletzte Strecke b und die übernächste Strecke c werden in der entgegengesetzten Richtung wie a durchlaufen (siehe Tabelle bei d)). Nur wenn gilt: $a > b+c$ kann sich ein quadratisches Loch mit der Seitenlänge $a-(b+c)$ bilden. Ist $a = b+c$ so verläuft die Figur durch das Drehzentrum und für $a < b+c$ überlappen die Flügel sich.

f) Bei einer 4er Folge gelangt man nur zum Ausgangspunkt zurück, wenn gilt $a = c$ und $b = d$. In diesem Fall handelt es sich aber nicht um eine echte Viererfolge, sondern um eine 2er Folge oder falls $a = b$ ist um eine 1er Folge. Auch dies kann man mit der Tabelle darstellen.

$\uparrow$	$\rightarrow$	$\downarrow$	$\leftarrow$
a	b	c	d

Anja Kühnemund, Petra Presun, · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

g) Für eine allgemeine Aussage betrachten wir die Länge der Folgen mod 4. Dazu halten wir zunächst fest:

Folgen mit ungerader Länge n schließen immer nach $4n$ Schritten.

Beweis: Sei die Folge gegeben durch $a_1\,a_2\,a_3\ldots a_n$. Die Tabelle sähe dann nach $4n$ Schritten so aus:

$\uparrow$	$\rightarrow$	$\downarrow$	$\leftarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4
a_5	a_6	a_7	a_8
$\ldots$			
a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n

Die Tabelle hat 4 Spalten und n Zeilen. Würde die Zahl a_1 in der ersten Spalte doppelt vorkommen, so wäre a_n vorher in der vierten Spalte. Dies hieße aber, dass entweder n oder $2n$ oder $3n$ durch 4 teilbar wäre. Laut Voraussetzung gilt aber

$$n \equiv \pm 1 \not\equiv 0 \mod 4$$

und daraus

$$2n \equiv \pm 2 \not\equiv 0 \mod 4$$

sowie

$$3n \equiv \mp 1 \not\equiv 0 \mod 4.$$

Somit haben wir einen Widerspruch und die Zahl a_1 kommt nicht doppelt in der ersten Spalte vor. Desgleichen können wir für alle a_i $(i = 1, \ldots n)$ argumentieren. Also kommt in keiner Spalte eine Zahl doppelt vor. Da wir n Zeilen haben, stehen demnach in jeder Spalte alle a_i der Folge, womit alle Summen gleich groß und die Bedingungen aus d) erfüllt sind. □

Für die weitere Fallunterscheidung fehlen noch die Folgen, welche bei Division durch 4 den Rest 2 lassen und jene, deren Längen durch 4 teilbar sind. Betrachten wir zunächst diejenigen mit Rest 2. Für eine Sechserfolge gilt beispielsweise: Hier gelangt man immer zum Ausgangspunkt zurück, da stets gilt $a_1+a_5+a_3 = a_3+a_1+a_5$ und $a_2 + a_6 + a_4 = a_4 + a_2 + a_6$, siehe die Tabelle:

$\uparrow$	$\rightarrow$	$\downarrow$	$\leftarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4
a_5	a_6	a_1	a_2
a_3	a_4	a_5	a_6

Allgemein gilt:

Folgen der Länge n mit $n \equiv 2 \mod 4$ schließen immer nach $2n$ Schritten.

Beweis: Ähnlich wie im ersten Beweis können wir folgern, dass keine Zahl in einer Spalte doppelt auftritt. Würde ein Folgenglied mit ungeradem Index in unserem Tabellenschema in einer geraden Spalte auftauchen (links und rechts Bewegungen), so würden wir durch Zweiersprünge in der Tabelle immer in geraden Spalten landen und unser letzter Eintrag $2n$ wäre ungerade. Folgenglieder mit ungeradem Index befinden sich also in ungeraden Spalten und entsprechend sind die Folgeglieder mit geradem Index in den geraden Spalten. Da wir $\frac{n}{2}$ Zeilen haben, befinden sich jeweils alle Folgeglieder mit geraden bzw. ungeraden Inidizes in den zugehörigen Spalten. Somit sind die in d) definierten Summen gleich und die Folge schließt. □

Zuletzt betrachten wir die Folgen, deren Längen durch 4 teilbar sind. Hier gelangen wir bereits nach n Schritten wieder in unsere Ausgangsrichtung und starten den Zyklus von neuem. Eine Schließung können wir demnach nur erreichen, wenn die Bedingungen von d) bereits im ersten Durchlauf erfüllt sind. Als Beispiel sehen wir für Folgen der Länge 8: Die Folgen schließen nur unter den Bedingungen $a_1 + a_5 = a_3 + a_7$ und $a_2 + a_6 = a_4 + a_8$, siehe die Tabelle:

$\uparrow$	$\rightarrow$	$\downarrow$	$\leftarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4
a_5	a_6	a_7	a_8