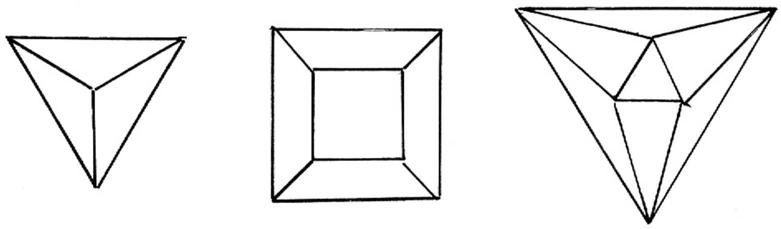
Problem des Monats • Januar 2022

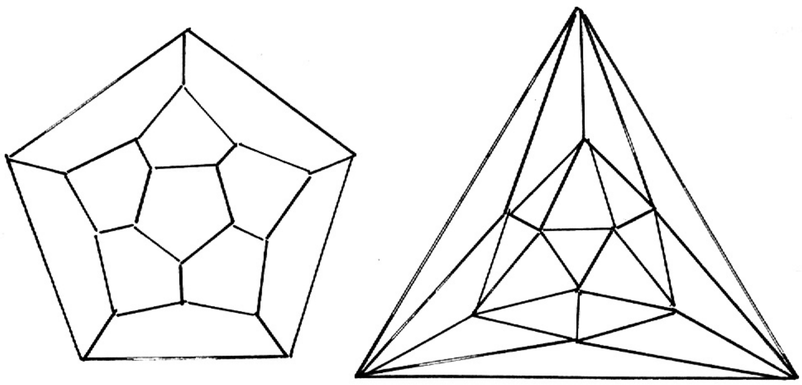
LÖSUNG

Aufgabe 1 In einem Schrägbild kann es Strecken-Überkreuzungen geben und in einem Netz sind mehr Ecken als im dazugehörigen Körper.

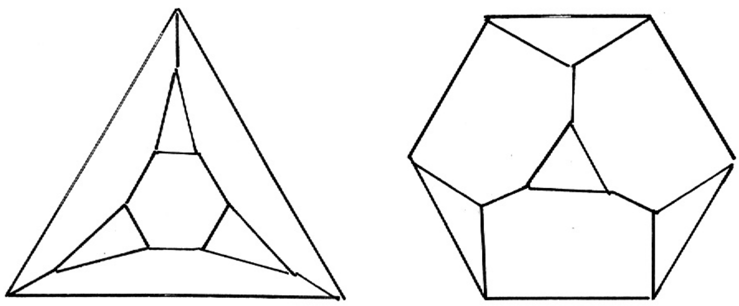
Aufgabe 2 & 3 sind rein zeichnerisch zu lösen.



In dieser oberen Zeile sind die Schlegeldiagramme des Tetraeders, des Hexaeders und des Oktaeders abgebildet, die noch ziemlich einfach zu erstellen sind.



In dieser Zeile sind die geplätteten Körper des Dodekaeders und des Ikosaeders dargestellt.
Es empfiehlt sich, hier schon Strategien zu entwickeln, wie z.B. von außen nach innen zu arbeiten als auch zu zählen, wie viele Linien von den jeweiligen Punkten ausgehen und wo sie sich zu welchen Figuren (3- oder 5-Ecken) schließen müssen.



In dieser unteren Zeile sind die beiden möglichen Schlegel-diagramme des einfachsten archimedischen Körpers, des Tetraederstumpfs abgebildet. Da er aus 3-Ecken und 6-Ecken besteht, kann der „Rahmen“ 3- oder 6-eckig sein. Damit sind also mehrere Lösungen möglich.

Es gibt 13 archimedische Körper, von denen 10 aus 2 n-Ecken und 3 aus 3 verschiedenen n-Ecken bestehen. Das ergibt 29 Schlegeldiagramme, also 27 weitere als hier zu sehen.[1]

Methodisch-didaktische Hinweise:

1) Die größeren archimedischen Körper sind sehr schwierig zu plätten und das kostet auch Zeit, sodass es natürlich unmöglich ist, alle archimedischen Körper vom Zirkel plätten zu lassen. Allerdings bietet die große Auswahl die Möglichkeit für die Schüler*innen, sich nach ihren Fähigkeiten und ihrem Geschmack zu entscheiden.
2) Als Hilfsmittel zur Veranschaulichung kann man das interaktive virtuelle Whiteboard nutzen und auch die verschiedenen Geometrie-Baukästen, über die viele Mathe-Sammlungen verfügen. Eine haptische Wahrnehmung der Körper ist sicher hilfreich.

[1] Man starte auf https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid und klicke von da aus auf die einzelnen Körper. In den jeweiligen Artikeln ist das Schlegeldiagramm meist am Ende abgebildet.

Hintergrundwissen für LuL zum Körperplätten:

Was die Schüler*innen hier erzeugen sollen, heißt „**Schlegeldiagramm**", benannt nach dem Mathematiker Victor Schlegel, der bei Felix Klein, dem Erfinder der gleichnamigen Flasche (einer Art 3D-Möbiusband), promoviert hat. Ein Schlegeldiagramm ist die zweidimensionale Darstellung eines Polyeders, die so erzeugt wird, wie im Aufgabentext erklärt.[2]

Der allgemeinere Begriff dieser Darstellung heißt „planarer" oder „**plättbarer Graph**", was in der Graphentheorie behandelt wird, aus der ja schon das Problem des Monats November stammte. Der Eulersche Polyedersatz kann mit Hilfe solcher Graphen bewiesen werden (s.u.).[3]

Die Transformation des Plättens stammt aus der **Topologie**, dem interessanten Gebiet der Mathematik, was in etwa zwischen der Geometrie und der Mengenlehre steht. Die Schulgeometrie behandelt Eigenschaften, die sich bei Bewegungen, Spiegelungen und maßstäblichen Streckungen nicht ändern, die Topologie aber solche, die bei allen stetigen Transformationen erhalten bleiben. Einfach beschrieben: Nahe Punkte bleiben bei solchen Transformationen nahe. Und eine stetige Transformation ist anschaulich, dass die geometrische Figur aus Gummi ist und wir damit beliebige Verzerrungen ohne Zerreißungen und Neuberührungen machen. Geschichtlich geht die Topologie auf oben genannte August Möbius und Felix Klein zurück.[4]
Die Plättung eines Körpers auf ein Schlegeldiagramm ist insofern eine topologische Transformation, indem wir die Kanten des Körpers als eindimensionales Gitter zwischen den Eckpunkten betrachten. Also können wir diese Kanten als Linien verzerren und stellen den Körper somit „planar" dar, wobei aber seine Struktur erhalten und erkennbar bleibt.

Topologie ist eine sehr ästhetische Disziplin der Mathematik, die deshalb für die Mathe-Zirkel lohnenswert ist, weil sie im Schulunterricht so gut wie nicht vorkommt, aber dennoch wunderbar anschaulich, und bei diesem Beispiel von der Klasse 5 ab nachvollziehbar ist. Differenzierung ist sehr gut möglich - die kleinen platonischen Körper sind leicht von Unterstufenschüler*innen plättbar und die großen archimedischen sind für Abiturient*innen und Lehrer*innen eine Herausforderung.
Somit kann man Aufgabe 1 und 2 ohne Probleme in Zirkeln nutzen, in denen viele Unterstufen-Schüler*innen sitzen. Aufgabe 3 ist etwas für die Zirkel, die auch ältere Schüler*innen besuchen, die durch Wettbewerbs-Erfahrung oder Vorarbeit im Zirkel mit der vollständigen Induktion umgehen können.

Auch die Weiterarbeit kann unterschiedlich und je nach Interesse und Voraussetzungen ausfallen: Zum einen sind die Schlegeldiagramme oft ästhetisch und viele Schüler*innen möchten sie mit Farbe ausmalen. Auch hierbei kann man mathematisches entdecken (Landkartenfärbungsproblem[5], Symmetrien), und die entstehenden Bilder eignen sich zum Schmuck des Klassenraums und der Schulhomepage. Und zum anderen kann man natürlich auch die theoretischen Hintergründe aus der Topologie und Graphentheorie erkunden. Ein schöner Film zum Thema ist „Dimensions …une promenade mathématique…"[6], besonders Teil 2 und 4, wobei es zum Verständnis natürlich sinnvoll ist, auch Teil 1 und 3 zu sehen.

---

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Schlegeldiagramm

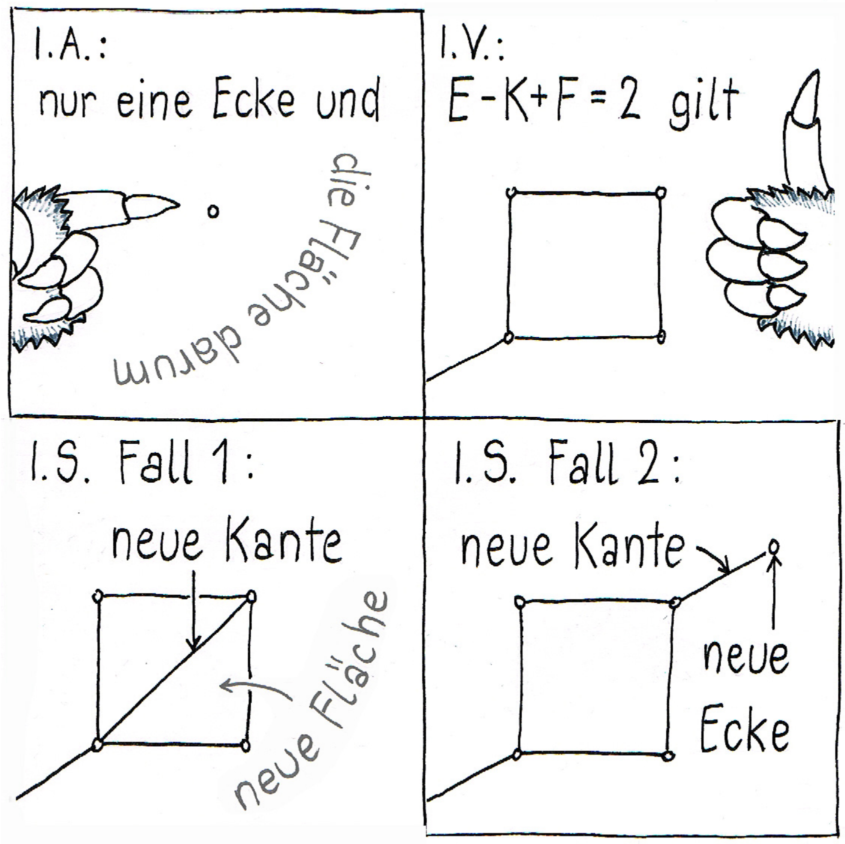
[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Planarer_Graph

[4] https://de.wikipedia.org/wiki/Topologie_(Mathematik) und das philosophisch-mathematische Buch von Bernulf Kanitscheider: Geometrie und Wirklichkeit (1971)

[5] https://de.wikipedia.org/wiki/Vier-Farben-Satz

[6] http://www.dimensions-math.org/ (dort weiterklicken zu Youtube)

Aufgabe 4 ist ein Beweis, der älteren und stärkeren Schüler*innen mit Erfahrung in vollständiger Induktion möglich sein sollte und auch mit Hilfe angeleitet werden kann:



Induktionsanfang: Wir beginnen mit nur einer Ecke und der darum liegenden Fläche. Somit ist hier E – K + F = 1 – 0 + 1 = 2.

Die Induktionsvoraussetzung ist wie üblicherweise, dass der Satz, also hier der Eulersche Polyedersatz, gilt.

Es gibt zwei mögliche Induktionsschritte:
1: Wir fügen eine neue Kante zwischen zwei Ecken ein. Dadurch entsteht eine neue Fläche aber keine neue Ecke.

2: Wir fügen eine neue Kante mit Ecke am Ende ein. Dadurch entsteht keine neue Fläche.

Im Fall 1 gilt also E – (K + 1) + F + 1 = E – K + F – 1 + 1 = E – K + F = 2 , also die I.V..
Im Fall 2 gilt also E + 1 – (K + 1) + F = E – K + F + 1 – 1 = E – K + F = 2 , also die I.V.. □[7]

Ein interessanter Ausblick könnte folgende Anwendung sein:

Mit einer etwas anderen Art der Plättung wird nämlich das Längen- und Breiten-Grad-Gitternetz der Erdkugel bei einer Kartenprojektion auf eine Ebene geplättet: Hier wird entlang eines Längengrades geschnitten und der Globus dann „ausgebreitet“, wobei es darauf ankommt, die Entfernungen und Richtungen möglichst wenig zu verzerren. Es geht hier also darum, den topologischen Vorgang möglichst geometrietreu zu halten. Ganz ist das nicht möglich, sodass diskutabel ist, wie genau verzerrt wird, und es verschiedene Zerrmodelle gibt:
Die uns bekannteste Plättung ist die Mercator-Projektion[8], die winkel- aber nicht flächentreu ist, sodass die Arktis-Gebiete größer und die Äquator-Gebiete kleiner erscheinen als sie sind. Die flächentreue Peters-Projektion[9] hingegen zeigt z.B. die wahre Flächengröße Afrikas, sodass die Diskussion über diese Modelle auch im Erdkunde-Unterricht durchaus eine politisch-psychologische Dimension hat. Zur Veranschaulichung sei zum Abschluss noch einmal auf oben genannten Film „Dimensions …une promenade mathématique…“[5] verwiesen.

---

[7]https://de.wikipedia.org/wiki/Eulerscher_Polyedersatz#Klassischer_Beweis
[8]https://de.wikipedia.org/wiki/Mercator-Projektion
[9]https://de.wikipedia.org/wiki/Peters-Projektion